

УДК 537.811, 537.621

## ГЕНЕРАТОР КОЛИВАНЬ НА НЕЛІНІЙНІЙ МАГНІТНІЙ НАНОСТРУКТУРІ

Я. С. Вольвач<sup>1</sup>, О. М. Думін<sup>2</sup>, В. А. Плахтій<sup>2</sup>, О. А. Прищенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Material Science & Engineering Department, University of California, San Diego (UCSD), 9500 Gilman Drive,  
La Jolla, CA 92093-0418, USA

E-mail: ivolvach@eng.ucsd.edu

<sup>2</sup>Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків, м. Свободи, 4

E-mail: dumin@karazin.ua

Надійшла до редакції 14 травня 2018 р.

Досліджуються магнітні явища у багатошарових нелінійних магнітних наноструктурах, що можуть стати основою для принципово нових електронних приладів спинтроники, які можуть прийти на заміну існуючим напівпровідниковим структурам. Описаний процес поєднання системи рівнянь Максвелла та рівняння Ландау-Ліфшица-Гільберта з метою побудови ітеративної схеми їхнього числового розв'язання у часовому просторі у квазістатичному наближенні. Наведені результати чисельного моделювання часової залежності струму генератора на основі нелінійної магнітної наноструктури. Досліджується залежність частоти генерації від параметрів зовнішніх полів та електричного кола генератора.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** часовий простір, рівняння Ландау-Ліфшица-Гільберта, нелінійна магнітна наноструктура, квазістатичне наближення, параметричний генератор

Исследуются магнитные явления в многослойных нелинейных магнитных наноструктурах, которые могут стать основой для принципиально новых электронных приборов спинтроники, что могут прийти на замену существующим полупроводниковым структурам. Описан процесс объединения системы уравнений Максвелла и уравнения Ландау-Лифшица-Гильберта с целью построения итеративной схемы их численного решения во временной области в квазистатическом приближении. Приведены результаты численного моделирования временной зависимости тока генератора на основе нелинейной магнитной наноструктуры. Исследуется зависимость частоты генерации от параметров внешних полей и электрической цепи генератора.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** временная область, уравнение Ландау-Лифшица-Гильберта, нелинейная магнитная наноструктура, квазистатическое приближение, параметрический генератор

The magnetic phenomena in multilayer magnetic nanostructures that can be the basis of principally new spintronic electron devices are investigated. The devices can replace the existent semiconductor structures. The uniting of Maxwell equation set and Landau-Lifshitz-Gilbert equation for the construction of iterative scheme of its numerical solving in time domain in quasistatic approximation is described. The results of numerical simulation of a time dependence of current of the generator on the basis of nonlinear magnetic nanostructure are presented. The dependence of generation frequency on parameters of external fields and generator electrical circuit is researched.

**KEY WORDS:** time domain, Landau-Lifshitz-Gilbert equation, nonlinear magnetic nanostructure, quasistatic approximation, parametric generator

### ВСТУП

Перспективними приладами, що можуть прийти на заміну традиційним напівпровідниковим пристроям, вважаються прилади спинтроники, принцип роботи яких полягає в ефекті збереження орієнтації спіну електрона при його проходженні через тонкі шари магнітних та немагнітних матеріалів. Так звані мікромагнітні пристрої, такі як генератори спин-обертального моменту та структури тунельного магнітоопору є важливими компонентами, вельми перспективними у низці практичних застосувань, в тому числі магнітного запису інформації, магнітної пам'яті з довільним доступом, магнітних датчиків, мікрохвильових генераторів та бездротового зв'язку [1-4]. Зокрема, компактність, швидкість перебудови частоти і хороша сумісність зі стандартним технологічним процесом «метал-оксид-напівпровідник» робить їх ідеальними для майбутніх мобільних енергоефективних пристроїв [5-6]. Вони можуть докорінно змінити функціонування усієї інформаційної сфери людства завдяки кардинальному збільшенню швидкодії підсилювальних та керувальних елементів. У провідних лабораторіях світу проводиться активна дослідницька робота щодо отримання стабільних характеристик цих пристроїв.

У багатьох випадках теоретичні розрахунки зосереджені на отриманні їхніх окремих характеристик, а не на побудові автоматичної системи для багатопараметричної оптимізації структури [6 - 10]. В цих роботах для створення пристрою проводиться перевірка усіх комбінацій геометричних і матеріальних параметрів для моделювання. Проте, такий підхід може призвести до потреби у дуже великому часі обчислень. Різноманітні методи оптимізації можуть дозволити більш ефективно розрахувати конструкції пристроїв [11-15].

Для розв'язання цих задач створені так звані швидкі мікромагнітні симулятори, які використовують методи скінченних різниць [16-20] та скінченних елементів [21-24] для дискретизації простору. Ці симулятори бувають з відкритим кодом або є комерційними пакетами [16-25]. В деяких з них для прискорення розрахунків використовується розпаралелювання обчислень [22, 26, 27]. Їхня продуктивність може бути додатково підвищена шляхом використання обчислювальних архітектур із масивами паралельних графічних процесорів (GPU) [17-19, 23, 24, 28-30]. У порівнянні з цими підходами в цій роботі пропонується аналітичне спрощення задачі, завдяки якому створений розрахунковий пакет буде мати більшу ефективність.

