

УДК 519.212

## СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ІМОВІРНОСТЕЙ СТАНІВ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНОЇ ЗАМКНЕНОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

**Юрій ЖЕРНОВИЙ**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Для одноканальної замкненої системи масового обслуговування з показниковим розподілом часу безвідмовної роботи та довільно розподіленим часом обслуговування визначено ймовірності станів граничного стаціонарного процесу.

*Ключові слова:* одноканальна замкнена система масового обслуговування, граничний стаціонарний процес, розподіл ймовірностей.

**1.** У випадку, коли час обслуговування – довільно розподілена випадкова величина, а потік замовлень найпростіший, існування граничного стаціонарного процесу для одноканальної відкритої системи масового обслуговування (СМО) з необмеженою чергою доведено методом вкладених ланцюгів Маркова [1, с. 98]. Дослідження ергодичних властивостей одноканальної замкненої СМО ускладнюється тим, що для неї потік замовлень на вході системи ніколи не може бути найпростішим, оскільки інтенсивність потоку замовлень на вході системи змінюється разом з надходженням кожного нового замовлення і навіть дорівнює нулеві після того, як всі наявні в системі технічні пристрої (ТП) прибули на обслуговування.

Однак випадковий процес, який відбувається у замкненій СМО з найпростішими потоками, є найпростішим процесом загибелі-розмноження, тому володіє ергодичною властивістю. Для такої СМО відомі формули для стаціонарних ймовірностей станів [2, с. 282].

Стаціонарні ймовірності станів визначено для одноканальної замкненої СМО з показниковим розподілом часу безвідмовної роботи технічних пристроїв і довільно розподіленим часом обслуговування.

**2. Загальні формули для стаціонарних ймовірностей.** Розглянемо одноканальну замкнену СМО, в якій кожен з  $m$  ( $m \geq 2$ ) технічних пристроїв може в деякі випадкові моменти часу потребувати обслуговування. Нехай потік відмов кожного ТП – найпростіший з інтенсивністю  $\lambda$ . Це означає, що час  $T_\lambda$  безвідмовної роботи ТП розподілений згідно з показниковим законом. Математичне сподівання

випадкової величини  $T_\lambda$  позначимо через  $m_\lambda$ :  $M(T_\lambda) = m_\lambda = 1/\lambda$ . ТП, що потребує обслуговування і застає канал обслуговування вільним, відразу приймають на обслуговування. У випадку зайнятості каналу ТП чекає на обслуговування в черзі.

Тривалості обслуговування замовлень – незалежні однаково розподілені випадкові величини  $T_\mu$  з довільною функцією розподілу  $F_\mu(t)$ . Тоді інтенсивність потоку обслуговувань  $\mu = 1/m_\mu$ , де  $m_\mu = M(T_\mu) = \int_0^\infty t dF_\mu(t)$ .

Введемо нумерацію станів СМО відповідно до кількості ТП, що потребують обслуговування:  $s_i$  ( $i = \overline{0, m}$ ). Нехай  $p_i(t)$  – імовірність перебування системи в стані  $s_i$  в момент часу  $t$ .

Припустимо, що в початковий момент часу система перебуває у стані  $s_0$ , і позначимо через  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) – момент завершення обслуговування  $k$ -го замовлення, а через  $N_k$  кількість ТП, які потребують обслуговування в момент, коли  $k$ -те обслужене замовлення, завершивши обслуговування, покидає канал обслуговування. Тоді подія  $\{N_k = j\}$  означає, що в момент  $t_k + 0$  система переходить до стану  $s_j$ .

За формулою повної ймовірності

$$P\{N_{k+1} = j\} = \sum_{s=0}^{m-1} P\{N_{k+1} = j | N_k = s\} P\{N_k = s\}, \quad (1)$$

$$j = \overline{0, m-1}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Перехідні ймовірності  $p_{js}^{(k)} = p_{js} = P\{N_{k+1} = j | N_k = s\}$  не залежать від номера обслуженого замовлення  $k$ , а визначають з врахуванням кількості замовлень, які надходять на обслуговування за час обслуговування одного замовлення  $T_\mu$

$$p_{js} = \begin{cases} \Pi_{j, m-1}, & s = 0; 1; \\ \Pi_{j-s+1, m-s}, & s = \overline{2, j+1}, \quad j = \overline{0, m-2}, \quad s = \overline{2, m-1}, \quad j = m-1. \\ 0, & s > j+1. \end{cases} \quad (2)$$

Тут  $\Pi_{kl}$  – імовірність того, що за час обслуговування  $T_\mu$  з ладу вийдуть  $k$  технічних пристроїв, за умови, що потенційними джерелами замовлень у момент початку обслуговування були  $l$  ТП.

