

**ПОСЛІДОВНЕ ВИЯВЛЕННЯ ЗМІН ВЛАСТИВОСТЕЙ ЧАСОВИХ РЯДІВ  
ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ОЗНАК ЛАТЕНТНИХ РОЗКРАДАНЬ**

У сучасних умовах досить гостро постає необхідність підвищення ефективності боротьби з розкраданнями у сфері виробництва, особливо тими, що здійснюються замаскованими способами та залишаються на протязі певного часу нерозкритими - латентними. Складний характер виробництва обумовив різноманіття підходів та методик виявлення латентних розкрадань, серед яких найбільш ефективними є підходи, що базуються на економіко-математичному моделюванні [1]. На жаль, цей підхід і сьогодні ще не отримав достатнього розвитку. Основна ідея тут полягає в аналізі за допомогою ЕОМ можливих протиріч у техніко-економічних показниках господарсько-фінансової діяльності об'єкту дослідження, що сигналізують про можливі негативні явища, у тому числі і про розкрадання. Вихідна інформація при цьому зображується у формі часових рядів, за допомогою яких можна встановити тенденції розвитку окремих показників та виявити об'єктивно існуючі взаємозв'язки між ними. Саме на основі цих рядів і будуються економіко-математичні моделі. При цьому важливо відзначити, що у відповідність вихідному масиву даних може бути поставлено не одну, а декілька конкуруючих моделей; деякі з них описують роботу об'єкта у нормальному режимі, а інші - у аномальному.

У зв'язку із тим, що техніко-економічні показники у більшості своїй мають випадковий характер, адекватним математичним апаратом для побудови моделей є методи математичної статистики та теорії адаптивних систем, що працюють в умовах дефіциту інформації. Спроби використати апарат адаптивних систем у задачах виявлення латентних розкрадань були вперше, мабуть, зроблені Матусовським Г.А., Плісс І.П. та ін., [2, с.48-52, 3, с.71-75] при цьому проблему було сформульовано як задачу розпізнавання образів на основі самонавчання. Такий підхід, однак, потребує досить великих об'ємів вибірок.

На наш погляд, проблему визначення можливих негативних явищ на основі аналізу рядів техніко-економічних показників можна розглядати як задачу послідовного виявлення розладок у ймовірних процесах.

Для вирішення цієї проблеми широке розповсюдження одержав багатомодельний підхід [4], суть якого полягає в тому, що контрольований часовий ряд порівнюється з послідовностями, що отримані за допомогою групи математичних моделей, кожна з котрих базується на своїй конкретній гіпотезі  $H_j$ ,  $j=1,2,\dots,g$ , щодо можливих змін у об'єкті. Цьому підходу притаманна низка суттєвих недоліків, що обмежують його використання у задачах з малим об'ємом апріорної інформації, у зв'язку з чим у цій статті запропоновано адаптивний багатомодельний підхід, призначений для роботи з малими вибірками з невідомими статистичними характеристиками.

Нехай контрольовану послідовність задано у формі  $y(t)$ ,  $t=1,2,\dots,n,\dots$ , а сигнал на виході  $j$  моделі  $-y_j(t)$ ,  $j=1,2,\dots,g$ . Введемо до розгляду багатомодельну відфільтровану послідовність

$$\hat{y}(t) = \sum_{j=1}^g c_j \hat{y}_j(t) = C^T \hat{Y}(t),$$

де  $C = (c_1, c_2, \dots, c_g)^T$  -  $g$ -вимірний вектор невідомих вагових коефіцієнтів, які визначають близькість рядів  $\hat{y}_j(t)$  до реального процесу  $y(t)$  та відповідають умові незміщеності  $E^T C = 1$ , де  $E$  -  $g$ -вимірний вектор, що складається з одиниць;  $\hat{Y}(t) = (\hat{y}_1(t), \hat{y}_2(t), \dots, \hat{y}_g(t))^T$ ;  $t$  - поточний дискретний час;  $T^{\sim}$  символ транспонування.