Для дослідження динаміки при переносі спіну в магнітних наноструктурах розв'язується диференціальне рівняння Ландау-Ліфшиця-Гільберта з урахуванням моменту передачі спіну. Ця самоузгоджена задача є досить складною. Формулювання зв'язаних рівняння Ландау-Ліфшиця-Гільберта (LLGE) та магнітоквазістатичних рівнянь Максвелла представлено у [11]. Це формулювання є точним, окрім нехтування струмом зміщення, тобто воно подане у магнітоквазістатичному наближенні і може застосовуватись для опису широкого діапазону магнітних та електромагнітних явищ [12]. Наведений підхід базується на двох паралельних симуляторах: один для нелінійного рівняння LLGE, а інший - для рівнянь Максвелла. Ці симулятори зв'язані розрахунком магнітного поля, яке проводиться в процесі розв'язання цих двох рівнянь [13]. Розв'язання рівняння LLGE здійснюється за допомогою неявної схеми інтегрування за часом, а рівнянь Максвелла – через розв'язання інтегрального рівняння у часовій області [14].

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Основне рівняння, що описує мікромагнітні явища – це рівняння Ландау-Ліфшиця-Гільберта [31]

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \vec{M} \times \vec{H}_{eff} - \frac{\gamma\alpha}{(1+\alpha^2)M_s} \vec{M} \times \vec{M} \times \vec{H}_{eff}, \quad (1)$$

де  $\gamma$  – гіромагнітне відношення електрона,  $\alpha$  – феноменологічна константа затухання,  $M_s$  – намагніченість насичення та  $\vec{H}_{eff} = \vec{H}_{an} + \vec{H}_{ex} + \vec{H}$  – діюче магнітне поле, що складається із поля анізотропії  $\vec{H}_{an}$ , обмінного поля  $\vec{H}_{ex}$  і магнітного поля  $\vec{H}$ . Поле анізотропії структури та поле обміну є магнітними полями, які вносять один і той же крутний момент (локально в параметричному просторі  $\vec{M}$ , так що виведення цих полів передбачає процедуру лінеаризації [31]) як кристалічної анізотропії та обмінних взаємодій, які мають квантово-механічний характер. Таким чином, вони не є розв'язками рівнянь Максвелла, тоді як поле  $\vec{H}$  – є.

Оскільки рівняння Максвелла також включають намагніченість  $\vec{M}$  разом з LLGE, вони утворюють гібридний набір зв'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних, які повинні бути розв'язані спільно. Повний комплект рівнянь Максвелла є

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}; \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho; \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (5)$$

де зв'язок з LLGE в (1) реалізується через матеріальні співвідношення  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ .

### МАГНІТОКВАЗІСТАТИЧНІ РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

Магнітоквазістатичне наближення, також відоме як наближення вихрових струмів, ґрунтується на нехтуванні струмом зміщення  $\partial \vec{D} / \partial t$  в (3). Можна показати, що це доцільне наближення, коли розмір системи значно перевищує максимальну довжину електромагнітної хвилі [32, 33]. Мале значення струму зміщення означає, що густина заряду  $\rho$  в (4) дорівнює нулю в межах провідних областей. Дійсно, в провідниках густина струму задається як  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , де  $\sigma$  – питома провідність. Тоді, (3) можна записати як

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E}. \quad (6)$$

Взявши дивергенцію від цього рівняння, отримуємо

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho = 0, \quad (7)$$

де застосовано відношення  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ . У припущенні, що вільна густина заряду  $\rho$  поза провідними областями дорівнює нулю, впливає, що рівняння (7) виконується скрізь.

Таким чином, магнітоквазістатичні рівняння Максвелла можуть бути записані через  $\vec{H}$  та  $\vec{E}$  як

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} + \vec{M}); \quad (8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}; \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \quad (10)$$

$$\nabla \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = 0, \quad (11)$$

де використано матеріальне співвідношення  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ . Застосовуючи операцію ротор до (9), пам'ятаючи, що  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , і замінюючи  $\nabla \times \vec{E}$  у (8), одержуємо рівняння дифузії

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \vec{H} - \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla \nabla \cdot \vec{M}, \quad (12)$$

відносно напруженості магнітного поля. Для вихрового струму отримуємо аналогічне рівняння. Коли реакція на намагніченість у магнітному полі лінійна, тобто  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , (12) перетворюється в

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \vec{H}. \quad (13)$$

Тут дифузійна динаміка пов'язана з константою дифузії  $\sigma \mu$ , яка визначає глибину скін-шару та час дифузії.

Перш ніж розпочати розв'язання (8) – (11) для моделювання мікромагнітних явищ, слід зазначити, за яких умов членом  $\partial \vec{B} / \partial t$ , правою частиною в (8) можна знехтувати, обґрунтовуючи магнітостатичне наближення в алгоритмах мікромагнітних симуляторів. Можна показати, що статичні рівняння Максвелла є виправданим наближенням, якщо

$$\frac{\tau_m}{\tau} \ll 1. \quad (14)$$

Тут  $\tau$  є характеристичним часом динаміки системи, а  $\tau_m$  – постійна часу магнітної дифузії, що задається як

$$\tau_m = \sigma \mu L^2, \quad (15)$$

де  $\mu$  – магнітна проникність (або певна міра магнітної проникності для нелінійних задач), а  $L$  – розмір системи. Альтернативно, вводячи характеристичну частоту  $f = 1/\tau$ , ця умова може бути сформульована в термінах глибини скін-шару  $\delta$ :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}} \gg L, \quad (16)$$

тобто статичне наближення до рівнянь Максвелла може застосовуватись, коли глибина скін-шару в провідниках значно більша, ніж їхній розмір. У магнітостатичному наближенні магнітне поле скрізь у просторі в будь-який момент часу може бути розраховане з розподілів намагніченості та густини струму, причому передбачається, що воно буде поширюватись миттєво.

