

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DE LA POPULATION DES VILLES

A. P. Golikov,

docteur en sciences géographiques, prof.
Université Nationale de Kharkiv – V. N. Karazin

Modélisation mathématique de la population des villes. La possibilité d'utiliser un modèle mathématique empirique permettant de prédire la taille de la population de la population urbaine du pays est examinée. La taille de la population sur la croissance des villes, qui représentent des centres commerciaux, permet la planification de la production, la demande et la consommation des biens et services.

Tags: ville, la population, le modèle, l'équation, des perspectives.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЛЮДНОСТІ МІСТ

Розглядається можливість використання емпіричної математичної моделі для прогнозування людності населення міст країни. За зростанням людності міст, які є ринковими центрами, стає можливим планування виробництва, попиту і споживання товарів і послуг.

Ключові слова: місто, людність, модель, перспективи, рівняння.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛЮДНОСТИ ГОРОДОВ

Рассматривается возможность использования эмпирической математической модели для прогнозирования людности населения городов страны. По росту людности городов, которые являются рыночными центрами, возможно планирование производства, спроса и потребления товаров и услуг.

Ключевые слова: город, людность, модель, перспективы, уравнение.

L'économie de marché, en dépit de la liberté d'entreprise et la concurrence féroce, a besoin de la programmation et de la planification. Leur efficacité dépend des calculs à long terme de la production, de l'offre et de la demande pour divers types des biens et services. Les calculs peuvent être basés sur la modélisation économique et mathématique. On peut se servir d'un exemple, il s'agit de l'équation mathématique empirique proposée par le scientifique américain Zipf et améliorée par le scientifique soviétique Y. Medvedkov.

Les grandes villes, en particulier, appartiennent aux objets les plus importants recherchés par le marketing en qualité des centres commerciaux. Cela peut être expliqué par leur rôle de premier plan dans la vie économique, politique et culturelle des pays et des régions. En se basant sur l'hypothèse qui dit, que la capacité du marché est proportionnelle au nombre d'habitants, il est possible, en se basant sur les tendances démographiques de la population, pour faire des prévisions sur les volumes des ventes. Leurs calculs nécessitent l'utilisation de la modélisation économique et mathématique.

Le modèle en question est basé sur l'hypothèse proposée par le scientifique américain Zipf, qui affirme que pour certains systèmes de villes (pays ou région) il existe une relation spécifique entre la population de la ville et son numéro de série dans l'ordre décroissant (ou croissant) la population dans la ville sous forme de l'équation suivante:

$$H_j = H_1 \cdot j^{-a} \quad (1)$$

où H_j – population de la j -ème ville;

H_1 – population de la plus grande ville selon le nombre d'habitants;

a – coefficient de contraste, typique de certains systèmes concrètes des villes.

Sur la base de cette hypothèse et admissions, que la demande du marché est proportionnelle au nombre d'habitants, il est possible de déterminer la demande d'achat de n'importe quel système de villes, sachant son numéro d'ordre et le nombre d'habitants de la plus grande ville.

Par exemple, pour les villes des États-Unis, où le coefficient de contraste peut être égale à 1. Alors à partir de la formule (4.2) il résulte que le nombre d'habitants de la plus grande ville est $\text{New York} = 15 \cdot 1^{-1} = \frac{15}{1} = 15$;

$$2\text{-ème} : \text{Chicago} = 15 \cdot 2^{-1} = \frac{15}{2} = 7.5 ;$$

$$3\text{-ème} : \text{Los Angeles} = 15 \cdot 3^{-1} = \frac{15}{3} = 5 \text{ etc.}$$

Cela correspond à la réalité, mais en pratique cette coïncidence est rare.