Невідомий вектор вагових коефіцієнтів визначимо за допомогою методу невизначених множників Лагранжу, для чого введемо до розгляду відновлюючу послідовність

$$\begin{aligned} W(t) &= y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - C^T \hat{Y}(t) = C^T E y(t) - C^T \hat{Y}(t) = \\ &= C^T (E y(t) - \hat{Y}(t)) = C^T V(t), \end{aligned}$$

Побудуємо лагранжіан

$$\begin{aligned} L(C, \lambda) &= \sum_{t=1}^n C^T V(t) V^T(t) C + \lambda (C^T E - 1) = \\ &= C^T R(t) C + \lambda (C^T E - 1) \end{aligned} \quad (1)$$

та розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \nabla_C L(C, \lambda) = 2R(t)C + \lambda E = 0 \\ \frac{\partial L(C, \lambda)}{\partial \lambda} = C^T E - 1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Тут

$$V(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) - \hat{y}_1(t) \\ y(t) - \hat{y}_2(t) \\ \vdots \\ y(t) - \hat{y}_q(t) \end{bmatrix};$$

$$R(t) = \sum_{t=1}^n V(t)V^T(t);$$

$\lambda$  - невизначений множник Лангранжа.

Розв'язок системи рівнянь (2) можливо записати так:

$$\begin{aligned} C &= R^{-1}(t)E(E^T R^{-1}(t)E)^{-1}, \\ \lambda &= -2(E^T R^{-1}(t)E)^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

При цьому лагранжіан (1) у сідловій точці має значення

$$L^*(C, \lambda) = (E^T R^{-1}(t)E)^{-1}.$$

Для того, щоб продемонструвати оптимальність здобутого рішення, розглянемо будь-яку двійку векторів  $X$  та  $Z$  і запишемо очевидну нерівність

$$\begin{aligned} (X^T Z)^2 &= (X^T R^{\frac{1}{2}}(t)R^{-\frac{1}{2}}(t)Z)^2 = ((R^{\frac{1}{2}}(t)X)^T (R^{-\frac{1}{2}}(t)Z))^2 \leq \\ &\leq \left\| R^{\frac{1}{2}}(t)X \right\|^2 \left\| R^{-\frac{1}{2}}(t)Z \right\|^2 = (X^T R(t)X)(Z^T R^{-1}(t)Z). \end{aligned} \quad (4)$$

Введемо далі двимірний вектор  $E_j$ , утворений нулями, крім  $j$ -ї позиції, на котрій стоїть одиниця, та перепишемо нерівність (4) у такому вигляді:

$$(E^T E_j)^2 \leq (E_j^T R(t)E_j)(E^T R^{-1}(t)E),$$

звідки маємо

$$1 \leq R_{jj}(t)(E^T R^{-1}(t)E)$$

або

$$R_{jj}(t) = \sum_{t=1}^n (y(t) - \hat{y}_j(t))^2 = \sum_{t=1}^n V_j^2(t) \geq (E^T R^{-1}(t) E)^{-1} = L^*(C, \lambda). \quad (5)$$

З формули (5) маємо, що багатомодельна послідовність не поступається за точністю найкращому з  $\hat{y}_j(t)$ , при чому, чим точніше  $j$ -та модель стежить за послідовністю  $y(t)$ , тим більше відповідне значення  $c_j$ .

Щоб забезпечити контроль за змінами послідовності  $y(t)$  у режимі реального часу, тобто визначити розладку, вираз (3) можна подати у рекурентному вигляді

$$R^{-1}(t) = R^{-1}(t-1) - \frac{R^{-1}(t-1)V(t)V^T(t)R^{-1}(t-1)}{1 + V^T(t)R^{-1}(t-1)V(t)}; \quad (6)$$

$$C(t) = R^{-1}(t)E(E^T R^{-1}(t)E)^{-1}.$$

При цьому розладки, що виникають, фіксуються у момент зміни параметрів  $c_j$ .

Елементом вектора  $C$  можливо надати зміст ймовірностей відповідних гіпотез  $H_j$ , якщо у лагранжیان (1) внести додаткове обмеження щодо знаку вагових коефіцієнтів.