Існує багато проблем при застосуванні статичного наближення, коли в задачі розглядається випадок швидкого намагнічування та містяться провідники з розміром більше ніж кілька сотень нанометрів. Навіть при малих значеннях провідності, вихрові струми можуть суттєво вплинути на динаміку намагнічування, тому важливо врахувати обмеження цього магнітоквазістатичного наближення. Наприклад, для системи розміром  $L = 2$  мкм, провідністю  $\sigma = 1 \times 10^6$  См/м, відносною магнітною проникністю  $\mu_r = 20$ , умова статичної апроксимації виконується, як видно з (16), для частоти 3 ГГц.

### ПОЄДНАННЯ РІВНЯНЬ ЛАНДАУ-ЛІФШИЦА-ГІЛБЕРТА ТА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛА

Рівняння Ландау-Ліфшица-Гілберта (1) розв'язується шляхом інтегрування за часом, використовуючи контрольований за величиною помилки змінний крок та неявну схему на основі формул зворотного диференціювання (BDF) [34]. Його можна записати у формі

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = f \left( t, \vec{M}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right), \quad (17)$$

де  $f$  позначає праву частину (1) і розглядається як нелінійна функція намагніченості. Слід зазначити, що  $\partial \vec{M} / \partial t$  виступає як аргумент функції  $f$  через те, що хоча вона не з'являється явним чином у правій частині (1), з (8) видно, що магнітне поле, яке є частиною  $\vec{H}_{\text{eff}}$ , залежить від  $\partial \vec{M} / \partial t$ .

Чисельний розв'язок (17) включає просторову та часову дискретизацію. Просторова дискретизація базується на використанні кінцево-елементних лінійних базисних функцій на тетраедричній сітці, що

дозволяє забезпечити велику гнучкість при моделюванні складних структур. Дискретизація за часом через BDF дає таке наближення для похідної від часу вектора намагнічування  $\vec{M}$  у час  $t_{n+1}$ :

$$\frac{\partial \vec{M}(t_{n+1})}{\partial t} = \sum_{i=0}^r \alpha_i \vec{M}_{n+1-i}, \quad (18)$$

де  $r$  – це порядок BDF, а  $\alpha_i$  – коефіцієнти, які залежать від значень у попередні проміжки часу. Тут  $\vec{M}_{n+1-i}$  позначає чисельний розв'язок для  $\vec{M}$ , отриманий в момент часу  $t_{n+1-i}$  у вершинах тетраедричної сітки. Отримане рівняння має вигляд

$$\vec{M}_{n+1} = f\left(t_{n+1}, \vec{M}_{n+1}, \sum_{i=0}^r \frac{\alpha_i}{\alpha_0} \vec{M}_{n+1-i}\right) - \sum_{i=1}^r \alpha_i \vec{M}_{n+1-i}. \quad (19)$$

Це рівняння дає стан намагнічування на останньому етапі моделювання. Останній стан намагнічування  $\vec{M}_{n+1-i}$  також з'являється у правій частині, тому це рівняння є нелінійним. Розв'язок (19) вимагає нелінійних ітерацій (за Ньютоном). Ітерації починаються з розрахунку  $\vec{M}_{n+1}^{(0)}$  на основі явної схеми еволюції у часі, і цей розв'язок послідовно коригується:

$$\vec{M}_{n+1}^{(j+1)} = \vec{M}_{n+1}^{(j)} + \delta \vec{M}_{n+1}^{(j)}, \quad (20)$$

де  $\vec{M}_{n+1}^{(j+1)}$  – виправлені розв'язки, а  $\delta \vec{M}_{n+1}^{(j)}$  – корекції, що отримуються шляхом розв'язання лінійної системи

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{M}_{n+1}} \delta \vec{M} = -g\left(t_{n+1}, \vec{M}_{n+1}^{(j)}, \frac{\partial \vec{M}(t_{n+1})^{(j)}}{\partial t}\right), \text{ де } \frac{\partial g}{\partial \vec{M}_{n+1}} - \text{матриця Якобі,}$$

$$g\left(t, \vec{M}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} - f\left(t, \vec{M}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}\right) = 0. \quad (21)$$

Для розв'язання (19) за допомогою (20) - (21) нам потрібно оцінити магнітне поле  $\vec{H}_{n+1}$  на кожній нелінійній ітерації на останньому кроці  $t_{n+1}$ . Наш підхід полягає в тому, щоб обчислити це магнітне поле чисельно, що еквівалентно неявному розв'язанню рівнянь Максвелла. Це реалізовано у вигляді симулятора, який можна розглядати як чорну скриньку, що в якості входних параметрів бере намагніченість  $\vec{M}_{n+1}^{(j+1)}$  та її відповідну похідну за часом  $\sum_{i=1}^r \alpha_i \vec{M}_{n+1-i}$  (18) і видає магнітний поле  $\vec{H}_{n+1}^{(j+1)}$  для використання в (19) - (21). Ця чорна скринька враховує всі можливі електромагнітні взаємодії в межах описаного вище наближення. Наприклад, це може бути простий симулятор статичного поля, як це реалізовано в більшості мікромагнітних симуляторів. Це також може бути повномасштабним електромагнітним симулятором, що спроможний врахувати можливі електромагнітні нелінійності, наприклад, нелінійність провідності. Цей магнітоквазістатичний симулятор на основі інтегральних рівнянь буде описаний далі.

### РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА

Необхідно вирішити питання про значення намагніченості  $\vec{M}$ , яке вважали відомим та отриманим з рівняння LLGE. Кілька різних методів можуть бути використані для розв'язування магнітоквазістатичних рівнянь Максвелла: FEM [35], гібридних FEM, таких як [36], або, як запропоновано тут, метод інтегральних рівнянь. Останній має перевагу в тому, що потрібно лише дискретизувати провідні та магнітні області.

У запропонованому методі інтегрального рівняння магнітоквазістатичні рівняння Максвелла розв'язуються шляхом розкладання електричного та магнітного полів на дві частини

$$\vec{E} = \vec{E}_M + \vec{E}_J \quad (22)$$

і

$$\vec{H} = \vec{H}_M + \vec{H}_J, \quad (23)$$

де електричні та магнітні поля  $\vec{E}_M$  та  $\vec{H}_M$  задовольняють магнітоквазістатичні рівняння Максвелла з намагніченістю  $\vec{M}$  як джерело

$$\nabla \times \vec{E}_M = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H}_M + \vec{M}); \quad (24)$$

$$\nabla \times \vec{H}_M = 0; \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_M = 0; \quad (26)$$

$$\nabla \cdot (\vec{H}_M + \vec{M}) = 0. \quad (27)$$

$\vec{E}_J$  та  $\vec{H}_J$  задовольняють магнітоквазістатичним рівнянням Максвелла з джерелом у вигляді густини струму  $\vec{J}$

$$\nabla \times \vec{E}_J = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}_J}{\partial t}; \quad (28)$$

$$\nabla \times \vec{H}_J = \vec{J}; \quad (29)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_J = 0; \quad (30)$$

$$\nabla \cdot \vec{H}_J = 0. \quad (31)$$

Легко помітити, що поля  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  задовольняють магнітоквазістатичним рівнянням Максвелла (8) – (11).

Оскільки ротор  $\vec{H}_M$  дорівнює нулю,  $\vec{H}_M$  можна записати у вигляді скалярного магнітного потенціалу

$$\vec{H}_M = -\nabla \Phi_M. \quad (32)$$

Підставивши це в (27), отримаємо

$$\nabla^2 \Phi_M = \nabla \cdot \vec{M}, \quad (33)$$

і розв'язком для  $\Phi_M$  є

$$\Phi_M = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\hat{n} \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}', \quad (34)$$

де перший інтеграл – інтеграл по об'єму всього простору, позначений  $V$ , а другий інтеграл – поверхневий інтеграл над межею  $S$  магнітних областей, що виникають внаслідок розриву  $\vec{M}$  [37]. Слід зазначити, що  $\vec{H}_M$  насправді є магнітостатичним полем, яке можна отримати, розв'язавши статичні рівняння Максвелла. Тема обчислення магнітостатичного поля добре висвітлена у [38]. У статичному наближенні поле  $\vec{E}_M$  буде дорівнювати нулю. Проте тут  $\vec{E}_M$  розраховується з урахуванням того, що  $\nabla \cdot \vec{E}_M = 0$ , і це дозволяє записати  $\vec{E}_M$  в термінах електричного векторного потенціалу

$$\vec{E}_M = -\nabla \times \vec{F}. \quad (35)$$

Використання (32) та (35) для заміни  $\vec{H}_M$  і  $\vec{E}_M$  в (24) дає

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla \Phi_M + \vec{M}), \quad (36)$$

що можна переписати як

$$\nabla \left( \nabla \cdot \vec{F} + \mu_0 \frac{\partial \Phi_M}{\partial t} \right) - \nabla^2 \vec{F} = \mu_0 \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}. \quad (37)$$

Зробивши калібровку Лоренца

$$\nabla \cdot \vec{F} + \mu_0 \frac{\partial \Phi_M}{\partial t} = 0, \quad (38)$$

одержимо

$$\nabla^2 \vec{F} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}. \quad (39)$$

Тоді розв'язок для  $\vec{E}_M$  отримує вигляд

$$\vec{E}_M = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\partial \vec{M}(\vec{x}')}{\partial t} \frac{d\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = L_{E_M} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right), \quad (40)$$

де лінійний оператор  $L_{E_M}$  визначається як поєднання операцій ротора та інтеграла по об'єму.