En règle générale, l'existence des lois découvertes par Zipf sont superposées des certains facteurs, on les déforme fortement, ce qui entraîne dans les certains nombres de cas, à première vue, il ne peut pas être tracée. Cependant, cette tendance est réelle. Son existence objective est confirmée par de nombreux travaux du scientifique Soviétique – Y. Medvedkov (et plus tard Américain), qui a effectué ses recherches appropriées sur le système des villes dans 85 pays du monde, prises par échantillonnage aléatoire, lorsque la taille de l'échantillon est égale à 14 %.

Le modèle de Zipf sur les tendances dans les dimensions des villes d'un certain système peut être représenté graphiquement dans un système de coordonnées rectangulaires dans lequel l'axe des X aura une conservation du numéro de séquence des villes (j), et sur l'axe des Y sont présentés leurs coefficients de la population (H_j) [2].

Si on prend par exemple le système des villes en Pologne [3] et on essaie de les distribuer par ordre décroissant du nombre d'habitants du système de coordonnées spécifiés. Alors on obtient une vue du graphique représenté sur la figure 1.

Malheureusement, pour toute sa clarté et simplicité, ce graphique comprend de graves défauts. L'échelle linéaire sur l'axe des Y montre bien la différence de la population seulement pour la première dizaine de villes (les grandes villes). Les autres valeurs H_j ne peuvent pas être comparés, puisque leurs points se fusionnent sur le graphique. Et en effet, la courbe $H_1 \dots H_j$, ayant une forme compliquée, ne permet pas l'étude de la dépendance entre les valeurs de j et H_j .

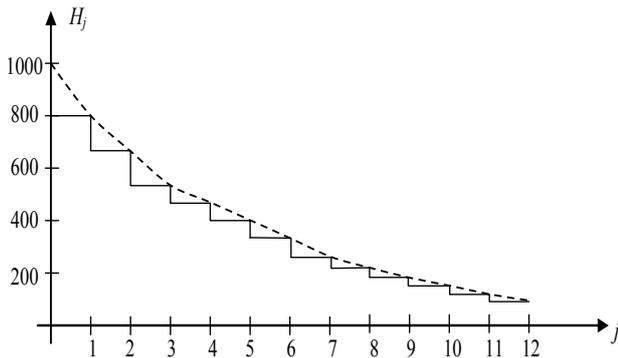


Figure 1. La population des villes en Pologne

Il est préférable de transformer ce graphique, remplaçant l'échelle linéaire par la logarithmique. Cela évite la construction d'un grand graphique et donne la possibilité de présenter la dépendance de j H_j sous forme manière linéaire, comme le montre le graphique ci-dessous (fig. 2)

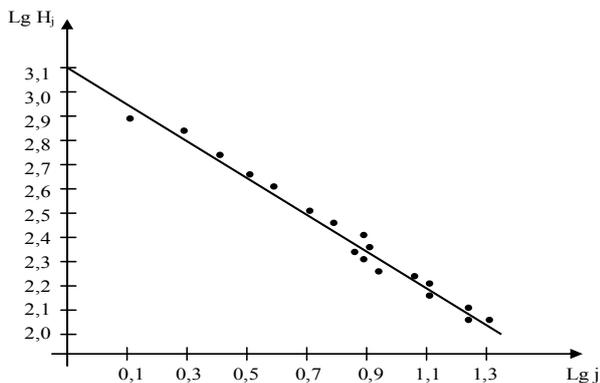


Figure 2. La population des villes en Pologne sur une échelle logarithmique

Le graphique montre que la chaîne H_j est tiré vers le domaine logarithmique est presque en ligne droite. Au niveau des coordonnées du système rectangulaire, la position de cette ligne (rapprochement de la valeur H_j) est caractérisée par l'équation $Y = C - KX$ (dépendance décroissante).

La valeur de C sur le graphique correspond à l'interception de l'axe de Y le segment de ligne, à savoir le secteur OC. Le coefficient angulaire K : exprimé par la tangente de l'angle de la droite de l'axe des X.