Враховуючи, що наявність у системі  $i$  джерел замовлень означає, що залишок часу до моменту надходження чергового замовлення розподілений згідно з показниковим законом з параметром  $i\lambda$  (позначимо цю випадкову величину через  $T_{i\lambda}$  ( $i = \overline{1, m-1}$ ), для ймовірностей  $\Pi_{kl}$  отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} \Pi_{0l} &= P\{T_\mu < T_{l\lambda}\}, \quad l = \overline{1, m-2}; \\ \Pi_{ll} &= P\{T_{l\lambda} + T_{(l-1)\lambda} + \dots + T_\lambda < T_\mu\}, \quad l = \overline{1, m-1}; \\ \Pi_{kl} &= P\{T_{l\lambda} + T_{(l-1)\lambda} + \dots + T_{(l-k+1)\lambda} < T_\mu < \\ &< T_{l\lambda} + T_{(l-1)\lambda} + \dots + T_{(l-k)\lambda}\}, \quad l = \overline{2, m-1}, \quad k < l. \end{aligned} \quad (3)$$

Переконаємося в тому, що послідовність  $\{N_k\}$  утворює ланцюг Маркова.

Якщо  $\Delta_k$  – кількість замовлень, які надійшли в систему за час  $T_\mu$  обслуговування  $k$ -го замовлення, то

$$N_k = \begin{cases} N_{k-1} + \Delta_k - 1, & N_{k-1} > 0; \\ \Delta_k, & N_{k-1} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Оскільки залишок часу від моменту завершення обслуговування  $k$ -го замовлення до моменту надходження чергового замовлення розподілений за показниковим законом (з параметром, кратним  $\lambda$ ) і, отже, не залежить від поведінки системи до моменту  $t_k$ , то випадкова величина  $\Delta_k$  не залежить від минулого, тому рівність (4) доводить марковську властивість послідовності  $\{N_k\}$ . Рівності (2) доводять однорідність ланцюга Маркова  $\{N_k\}$ .

Опираючись на ергодичну теорему для однорідного незвідного ланцюга Маркова зі скінченною множиною станів ([2, с. 61] або [3, с. 67]), можемо стверджувати, що існують границі

$$\pi_j = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{N_k = j\} \quad (j = \overline{0, m-1}).$$

Переходячи до границі в рівностях (1), з врахуванням співвідношень (2) одержимо систему алгебричних рівнянь для визначення ймовірностей  $\pi_j$

$$\pi_j = \sum_{s=0}^{j+1} p_{js} \pi_s \quad (j = \overline{0, m-2}); \quad \sum_{s=0}^{m-1} \pi_s = 1. \quad (5)$$

Для з'ясування зв'язку між ймовірностями  $\pi_j$  ( $j = \overline{0, m-1}$ ) і стаціонарним розподілом ймовірностей станів системи  $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t)$  ( $j = \overline{0, m}$ ) проаналізуємо роботу системи на дуже великому проміжку часу  $T$ .

Проміжки часу, протягом яких система перебуває в стані  $s_0$ , розподілені за показниковим законом з параметром  $m\lambda$  ( $M(T_{m\lambda}) = m_{m\lambda} = 1/(m\lambda)$ ). Якщо  $N(T)$  – кількість замовлень, обслужених у системі за час  $T$ , то

$$T \approx (m_{m\lambda} \pi_0 + m_\mu) N(T). \quad (6)$$

Рівність (6) виконується тим точніше, чим триваліший проміжок часу  $T$  розглядають. Враховуючи, що  $T_0(T) \approx m_{m\lambda} \pi_0 N(T)$  – сумарний (за час  $T$ ) час перебування системи у стані  $s_0$ , стаціонарну ймовірність перебування системи у цьому стані визначимо за допомогою граничного переходу

$$p_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_0(T)}{T} = \frac{m_{m\lambda} \pi_0}{m_\mu + m_{m\lambda} \pi_0}.$$