Зважаючи на те, що  $\nabla \cdot \vec{H}_J = 0$ , магнітне поле можна представити у вигляді магнітного векторного потенціалу

$$\vec{H}_J = \nabla \times \vec{A}. \quad (41)$$

Підставляючи це в (29), маємо

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \vec{J}. \quad (42)$$

Вибравши калібровку  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ , перепишемо (42) таким чином:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{J}, \quad (43)$$

розв'язком якого є

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}'. \quad (44)$$

Електричне поле  $\vec{E}_J$  отримується шляхом підстановки (41) в (28), що дає

$$\nabla \times \left( \vec{E}_J + \mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (45)$$

Оскільки ротор величини у дужках дорівнює нулю, його можна виразити як градієнт електричного скалярного потенціалу  $\Phi_J$ , так що

$$\vec{E}_J = -\mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi_J. \quad (46)$$

Використовуючи (46) для заміни  $\vec{E}_J$  в (30) і пам'ятаючи, що в результаті того, що  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ , маємо

$$\nabla^2 \Phi_J = 0. \quad (47)$$

Це рівняння може бути розв'язаним в межах провідників, якщо передбачено відповідну граничну умову. Така гранична умова отримується з вимоги, щоб нормальна складова густини струму  $\vec{J}$  на поверхні провідників була нульовою, тобто  $\hat{n} \cdot \vec{J} = 0$ . Оскільки в середині провідників  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , то це еквівалентно до

$$\hat{n} \cdot \vec{E} = \hat{n} \cdot (\vec{E}_M + \vec{E}_J) = 0 \quad (48)$$

або, використовуючи (46),

$$\frac{\partial \Phi_J}{\partial n} = \hat{n} \cdot \left( \vec{E}_M - \mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \quad (49)$$

Це гранична умова Неймана для (47), яка розв'язується за допомогою FEM всередині кожного індивідуального провідного об'єму. Хоча розв'язок  $\Phi_J$  для цієї задачі визначається лише до постійної, це не породжує проблем, оскільки це є градієнт  $\Phi_J$ , який входить у вираз для  $\vec{E}_J$  в (46).

На цьому етапі слід зазначити, що густина струму  $\vec{J}$  включає в себе обидва джерела струму: заданий струм  $\vec{J}_i$  та індукований вихровий струм  $\vec{J}_{eddy}$ . Корисно розкласти електричне поле  $\vec{E}_J$  на три частини

$$\vec{E}_J = \vec{E}_{J,i} + \vec{E}_{J,eddy} + \vec{E}_{J,M}, \quad (50)$$

де, посилаючись на (46),

$$\vec{E}_{J,i} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{A}_i}{\partial t} - \nabla \Phi_{J,i} = L_{E_i} \left( \frac{\partial \vec{J}_i}{\partial t} \right); \quad (51)$$

$$\vec{E}_{J,eddy} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{A}_{eddy}}{\partial t} - \nabla \Phi_{J,eddy} = L_{E_i} \left( \frac{\partial \vec{J}_{eddy}}{\partial t} \right); \quad (52)$$

$$\vec{E}_{J,M} = -\nabla \Phi_{J,M} = L_{E_{J,M}} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right) \quad (53)$$

з  $\vec{A}_i$  та  $\vec{A}_{eddy}$ , що відповідають магнітному векторному потенціалу (44) з  $\vec{J} = \vec{J}_i$  і  $\vec{J} = \vec{J}_{eddy}$  відповідно, та з  $\Phi_{J,i}$ ,  $\Phi_{J,eddy}$  та  $\Phi_{J,M}$ , що задовольняють (47) з відповідними граничними умовами

$$\frac{\partial \Phi_{J,i}}{\partial n} = -\hat{n} \cdot \mu_0 \frac{\partial \vec{A}_i}{\partial t}; \quad (54)$$

$$\frac{\partial \Phi_{J,eddy}}{\partial n} = -\hat{n} \cdot \mu_0 \frac{\partial \vec{A}_{eddy}}{\partial t}; \quad (55)$$

$$\frac{\partial \Phi_{J,M}}{\partial n} = -\hat{n} \cdot \vec{E}_M, \quad (56)$$

такими, що  $\Phi_J = \Phi_{J,i} + \Phi_{J,eddy} + \Phi_{J,M}$  задовольняє (49).

У (51) - (53) компоненти  $\vec{E}_j$  були записані у вигляді лінійних операторів, які вводяться для зручності та підкреслюють той факт, що компоненти  $\vec{E}_j$  обчислюються за допомогою лінійних операцій відносно часових похідних  $\vec{J}_i$ ,  $\vec{J}_{eddy}$  і  $\vec{M}$ .

Знайшовши вирази для компонент електричного поля  $\vec{E}_M$  та  $\vec{E}_j$ , інтегральне рівняння формуємо для  $\vec{J}_{eddy}$ , використовуючи закон Ома  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , який містить багато компонент

$$\vec{J}_i + \vec{J}_{eddy} = \sigma(\vec{E}_M + \vec{E}_{J,i} + \vec{E}_{J,eddy} + \vec{E}_{J,M}), \quad (57)$$

або, з точки зору лінійних операторів,

$$\vec{J}_i + \vec{J}_{eddy} = \sigma \left[ L_{E_M} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right) + L_{E_M} \left( \frac{\partial \vec{J}_i}{\partial t} \right) + L_{E_M} \left( \frac{\partial \vec{J}_{eddy}}{\partial t} \right) + L_{E_{M,j}} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right) \right]. \quad (58)$$

Використовуючи BDF для дискретизації похідної від часу  $\vec{J}_{eddy}$ , як це було зроблено для  $\vec{M}$  в (18), оцінюючи (58) в момент часу  $t_{n+1}$  та групуючи  $\vec{J}_{eddy,n+1}$ , члени з лівої сторони дають матричне рівняння

$$\vec{J}_{eddy,n+1} - L_{E_j}(\alpha_0 \vec{J}_{eddy,n+1}) = -\vec{J}_i + \sigma \left[ L_{E_M} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right) + L_{E_j} \left( \frac{\partial \vec{J}_i}{\partial t} \right) + L_{E_j} \left( \sum_{i=1}^r \alpha_0 \vec{J}_{eddy,n+1-i} \right) + L_{E_{M,j}} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right) \right]. \quad (59)$$