En raison du fait que les axes ont une échelle logarithmique peut en remplaçant l'équation de la ligne au lieu de X, Y équivalents valeurs logarithmiques obtenir C:

$$\lg H_j = \lg C - K \lg j$$

Par potentialisation (action, logarithmes inverses) on transforme cette équation en une fonction de puissance suivante:

$$H_j = C \cdot j^{-k} \quad (2)$$

Pas difficile de voir que l'équation (2) est proche dans la forme à l'équation $H_j = H_1 \cdot j^{-a}$, déduit par Zipf, en supposant: $C = H_1$ et $K = a = 1$.

A partir de la figure 2. il est clair que la relation entre le nombre d'habitants des villes et leur numéro de séquence est le caractère de corrélation. De plus, en règle générale, et. En particulier, dans les systèmes étudiés des villes par Y. Medvedkov de 12 pays en tout cas il n'y avait pas de relations prises par Zipf. Par exemple, pour l'Italie C avec un tiers moins que H_1 , le Chili : 2,7 fois plus, et un indicateur de degré a et varie de : 1629 (l'Autriche) à 0,788 (RPC).

Pour rendre ces caractéristiques plus importantes, par Y. Medvedkov l'équation Zipf est transformée sous la forme suivante:

$$H_j = K \cdot H_1 \cdot j^{-a} \quad (3)$$

où H_j – nombre d'habitants de la j -ème ville du système;
 H_1 – nombre d'habitants de la plus grande ville dans le système;

j – numéro de série de la ville par ordre de taille décroissant de la population;

a – coefficient de mesure de contraste de la taille de la ville;

K – «coefficient de supériorité» de la ville principale, qui est le rapport, où C – la principale taille de la population de la ville (centre commercial important du pays), ce qui en théorie devrait être soumis à la répartition de la taille de la population des tendances des villes selon l'hypothèse Zipf.

Un complément nécessaire à l'équation (3) est le coefficient de corrélation (R), la valeur absolue des différences qui peuvent être vues entre la tendance générale du système et les dimensions réelles des centres séparés. L'équation Y. Medvedkov avec un coefficient de corrélation est un modèle mathématique de la structure des villes (mais pas n'importe quelle combinaison aléatoire des colonies, mais seulement les colonies qui sont évidemment étroitement liées les unes aux autres et qui forment un cadre de soutien du pays).

Pour tous les pays où existe la production des produits de base, les relations de marché sont basées sur la division territoriale du travail. Les villes possèdent une influence mutuelle les unes des autres comme les centres commerciaux. Les fonctions des nouvelles villes construites de négociation et de distribution se répartissent de la façon suivante : entre eux de manière à ce que la désignation de l'avant de l'un d'eux reflète inévi-

tablement dans l'autre. En ce sens, le calcul du modèle mathématique (4), suivie d'une analyse des résultats d'intérêt pratique pour l'étude des activités de négociation, y compris le commerce extérieur. En outre, il peut être utilisé dans la préparation des prévisions scientifiques de la demande et la fourniture de certains biens et services dans les villes et les régions de chaque pays.

Le problème du calcul de l'équation (3) se réduit à déterminer les valeurs de a et C , ainsi que le coefficient de corrélation R .

Comme exemple de ce genre de calculs, nous prenons le système des centres commerciaux en Pologne (les plus grandes colonies avec une population de plus de 100 000 habitants : tabl. 1).

Le calcul pour les trois paramètres déterminants de a et

$$a = \frac{B}{D} = \frac{-60.6}{88.8} = -0.7$$

$$C. \lg C = \frac{A}{D} = \frac{274.4}{88.8} = 3.08$$

Potentialisant la valeur du $\lg C$, on obtient sa valeur absolue $C = 1202$. Cette taille de la population devrait théoriquement être attribuée à la plus grande ville dans le système. Cette valeur s'écarte de la réelle pour des raisons socio-historiques spécifiques et les erreurs dans le calcul étaient basées sur des données périmées.