Якщо ввести до розгляду лагранжیان

$$L(\tilde{C}, \lambda, \mu) = \tilde{C}^T R(t)\tilde{C} + \lambda(\tilde{C}^T E - 1) - \mu^T \tilde{C},$$

де  $\mu$  -  $q$ -вимірний вектор невід'ємних невизначених множників

Лагранжу, маємо систему рівнянь

$$\nabla_{\tilde{C}} L(\tilde{C}, \lambda, \mu) = 2R(t)\tilde{C} + \lambda E - \mu = 0,$$

$$\frac{\partial L(\tilde{C}, \lambda, \mu)}{\partial \lambda} = \tilde{C}^T E - 1 = 0.$$

Рішення цієї системи має вигляд

$$\tilde{C} = 0,5R^{-1}(t) \left( \mu - \frac{E^T R^{-1}(t)\mu - 2}{E^T R^{-1}(t)E} E \right),$$

$$\lambda = \frac{E^T R^{-1}(t)\mu - 2}{E^T R^{-1}(t)E}.$$

Далі, застосовуючи процедуру Ерроу-Гурвіца-Удзави [5], нескладно записати алгоритм адаптативної настройки коефіцієнтів у вигляді

$$\tilde{C} = 0,5R^{-1}(t) \left( \mu(t-1) - \frac{E^T R^{-1}(t) \mu(t-1) - 2}{E^T R^{-1}(t) E} E \right), \quad (7)$$

$$\mu(t) = \text{Pr}_+(\mu(t-1) - \gamma_\mu(t) \tilde{C}(t)),$$

де  $\text{Pr}_+(\cdot)$  - проєктор на додатковий ортант;

$\gamma_\mu(t) > 0$  - параметр кроку пошуку.

Перше співвідношення (7) можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{C}(t) &= 0,5R^{-1}(t)\mu(t-1) - \frac{0,5R^{-1}(t)E^T R^{-1}(t)\mu(t-1)E}{E^T R^{-1}(t)E} + \\ &+ \frac{R^{-1}(t)E}{E^T R^{-1}(t)E} = C(t) + 0,5 \left( R^{-1}(t)\mu(t-1) - \right. \\ &\left. \frac{R^{-1}(t)E^T R^{-1}(t)\mu(t-1)E}{E^T R^{-1}(t)E} \right) = \\ &= C(t) + 0,5 \left( I - \frac{R^{-1}(t)EE^T}{E^T R^{-1}(t)E} \right) R^{-1}(t)\mu(t-1), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $C(t)$  визначається за співвідношенням (6);

$I$  - одинична матриця;

$I - R^{-1}(t)EE^T (E^T R^{-1}(t)E)^{-1}$  - проєктор на гіперплощини

$$\tilde{C}^T(t)E = 1.$$

Також легко бачити, що вектор  $(I - R^{-1}(t)EE^T (E^T R^{-1}(t)E)^{-1}) \times R^{-1}(t)\mu(t-1)$  є ортогональним до вектору  $E$ . Тоді (16) можна переписати в простій рекурентній формі

$$\tilde{C}(t) = C(t) + 0,5 \text{Pr}_c^* T_{(t)E=1} (R^{-1}(t)\mu(t-1));$$

$$\mu(t) = \text{Pr}_+(\mu(t-1) - \gamma_\mu(t) \tilde{C}(t)),$$

яка реалізується сумісно з співвідношеннями (6).

Запишемо остаточно алгоритм у вигляді

$$R^{-1}(t) = R^{-1}(t-1) - \frac{R^{-1}(t-1)V(t)V^T(t)R^{-1}(t-1)}{1 + V^T(t)R^{-1}(t-1)V(t)};$$

$$C(t) = \frac{R^{-1}(t)E}{E^T R^{-1}(t)E};$$

$$\tilde{C}(t) = C(t) + 0,5 \left( I - \frac{R^{-1}(t)EE^T}{E^T R^{-1}(t)E} \right) R^{-1}(t)\mu(t-1);$$

$$\mu(t) = \text{Pr}_+(\mu(t-1) - \gamma_\mu(t)\tilde{C}(t)).$$

Легко бачити, що він є по суті двоетапною адаптативною процедурою виявлення розладок у випадкових послідовностях, що засновано на багатомодельному підході. При цьому на першому етапі розглядається оптимальна відфільтрована послідовність, що застосовує повний набір моделей, а на другому етапі визначаються ймовірності гіпотез, що відповідають кожній з моделей.

