УДК 517.53

АНАЛІТИЧНІ В КРУЗІ З ПРОКОЛЕНИМ ЦЕНТРОМ ФУНКЦІЇ З ОБМЕЖЕНОЮ НЕВАНЛІННІВСЬКОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

Іван КШАНОВСЬКИЙ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Введено узагальнену характеристику Неванлінни для функцій, мероморфних у довільному кільці та в крузі з проколеним центром. Доведено узагальнену теорему Йенсена, вивчено структуру аналітичних у крузі з проколеним центром функцій з обмеженою характеристикою.

Ключові слова: мероморфна функція, лічильна функція, характеристика Неванлінни, формула Йенсена.

1. Позначення та формулювання основних результатів. Властивості та поведінка мероморфних у крузі та в багатозв'язних областях функцій вивчали багато авторів [1-10]. Нещодавно А.А. Кондратюк та А.Я. Христіянин запропонували новий підхід до теорії розподілу значень мероморфних функцій у кільцях інваріантних стосовно інверсії $z \to \frac{1}{z}$. Вони ввели однопараметричну характеристику, яка має властивості, схожі на властивості класичної характеристики Неванлінни мероморфних у крузі функцій. Мета нашої праці – дещо узагальнити поняття характеристики для функцій мероморфних у довільному кільці та в крузі з проколеним центром, а також вивчити аналітичні в крузі з проколеним центром функції з обмеженою характеристикою.

Нехай f – мероморфна функція в області $A = \{z : r_0 < |z| < R_0\}$, $0 \leqslant r_0 < 1$, $1 < R_0 < +\infty$. Якщо $w(r)$ – гладка, додатна і спадна функція на проміжку $[1, R_0)$, $w(1) = 1$, $w(R_0 - 0) = r_0$, а $\{b_j\}$ – послідовність полюсів функції f в області A, то введемо таке позначення:

$$N_w(r,f) = \sum_{\sqrt{rw(r)}<|b_j|} \log^+ \frac{r}{|b_j|} + \sum_{|b_j|\leqslant\sqrt{rw(r)}} \log^+ \frac{|b_j|}{w(r)}, \qquad 1 \leqslant r < R_0.$$

Позначимо через $n^{(1)}(t,f)$ лічильну функцію полюсів функції f в області $\{z : t \leqslant |z| < 1\}$, $r_0 < t < 1$, а через $n^{(2)}(t,f)$ – лічильну функцію полюсів функції f в області $\{z : 1 \leqslant |z| < t\}$, $1 \leqslant t < R_0$. Через $T(r, f)$ позначатимемо класичну характеристику Неванлінни мероморфної в крузі функції f.

Теорема 1. *Нехай f – мероморфна функція в області $A = \{z : r_0 < |z| < R_0\}$, $\{a_i\}$ та $\{b_j\}$ – послідовності нулів і полюсів функції f в області A, відповідно. Тоді*

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta = \\ = \int_1^r \frac{n^{(2)}(t,1/f)}{t}dt - \int_1^r \frac{n^{(2)}(t,f)}{t}dt + k(\psi)\log r, \qquad 1 \leqslant r < R_0,\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta = \\ = \int_r^1 \frac{n^{(1)}(t,1/f)}{t}dt - \int_r^1 \frac{n^{(1)}(t,f)}{t}dt + k(\psi)\log r, \qquad r_0 < r \leqslant 1,\end{gathered} \tag{2}$$

де $k(\psi) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}dz$, $\psi(z) = f(z)\dfrac{\prod_{|b_j|=1}(z-b_j)}{\prod_{|a_i|=1}(z-a_i)}$.

Теорема 2. *(теорема Йенсена для довільного кільця). Нехай f – мероморфна функція в області $A = \{z : r_0 < |z| < R_0\}$. Тоді*

$$\begin{gathered}N_w(r, \frac{1}{f}) - N_w(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(w(r)e^{i\theta})|d\theta - \\ -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\sqrt{rw(r)}e^{i\theta})|d\theta, \qquad 1 \leqslant r < R_0.\end{gathered} \tag{3}$$

Позначимо $m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta$ і приймемо

$$m_w(r, f) = m(r, f) + m(w(r), f) - 2m(\sqrt{rw(r)}, f), \qquad 1 \leqslant r < R_0.$$

Означення 1. *Функцію*

$$T_w(r, f) = m_w(r, f) + N_w(r, f), \qquad 1 \leqslant r < R_0,$$

називатимемо w-характеристикою функції f.

Теорема 3. *Нехай f – не дорівнює тотожно сталій мероморфній в області A функції. Тоді*

$$T_w(r,f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} N_w\left(r, \frac{1}{f-e^{i\varphi}}\right) d\varphi, \qquad 1 \leqslant r < R_0.$$

Теорема 4. *Нехай функція f мероморфна в області A. Тоді її w-характеристика $T_w(r,f)$ невід'ємна, неперервна, неспадна на $[1,R_0)$, $T_w(1,f)=0$. Крім того, якщо f – не дорівнює тотожно нулю, то $T_w(r,f) = T_w(r,1/f)$.*

Теорема 5. *Нехай f – аналітична в області $\{z : 0 < |z| < R_0\}$ функція з обмеженою характеристикою $T_w(r,f)$. Тоді f продовжується до мероморфної в крузі $\{z : |z| < R_0\}$ функції з обмеженою неванліннівською характеристикою $T(r,f)$.*

2. Допоміжні твердження та результати.