У момент, коли обслужене замовлення покидає канал обслуговування, стан  $s_j$  настає з ймовірністю  $\pi_j$  і триває протягом випадкового проміжку часу  $T_{(m-j)\lambda}$ . Тому  $T_j(T) \approx m_{(m-j)\lambda} \pi_j N(T)$  – сумарний (за час  $T$ ) час перебування системи у стані  $s_j$ , і

$$p_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_j(T)}{T} = \frac{m_{(m-j)\lambda} \pi_j}{m_\mu + m_{m\lambda} \pi_0} \quad (j = \overline{0, m-1}). \quad (7)$$

Імовірність  $p_m$  визначимо за допомогою умови нормування  $\sum_{j=0}^m p_j = 1$

$$p_m = \frac{m_\mu - \sum_{j=1}^{m-1} m_{(m-j)\lambda} \pi_j}{m_\mu + m_{m\lambda} \pi_0}. \quad (8)$$

Використовуючи знайдені ймовірності  $p_j$  ( $j = \overline{0, m}$ ), можемо обчислити показники ефективності одноканальної замкненої СМО, зокрема середню кількість замовлень, які перебувають у черзі

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \sum_{j=2}^m (j-1) p_j = \\ &= \frac{1}{m_\mu + m_{m\lambda} \pi_0} \left( \sum_{j=2}^{m-1} (j-1) m_{(m-j)\lambda} \pi_j + (m-1) \left( m_\mu - \sum_{j=1}^{m-1} m_{(m-j)\lambda} \pi_j \right) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

і середній час перебування ТП у черзі

$$\begin{aligned} \bar{t}_r &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=2}^m (j-1) T_j(T)}{N(T)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{N(T)} \sum_{j=2}^m \frac{(j-1) T_j(T)}{T} = \\ &= \bar{r} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{N(T)} = \bar{r} (m_\mu + m_{m\lambda} \pi_0) = \\ &= \sum_{j=2}^{m-1} (j-1) m_{(m-j)\lambda} \pi_j + (m-1) \left( m_\mu - \sum_{j=1}^{m-1} m_{(m-j)\lambda} \pi_j \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для СМО з двома технічними пристроями ( $m = 2$ ) система (5) складається лише з двох рівнянь

$$\pi_0 = \Pi_{01} (\pi_0 + \pi_1), \quad \pi_0 + \pi_1 = 1,$$

де згідно з (3)  $\Pi_{01} = P\{T_\mu < T_\lambda\}$ . Отже, у цьому випадку

$$\pi_0 = \Pi_{01} = P\{T_\mu < T_\lambda\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_\mu(t), \quad \pi_1 = 1 - \pi_0. \quad (11)$$

Для випадків  $m = 3$  і  $m = 4$  розв'язки системи (5) зручно записати, ввівши нові позначення для ймовірностей  $\Pi_{kl}$

$$\pi_0 = \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_{21}}, \quad \pi_1 = \frac{\beta_1 (1 - \beta_2)}{\beta_1 + \beta_{21}}, \quad \pi_2 = \frac{\beta_{21}}{\beta_1 + \beta_{21}}; \quad (m = 3) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (1 - \beta_1) \beta_2 \beta_3 \Delta, & \pi_1 &= (1 - \beta_1) \beta_2 (1 - \beta_3) \Delta, \\ \pi_2 &= \beta_{32} (1 - \beta_1) \Delta, & \pi_3 &= (\beta_2 \beta_{31} + \beta_{21} \beta_{32}) \Delta, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{1}{\Delta} = \beta_2 (1 - \beta_1 + \beta_{31}) + \beta_{32} (1 - \beta_1 + \beta_{21}), \quad (m = 4),$$

де

$$\begin{aligned}\beta_i &= P\{T_\mu < T_{i\lambda}\} \quad (i = \overline{1, 3}); \quad \beta_{21} = P\{T_{2\lambda} + T_\lambda < T_\mu\}; \\ \beta_{31} &= P\{T_{3\lambda} + T_{2\lambda} + T_\lambda < T_\mu\}; \quad \beta_{32} = P\{T_{3\lambda} + T_{2\lambda} < T_\mu\}.\end{aligned}$$