Використання FEM з лінійними базисними функціями для просторової дискретизації породжує лінійну систему рівнянь виду

$$A \vec{J}_{eddy,n+1} = b, \quad (60)$$

де  $A$  – це матриця, що помножує вектор невідомих  $\vec{J}_{eddy,n+1}$ , а  $b$  – права частина (59), яка включає в себе відомі величини. Зокрема, наближення BDF для похідної від часу  $\vec{M}$ , заданої у (18), включає в себе значення намагніченості на попередніх етапах часу, а також поточне наближення за Ньютоном для  $\vec{M}_{n+1}^{(j)}$  в (20). Лінійна система (60) розв’язується на кожній ньютонівській ітерації нелінійного симулятора LLGE. Оскільки матриця  $A$  – це оператор, визначений через інтеграл по об’єму в поєднанні з розв’язком гармонічної задачі, його коефіцієнти явно не відомі, і ми спираємося на ітеративні методи, такі як узагальнений метод мінімізації залишку GMRES [39]. Об’ємні інтеграли в (34), (40) та (44) можуть оцінюватися за допомогою прискореного адаптивного інтегрального методу, реалізованого в графічному процесорі (GPU) [40].

### РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВОГО МОДЕЛЮВАННЯ

В якості прикладу роботи нелінійної магнітної наноструктури розглянемо схему генератора [41] (рис. 1), який подібний до стандартного генератора релаксаційного типу [42], але містить нелінійну магнітну наноструктуру в якості нелінійного двополюсника  $R_{SV}$  та збуджується коротким імпульсом  $V_S$  гаусової форми із тривалістю 1 нс,  $R_1 = 1000$  Ом,  $C_1 = 0,1$  пФ. Параметри нелінійної магнітної наноструктури: радіус диску 60 нм, товщина магнітного шару 5 нм, намагніченість насичення  $7 \times 10^5$  А/м, крок за часом –  $10^{-15}$  с. Результати числового моделювання роботи генератора, що описується схемою на рис. 1, наведені на рис. 2.

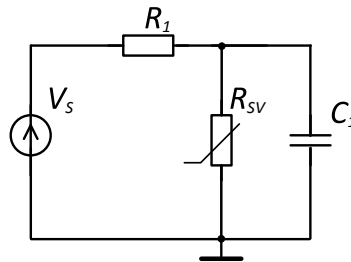


Рис. 1. Принципова схема генератора на нелінійній магнітній наноструктурі  $R_{SV}$ , що збуджується короткими імпульсами наносекундної тривалості  $V_S$

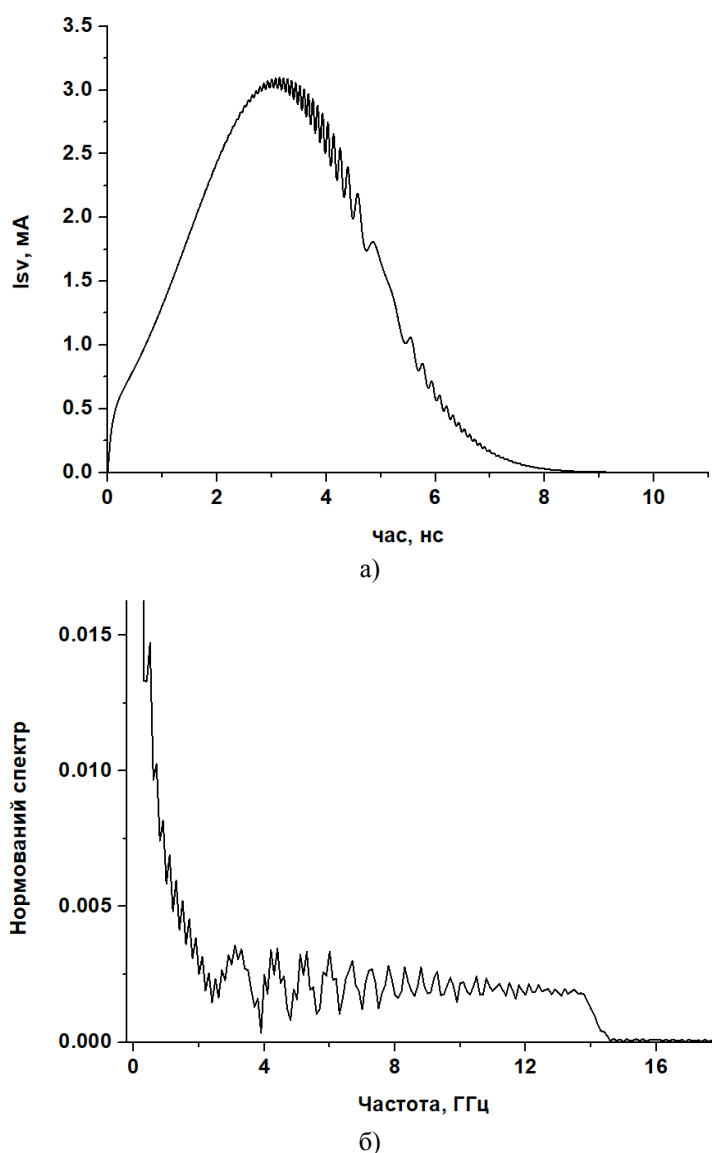


Рис. 2. Часова залежність струму через нелінійну магнітну наноструктуру (а) та її нормований частотний спектр (б)