Як приклад, розглядається задача виявлення змін властивостей техніко-економічного показника, що заданий часовим рядом, наведеним на малюнку (графік 1). У відповідність часовому ряду поставлено три різні моделі: перша модель  $\hat{y}_1(t) = \hat{a}_{11}y(t-1) + \hat{a}_{12}y(t-2)$ ; друга модель  $\hat{y}_2(t) = \hat{a}_{21}y(t-1) + \hat{a}_{22}y(t-2) + \hat{a}_{23}y(t-3)$ ; третя модель  $\hat{y}_3(t) = \hat{a}_{31}y(t-1) + \hat{b}_{32}v(t-1)$ , де  $v(t)$  - білий шум з  $E\{v(t) = 0\}$ , та  $\sigma_v = 0,25$ . Початкові значення для векторів параметрів моделей:  $\hat{\theta}_1 = (0,6; -0,5)$ ;  $\hat{\theta}_2 = (0,1; -0,25; 0,15)$ ;  $\hat{\theta}_3 = (0,55; -0,35)$ . Для оцінювання векторів параметрів моделей було застосовано алгоритм Качмажа.

Графік 2 описує багатомодельну відфільтровану послідовність  $\hat{y}(t)$ , що здобута з застосуванням алгоритмів визначення ймовірностей гіпотез, що відповідають кожній з моделей. Графік 3 демонструє вихід моделі -  $\hat{y}_1(t)$ .

Введемо до розгляду

$$\varepsilon^j = \sum_{j=1}^N (y(j) - \hat{y}(t))^j.$$

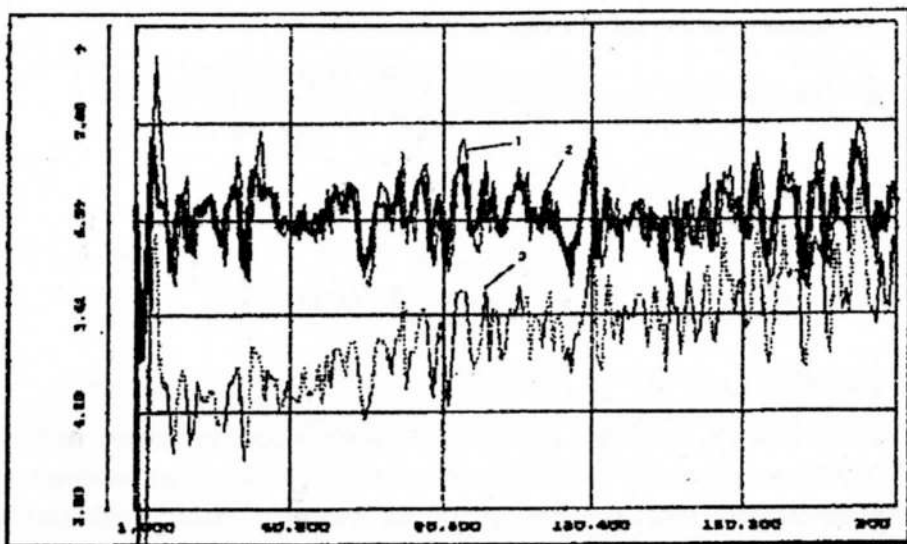


Рис. 1

Якщо  $i=1$  ми маємо оцінку зміщення, якщо  $i=2$  маємо середньоквадратичну помилку. Для моделей, що було застосовано, маємо такі значення цих оцінок. Для моделі  $\hat{y}_1: \varepsilon = 1,483; \varepsilon^2 = 2,639$ . Для моделі  $\hat{y}_2: \varepsilon = 0,011; \varepsilon^2 = 0,382$ . Для моделі  $\hat{y}_3: \varepsilon = 0,043; \varepsilon^2 = 0,384$ . Для багатомодельної послідовності  $\hat{y}: \hat{y}_3: \varepsilon = -0,008; \varepsilon^2 = 0,302$ .

Як бачимо, багатомодельна послідовність  $\hat{y}(t)$  краще, ніж всі моделі, описує техніко-економічний показник і має найменші значення середньоквадратичної помилки та зміщення.

#### Список літератури:

1. Выявление скрытых хищений средствами экономического анализа, а также путем совершенствования деятельности контрольно-ревизионных аппаратов // Сб. науч. трудов. М., 1977.
2. Матусовский Г.А., Плисс И.П., Левыкин В.М. и др. Некоторые расследования латентных хищений // Криминалистика и судебная экспертиза. 1979. Вып. 19.
3. Матусовский Г.А., Бодянский Е.В., Плисс И.П. и др. Вопросы выявления признаков латентных хищений с помощью математических моделей // "Выявление скрытых хищений": Сб. науч. трудов М., 1981.
4. Бассвиль М., Банвениста А., Вилски А. и др. Обнаружение изменений свойств сигналов и динамических систем. М., 1989.
5. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М., 1983.

Надійшла до редколегії 21.12.95р.