**3. Результати обчислень для типових законів розподілу часу обслуговування.** Використовуючи знайдені ймовірності  $\pi_j$  ( $j = \overline{0, m-1}$ ), можна визначити стаціонарний розподіл імовірностей станів системи  $p_j$  ( $j = \overline{0, m}$ ), середні значення  $\bar{r}$ ,  $\bar{t}_r$  та інші показники ефективності одноканальної замкненої СМО для будь-якого заданого розподілу часу обслуговування  $T_\mu$ . Зокрема, у випадку показникового розподілу часу обслуговування, коли  $m_\mu = 1/\mu$ , з (7), (8) отримуємо формули [2, с. 282 – 283] для одноканальної замкненої СМО з найпростішими потоками.

Наведемо результати, отримані за формулами (7)-(13) для деяких типових розподілів випадкової величини  $T_\mu$ .

**Приклад 1.** Час обслуговування детермінований  $T_\mu = T = const$ ,  $m_\mu = T$ .

*Випадок 1.*  $m = 2$ .

$$\begin{aligned}p_0 &= \alpha_0 e^{-\lambda T}, \quad p_1 = 2\alpha_0(1 - e^{-\lambda T}), \quad p_2 = 2\alpha_0(\lambda T + e^{-\lambda T} - 1), \\ \frac{1}{\alpha_0} &= 2\lambda T + e^{-\lambda T}; \quad \bar{t}_r = (\lambda T + e^{-\lambda T} - 1)/\lambda.\end{aligned}$$

*Випадок 2.*  $m = 3$ .

$$\begin{aligned}p_0 &= \beta_0 e^{-3\lambda T}, \quad p_1 = 1, 5\beta_0 e^{-\lambda T}(1 - e^{-2\lambda T}), \quad p_2 = 3\beta_0(1 - 2e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T}); \\ p_3 &= 1, 5\beta_0(2\lambda T(1 - e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T}) - 2(1 + e^{-2\lambda T}) + 3e^{-\lambda T} + e^{-3\lambda T}); \\ \frac{1}{\beta_0} &= e^{-3\lambda T} + 3\lambda T(1 - e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T}); \\ \bar{t}_r &= 2T + \frac{e^{-3\lambda T}}{\lambda(1 - e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T})} - \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

*Випадок 3.*  $m = 4$ .

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_0} &= 1 + 4\lambda T e^{\lambda T}(1 - 2e^{\lambda T} + 3e^{2\lambda T} - e^{3\lambda T} - e^{4\lambda T} + e^{5\lambda T}); \\ p_1 &= \frac{4}{3}(e^{3\lambda T} - 1)p_0; \quad p_2 = 2e^{2\lambda T}(e^{3\lambda T} - 3e^{\lambda T} + 2)p_0; \\ p_3 &= 4e^{\lambda T}(e^{5\lambda T} - 2e^{4\lambda T} - e^{3\lambda T} + 5e^{2\lambda T} - 4e^{\lambda T} + 1)p_0; \\ p_4 &= \frac{p_0}{3}(7 + 12\lambda T e^{\lambda T}(1 - 2e^{\lambda T} + 3e^{2\lambda T} - e^{3\lambda T} - e^{4\lambda T} + e^{5\lambda T}) - \\ &\quad - 12e^{\lambda T}(e^{5\lambda T} - e^{3\lambda T} - 4e^{\lambda T} + 1) - 38e^{3\lambda T} + 18e^{5\lambda T}); \\ \bar{r} &= p_2 + 2p_3 + 3p_4; \quad \bar{t}_r = \frac{1 - p_0 + \bar{r}}{\lambda(3 + p_0 - \bar{r})} - T.\end{aligned}$$

**Приклад 2.** Час обслуговування рівномірно розподілений на проміжку  $(a, b)$ ,  $m_\mu = (a + b)/2$ .

Випадок 1.  $m = 2$ .

$$\begin{aligned} p_0 &= \gamma_0(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}); & p_1 &= 2\gamma_0(\lambda(b-a) + e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}); \\ p_2 &= \gamma_0(\lambda^2(b^2 - a^2) - 2(\lambda(b-a) + e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a})); \\ \frac{1}{\gamma_0} &= \lambda^2(b^2 - a^2) + e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}; \\ \bar{t}_r &= \frac{a+b}{2} - \frac{\lambda(b-a) - e^{-\lambda a} + e^{-\lambda b}}{\lambda^2(b-a)}. \end{aligned}$$