З рис. 2 видно, що струм через нелінійну магнітну наноструктуру містить, головним чином, збуджуючий наноструктуру імпульс, який промодульований високочастотними коливаннями. Періоди цих коливань змінюються з певним кроком, величина якого добре проілюстрована на графіку нормованого спектру, на якому, для зручності, низькочастотну складову, що превалює і досягає нульової частоти, було обрізано як таку, що нас не цікавить. Наявність нульової частоти в спектрі природна через те, що інтеграл від часової залежності амплітуди струму не дорівнює нулю. Але найбільш практично цінним результатом є поява саме високочастотних коливань у спектрі, природа яких напряму не пов'язана із параметрами зовнішнього електричного кола генератора, а пояснюється складними процесами у нелінійному елементі. Подальша оптимізація параметрів збудження і підмагнічування наноструктури буде спрямована на отримання ще більш високих частот у спектрі струму та збільшення їхньої потужності.

### ВИСНОВКИ

Запропонований підхід синергетичної взаємодії програмно відокремлених симуляторів для розрахунку рівняння Ландау-Ліфшиця-Гільберта та рівнянь Максвелла як моделі для вивчення нелінійних магнітних наноструктур показав свою ефективність. Проведене врахування вихрових струмів у шаруватому середовищі у квазістатичному наближенні дозволило спростити числову реалізацію цього підходу. Числовий розрахунок процесів у зовнішньому електричному колі генератора та в наноструктурі



продемонстрував появу високочастотних складових у вихідному струмі, яка пояснюється складною взаємодією струмів, що протікають, та мікромагнітних явищ.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Zhu X. and Zhu J.-G. Bias-Field-Free microwave oscillator driven by perpendicularly polarized spin current // *IEEE Transactions on Magnetics*. – Oct. 2007. – V.42, N10. – P.2670–2672.
2. Zhu J.-G., Zhu X., Tang Y. Microwave assisted magnetic recording // *IEEE Transactions on Magnetics*. – Jan. 2008. – V.42, N1. – P.125–131.
3. Zhu J.-G. and Zhu X. Spin transfer induced noise in CPP read heads. // *IEEE Transactions on Magnetics*. – Jan. 2004. – v.40, N1. – P.182–188.
4. Choi H. S. et al. Spin-nano-oscillator-based wireless communication // *Scientific Reports*. – June 2014. – V.4. – P.5486.
5. Zeng Z., Finocchio G., and Jiang H. Spin transfer nano-oscillators // *Nanoscale*. – Oct. 2013. – V.5, N.6. – P.2219–2231.
6. Slonczewski J. C. Current-driven excitation of magnetic multilayers // *J. Magn. Magn. Mater.* – June 1996. – V.159, N.1–2. – P. L1–L7.
7. Berger L. Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current // *Phys. Rev. B*. – Oct. 1996. – V.54, N.13. – P.9353–9358.
8. Myers E. B., Ralph D. C., Katine J. A., Louie R. N. and Buhrman R. A. Current-induced switching of domains in magnetic multilayer devices // *Science*. – Aug. 1999. – V.285, N.5429. – P.867–870.
9. Katine J. A., Albert F. J., Buhrman R. A., Myers E. B. and Ralph D. C. Current-driven magnetization reversal and spin-wave excitations in Co/Cu/Co pillars // *Phys. Rev. Lett.* – Apr. 2000. – V.84, N.14. – P.3149–3152.
10. Thiaville A., Nakatani Y., Miltat J. and Suzuki Y. Micromagnetic understanding of current-driven domain wall motion in patterned nanowires // *Europhys. Lett.* – March 2005. – V.69, N.6. – P.990–996.
11. Couture S., Chang R., Volvach I., Goncharov A. and Lomakin V. Coupled finite-element micromagnetic-integral equation electromagnetic simulator for modeling magnetization-eddy currents dynamics // *IEEE Transactions on Magnetics*. – December 2017. – V.53, N.12.
12. Volvach I., Kuteifan M., Lubarda M.V. and Lomakin V. Circuit-Integrated Micromagnetic Modeling of MRAM Devices // 62-nd Annual Conference on Magnetism and Magnetic Materials. – Pittsburgh, Pennsylvania. – November 6-10, 2017. – P.658.
13. Kuteifan M., Volvach I. and Lomakin V. Forward Flux Sampling Method with Spin Transfer Torque for the Calculation of Thermal Relaxation Times of Free Layers // 62-nd Annual Conference on Magnetism and Magnetic Materials. – Pittsburgh, Pennsylvania. – November 6-10, 2017. – P.659.
14. Volvach I., Kuteifan M., Marko V. Lubarda and Lomakin V. Circuit-Integrated Micromagnetic Modeling of MRAM Devices // Special joint poster session on MRAM, IEEE 63-rd International Electron Devices Meeting IEDM. – San Francisco, California. – December 4–7, 2016.
15. Volvach I., Kuteifan M., Lubarda M. V. and Lomakin V. Integrating FastMag with NGSPICE Framework // Research Review & Advisory Council Meeting (CMRR). – San Diego, California. – May 18-19, 2017. – P.19.
16. Donahue M. J. and Porter D. G. OOMMF user's guide // *Nat.Inst. Standards Technol.* – Gaithersburg, MD, USA, Sep. 1999. – Interagency Rep.NISTIR 6376.
17. Fu S., Cui W., Hu M., Chang R., Donahue M. J. and Lomakin V. Finite-Difference Micromagnetic Solvers With the Object-Oriented Micromagnetic Framework on Graphics Processing Units // in *IEEE Transactions on Magnetics*. – April 2016. – V.52, N.4, P.1–9.
18. Vansteenkiste A. and Wiele B. V. MuMax: a new high performance micromagnetic simulation tool // *J. Magn. Magn. Mater.* – Nov. 2011. – V.323, N.21. – P.2585–2591.
19. Lopez-Diaz L., Aurelio D., Torres L., Martinez E., Hernandez-Lopez M. A., Gomez J., Alejos O., Carpentieri M., Finocchio G. and Consolo G. Micromagnetic simulations using Graphics Processing Units // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – July 2012. – V.45, N.32. – 323001.
20. Recio G. and Estebanez C. Micromagnetic modeling on magnetization dynamics with lossy magnetic material in thin film heads by FDTD calculations // *Appl. Comput. Electrom.* – Sept. 2012. – V.27, N.9. – P.717–725.
21. Fischbacher T., Franchin M., Bordignon G. and Fangohr H. A systematic approach to multiphysics extensions of finite-element-based micromagnetic simulations: Nmag // *IEEE Trans. Magn.* – June 2007. – V.43, N.6. – P.2896–2898.