Tableau 1

Exemple de calcul

$\lg j$	$(\lg j)^2$	$\lg j \times \lg H_j$	j	H_j	$\lg H_j$	$\Delta \lg H_j$	$(\Delta \lg H_j)^2$	$\Delta \lg j$	$\Delta \lg j \times \Delta \lg H_j$	$(\Delta \lg j)^2$
0,000	0,000	0,000	1	1,388	3,142	+0,736	0,547	-0,990	-0,732	0,980
0,301	0,091	0,869	2	761	2,892	+0,486	0,230	-0,691	-0,331	0,490
0,477	0,227	1,328	3	657	2,817	+0,411	0,168	-0,513	-0,209	0,260
0,602	0,362	1,646	4	560	2,748	+0,342	0,116	-0,388	-0,129	0,152
0,699	0,489	1,878	5	499	2,698	+0,292	0,084	-0,291	-0,084	0,085
0,778	0,605	2,005	6	398	2,600	+0,194	0,036	-0,212	-0,040	0,044
0,845	0,714	2,149	7	358	2,554	+0,148	0,023	-0,145	-0,023	0,022
0,903	0,815	2,248	8	319	2,504	+0,098	0,008	-0,087	-0,007	0,010
0,954	0,910	2,327	9	308	2,488	+0,082	0,006	-0,036	-0,003	0,001
1,000	1,000	2,408	10	256	2,408	+0,002	0,000	+0,010	0,000	0,000
1,041	1,084	2,412	11	209	2,320	-0,086	0,008	+0,051	-0,004	0,003
1,079	1,886	2,484	12	201	2,308	-0,103	0,010	+0,089	-0,010	0,008
1,119	1,254	2,553	13	194	2,287	-0,119	0,014	+0,129	-0,022	0,016
1,146	1,323	2,622	14	193	2,285	-0,121	0,014	+0,156	-0,018	0,026
1,176	1,392	2,644	15	185	2,267	-0,139	0,019	+0,186	-0,025	0,036
1,204	1,450	2,700	16	178	2,250	-0,156	0,025	+0,214	-0,031	0,044
1,230	1,512	2,730	17	167	2,222	-0,184	0,032	+0,240	-0,043	0,057
1,255	1,587	2,770	18	154	2,187	-0,219	0,048	+0,265	-0,054	0,067
1,278	1,612	2,768	19	148	2,170	-0,236	0,057	+0,288	-0,067	0,078
1,301	1,690	2,821	20	147	2,167	-0,239	0,057	+0,311	-0,074	0,096
1,322	1,742	2,824	21	140	2,146	-0,260	0,067	+0,332	-0,085	0,109
1,342	1,795	2,867	22	140	2,146	-0,260	0,067	+0,352	-0,091	0,122
1,361	1,849	2,856	23	127	2,103	-0,303	0,090	+0,371	-0,110	0,137
1,380	1,904	2,842	24	115	2,060	-0,340	0,115	+0,390	-0,132	0,152
23,803	27,293	54,751			57,764	+2,791 -2,765	1,841	+3,384 -3,353	-2,324	2,956

$$\lg \bar{j} = 0,99$$

$$\lg H_j = 2,41$$

La nature des calculs est réduite à des colonnes de remplissage 4 et 5 des données d'origine (j et H_j), la détermination des valeurs de leurs logarithmes, le calcul fonctionne $\lg j \times H_j$ et l'addition des résultats des colonnes remplies.

Ensuite, les composantes du système d'équations qui est résolue au moyen des «moindres carrés».

$$\begin{cases} n \lg C + a \sum_1^n \lg j = \sum_1^n \lg H_j \\ \lg C \cdot \sum_1^n \lg j + a \sum_1^n (\lg j)^2 = \sum_1^n \lg j \cdot \lg H_j \end{cases}$$

Le système est résolu par les règles habituelles: la substitution mutuelle ou addition et la soustraction après avoir amené les membres à la même espèce. La façon la plus simple de résoudre est: le calcul de déterminants (déterminants). Dans ce système il y a trois déterminants.