Випадок 2.  $m = 3$ .

$$\begin{aligned} p_0 &= 2\delta_0(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b}); \\ p_1 &= 3\delta_0(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(2\lambda(b-a) + e^{-2\lambda b} - e^{-2\lambda a}); \\ p_2 &= 6\delta_0\lambda(b-a)(2\lambda(b-a) - 4(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b}); \\ p_3 &= 3\delta_0(\lambda^2(b^2 - a^2)(2\lambda(b-a) - 2(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b}) - \\ &\quad - 2\lambda(b-a)(2\lambda(b-a) - 3(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b}) + \\ &\quad + (e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b})); \\ \bar{r} &= p_2 + 2p_3; & \bar{t}_r &= \frac{\bar{r}}{6\lambda} (2\pi_0 + 3\lambda(a+b)); \\ \pi_0 &= \frac{(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b})}{\lambda(b-a)(2\lambda(b-a) - 2(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b})}. \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Час обслуговування розподілений за узагальненим законом Ерланга другого порядку з параметрами  $\mu_1, \mu_2$ ;  $m_\mu = (\mu_1 + \mu_2)/(\mu_1\mu_2)$ .

Випадок 1.  $m = 2$ .

$$\begin{aligned} p_0 &= (\mu_1\mu_2)^2\eta_0; & p_1 &= 2\lambda\mu_1\mu_2\eta_0(\lambda + \mu_1 + \mu_2); \\ p_2 &= 2\lambda\eta_0((\mu_1 + \mu_2)(\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_2) - \mu_1\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)); \\ \frac{1}{\eta_0} &= (\mu_1\mu_2)^2 + 2\lambda(\mu_1 + \mu_2)(\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_2); \\ \bar{t}_r &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\mu_2} - \frac{\lambda + \mu_1 + \mu_2}{(\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_2)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Випадок 2.  $m = 3$ . Введемо позначення  $\alpha_i = \lambda/\mu_i$  ( $i = 1, 2$ ). Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_0} &= 1 + 3(\alpha_1 + \alpha_2)((1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) + \\ &\quad + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2)(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2)); \\ p_1 &= 3(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2)p_0; & p_2 &= 6(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2 + \\ &\quad + 2\alpha_1^2\alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2))p_0; & p_3 &= 6(\alpha_1^2(\alpha_1 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2^2) + \end{aligned} \tag{15}$$

$$+\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^2\alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)))p_0;$$

$$\bar{r} = p_2 + 2p_3; \quad \bar{t}_r = \frac{\bar{r} \pi_0}{3\lambda p_0};$$

$$\frac{1}{\pi_0} = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2)(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2).$$

Правильність отриманих у цій праці формул для стаціонарних імовірностей  $p_j$  ( $j = \bar{0}, m$ ) підтверджена результатами числових експериментів на імітаційних моделях одноканальної замкненої СМО, виконаних за допомогою комп'ютерної системи GPSS World. Формули (14) і (15) перевірені також за допомогою так званого методу фаз [4, с. 389], який дає змогу знаходити стаціонарний розподіл імовірностей у випадку, коли випадкові величини  $T_\lambda$  або  $T_\mu$  розподілені за узагальненим законом Ерланга.

1. *Ивченко Г. И., Капитанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания. – М., 1982.
2. *Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М., 1969.
3. *Жерновий Ю. В.* Марковські моделі масового обслуговування. – Львів, 2004.
4. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории вероятностей. – М., 1983.

## STATISTICAL-EQUILIBRIUM STATE PROBABILITIES DISTRIBUTION FOR THE SINGLE-SERVER CLOSED QUEUEING SYSTEMS

Yuriy ZHERNOVYI

*Ivan Franko National University of L'viv,  
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1*

The statistical-equilibrium state probabilities distribution for the single-server closed queueing system with the exponential distributed nonfailure operating time and arbitrary distributed service time is obtained.

*Key words:* single-server closed queueing system, statistical-equilibrium state, probabilities distribution.

Стаття надійшла до редколегії 18.04.2006

Прийнята до друку 24.10.2007