22. Scholz W., Fidler J., Schrefl T., Suess D., Dittrich R., Forster H., Tsiantos V. Scalable parallel micromagnetic solvers for magnetic nanostructures // *Comp. Mater. Sci.* – Oct. 2003. – V.28, N.2. – P.366–383.
23. Kakay A., Westphal E. and Hertel R. Speedup of FEM micromagnetic simulations with Graphical Processing Units // *IEEE Trans. Magn.* – June 2010. – V.46, N.6. – P.2303–2306.
24. Chang R., Li S., Lubarda M. V., Livshitz B. and Lomakin V. FastMag: Fast micromagnetic simulator for complex magnetic structures (invited) // *Journal of Applied Physics.* – 2011 – V.109. – 07D358.
25. Scheinfein M. R. LLG Micromagnetics Simulator. – 2008 – [Online]. Available: <http://llgmicro.home.mindspring.com>
26. Takano K., Salhi E.-A., Sakai M., and Dovek M. Write head analysis by using a parallel micromagnetic FEM // *IEEE Trans. Magn.* – Oct. 2005. – V.41. – P.2911–2913.
27. Donahue M. Parallelizing a micromagnetic program for use on multiprocessor shared memory computers // *IEEE Trans. Magn.* – Oct. 2009. – V.45, N.10. – P.3923–3925.
28. Fu S., Cui W., Hu M., Chang R., Donahue M. J. and Lomakin V. Finite difference micromagnetic solvers with object oriented micromagnetic framework (OOMMF) on Graphics Processing Units // *IEEE Trans. Magn.* – 2016.
29. Chang R., Escobar M. A., Li S., Lubarda M. V. and Lomakin V. Accurate evaluation of exchange fields in finite element micromagnetic solvers // *Journal of Applied Physics.* – 2012. – V.111. – 07D129.
30. Escobar M. A., Lubarda M. V., Li S., Chang R., Livshitz B. and Lomakin V. Advanced micromagnetic analysis of write head dynamics using Fastmag // *IEEE Trans. Magn.* – May 2012. – V.48, N.5, P.1731–1737.
31. Brown W. F. *Micromagnetics.* – New York, NY, USA: Interscience. – 1963.
32. Haus H. A. and Melcher J. R. *Electromagnetic Fields and Energy.* – Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall. – 1989.
33. Koenpfe H. E. *Magnetic Fields.* – Hoboken, NJ, USA: Wiley. – 2000.
34. Brown P. N., Byrne G. D. and Hindmarsh A. C. VODE: A variable coefficient ODE solver // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* – 1989. – V.10, N.5, P.1038–1051.
35. Jin J.-M. *The Finite Element Method Electromagnetics.* – Hoboken, NJ, USA: Wiley. – 2014.
36. Bossavit A. and Verite J.-C. A mixed FEM-BIEM method to solve 3-D eddy-current problems // *IEEE Trans. Magn.* – Mar. 1982. – V.MAG–18, N.2, P.431–435.
37. Jackson J. D. *Classical Electrodynamics.* – Hoboken, NJ, USA: Wiley. – 1999.
38. Fredkin D. R. and Koehler T. R. Hybrid method for computing demagnetizing fields // *IEEE Trans. Magn.* – Mar. 1990. – V.26, N.2, P.415–417.
39. Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems.* – Philadelphia, PA, USA: SIAM. – 2003.
40. Bleszynski E., Bleszynski M. and Jaroszewicz T. AIM: Adaptive integral method for solving large-scale electromagnetic scattering and radiation problems // *Radio Sci.* – Sep. 1996. – V.31, N.5, P.1225–1251.
41. Volvach I., Lubarda M.V. and Lomakin V. SPICE modeling coupled with LLG equation // *Conference on Material Science and Engineering.* – University of California, San Diego, San Diego, CA.
42. Чеботарев В.И., Думин А.Н., Холодов В.И. Генераторы электрических колебаний. Учебно-методическое пособие по основам радиоэлектроники для самостоятельной работы студентов физических специальностей / Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2007, 84 с. 7