Cependant, le calcul du coefficient de corrélation selon la formule

$$R = \frac{\sum XY - \overline{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}, \text{ où}$$

X et $Y = \lg j$ et $\lg H_j$

indique l'existence d'une relation entre la dimension des principales villes et d'autres villes.

Il faut déterminer les valeurs moyennes arithmétiques

et $\lg \bar{H}_j$:

$$\lg \bar{j} = \frac{23.803}{24} = 0.99; \lg \bar{H}_j = \frac{57.764}{24} = 2.41.$$

Dans le graphique 7 on montre tous les écarts $\Delta \lg H_j (\lg H_j - \lg \bar{H}_j)$, au niveau du 8 cadre de ces valeurs, et on remplit le 9 et le 11 graphiques relativement aux valeurs des $\lg j$.

En multipliant dans les lignes le 7 et le 9 graphes, on obtient la valeur $\sum_1^n \Delta \lg j \cdot \Delta \lg H_j$

Qu'on apporte au 10 graphe. La somme de la valeur obtenue, divisées par le nombre de villes (24) donne un moment central mixte.

$$M_{1/1} = \frac{\sum_1^n \Delta \lg j \cdot \Delta \lg H_j}{n} = \frac{+2,324}{24} = 0,096.$$

Par la somme des chiffres du 8ème et 11ème graphes on calcule les écarts types standards pour la série:

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta \lg j)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2,956}{23}} = 0,358;$$

$$\sigma_{H_j} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta \lg H_j)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1,841}{23}} = 0,283.$$

Sachant $M_{1/1}$, σ_j , σ_{H_j} on détermine le coefficient de corrélation :

$$R = \frac{M_{1/1}}{\sigma_j \cdot \sigma_{H_j}} = \frac{0,096}{0,358 \cdot 0,283} = 0,950.$$

La valeur R résultant 0950 est proche de 1, indique une grande connexion entre les séries j et H_j , et confirme donc pour la Pologne, la manifestation de la taille de la population, en fonction de leurs classements des villes.

En supposant que la taille de la population en 2025 atteindra 3,5 millions hab. à Varsovie, en remplaçant dans l'équation (4) k , a et H_j , nous pouvons calculer la taille prospective de la population d'autres grandes des villes du pays, et sur cette base : la demande pour divers types de biens et services.

Nos calculs montrent que l'augmentation du nombre d'habitants à Varsovie pour 3,5 millions de personnes sera une augmentation correspondante dans d'autres villes principales (tabl. 2).

Tableau 2

Projection de la population des plus grandes villes en Pologne

№	Villes	Taille de la population en 2010, million. pers.	Taille prévue de la population d'ici 2025, million. pers.
1	Varsovie	1,720	3,5
2	Cracovie	0,756	1,831
3	Lodz	0,737	1,379
4	Wroclaw	0,633	1,127
5	Poznan	0,552	0,964
6	Gdansk	0,457	0,848
7	Szczecin	0,405	0,762

Conclusions. L'obtention des données de prévisions sur la population des villes dans un pays pour une période donnée, permet de calculer la future demande pour divers types de biens et services, et de préparer auparavant la production de l'infrastructure pour sa satisfaction.

La littérature

1. Голюков А. П. Економіко-математичне моделювання світогосподарських процесів. : навч. посіб. / А. П. Голюков. — 3-тє вид. — К. : Знання, 2009. — 222 с.
2. Изард. У. Методы регионального анализа / У. Изард. — М. : Изд.-во «Прогресс», 1966. — 659 с.
3. Города Польши [Электронный ресурс]. — Режим доступа : http://ru.wikipedia.org/wiki/Города_Польши.