Лема А. *([13]) Нехай f – аналітична в $A = \{z : 1/R_0 < |z| < R_0\}$, $1 < R_0 \leqslant \infty$, функція без нулів. Тоді для будь-якого замкненого шляху γ в A такого, що проходить через точку $z_0 = 1$, існує $k \in \mathbb{Z}$, що для функції $g(z) = z^{-k}f(z)$ виконується*

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = 0.$$

Насправді, правильна загальніша лема.

Лема B. *Нехай f – аналітична в $A = \{z : r_0 < |z| < R_0\}$, $0 \leqslant r_0 < 1$, $1 < R_0 < +\infty$, функція без нулів. Тоді для будь-якого замкненого шляху γ в A такого, що проходить через точку $z_0 = 1$, існує $k \in \mathbb{Z}$, що для функції $g(z) = z^{-k}f(z)$ виконується*

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = 0.$$

Доведення цієї леми повністю повторює доведення леми А, оскільки в доведенні леми А ніде не використовувалась симетричність області аналітичності функції, лише важливо, що коло $\{z : |z| = 1\}$ є підмножиною цієї області.

3. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Позначимо $A^r = \{z : 1 < |z| < r\}$ і розглянемо такі випадки: 1) $f(z) \neq 0, \infty$, $z \in \bar{A}^r$. Лема B гарантує існування такого $k = k(f)$, що в A^r визначена однозначна вітка $\log F(z)$, де $F(z) = z^{-k}f(z)$. Справді, нехай $z_0 = 1$, і вважаємо $\log F(z_0)$ визначеним. Приймемо

$$\log F(z) = \log F(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}d\zeta,$$

де інтеграл обчислюється вздовж шляху, що з'єднує z_0 і z в A^r.

Оскільки функція $\frac{\log F(z)}{z}$ – аналітична в області $\bar{A}^r$, то за теоремою Коші

$$\int_{|z|=r} \frac{\log F(z)}{z}dz - \int_{|z|=1} \frac{\log F(z)}{z}dz = 0.$$

Виділяючи дійсну частину, одержимо

$$\int_0^{2\pi} \log|F(re^{i\theta})|d\theta - \int_0^{2\pi} \log|F(e^{i\theta})|d\theta = 0.$$

Звідси випливає рівність

$$\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})|d\theta - 2\pi k \log r = 0; \tag{4}$$

2) $f(z)$ має нулі і не має полюсів в області $\bar{A}^r$. Позначимо

$$\psi(z) = \frac{f(z)}{\prod\limits_{|a_i|=1}(z-a_i)}, \quad \varphi(z) = \frac{f(z)}{\prod\limits_{a_i\in\bar{A}^r}(z-a_i)}$$

і застосуємо формулу (4) до функції $\varphi(z)$. Оскільки ([15, c. 34])

$$\int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - a|d\theta = \log^+|a|, \quad a \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

то для $a_i \in \bar{A}^r$ маємо

$$\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - a_i|d\theta = \int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - \frac{a_i}{r}|d\theta + 2\pi\log r = \log^+\left|\frac{a_i}{r}\right| + 2\pi\log r = 2\pi\log r,$$

а також

$$\int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - a_i|d\theta = 2\pi\log|a_i|.$$

У результаті одержимо

$$\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})|d\theta - 2\pi\sum_{a_i\in\bar{A}^r}\log\frac{r}{|a_i|} - 2\pi k(\varphi)\log r = 0. \tag{6}$$

Позначимо $g(z) = \dfrac{\psi(z)}{z-a}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$. Тоді

$$k(g) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{g'(z)}{g(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z-a} = \begin{cases} k(\psi)-1, & |a|<1,\\ k(\psi), & |a|>1.\end{cases}$$

Звідси випливає, що $k(\varphi) = k(\psi)$, оскільки $\varphi(z) = \dfrac{\psi(z)}{\prod\limits_{1<|a_i|\leqslant r}(z-a_i)}$. Враховуючи те, що

$$\sum_{a_i\in\bar{A}^r}\log\frac{r}{|a_i|} = \int_1^r \log\frac{r}{t}d(n^{(2)}(t,1/f)-n^{(2)}(1,1/f))dt + \sum_{|a_i|=1}\log r = \int_1^r \frac{n^{(2)}(t,1/f)}{t}dt,$$

одержимо з рівності (6) формулу (1);
3) $f(z)$ має нулі і полюси в області $\bar{A}^r$. Результат є простим наслідком попереднього випадку, з огляду на можливість зображення функції f у вигляді $f = f_0\dfrac{1}{f_\infty}$, де f_0 і f_∞ – мероморфні в $\bar{A}^r$ функції без полюсів. Аналогічно доводиться формула (2).

Лема C. *Нехай f – аналітична в області $\{z : 0 < |z| < R_0\}$ функція. Якщо $m(w(r),f) - 2m(\sqrt{rw(r)},f) \leqslant C,\ 1 < r_1 \leqslant r < R_0$, то $m(t,f) = O(\log(1/t)),\ t\to 0$.*

Доведення. Зробимо таку заміну змінної $x = \log\dfrac{1}{w(r)}$. Враховуючи строгу монотонність функції $w(r)$, маємо $0 < x_1 = \log\dfrac{1}{w(r_1)} \leqslant x < \infty$. Тоді $w(r) = e^{-x}$. Отже, $m(w(r),f) = m(e^{-x},f) := \lambda(x)$. Функція $\lambda(x)$ – опукла, тому в кожній точці інтервалу $x_1 < x < \infty$ існує правостороння похідна $\lambda'_+(x)$, причому ця похідна зростає на зазначеному інтервалі ([14, с. 28, 85]). Можливі такі варіанти:
а) $\lambda'_+(x) \leqslant 0,\ x_1 < x < \infty$. Тоді $\lambda(x)$ – не зростає, тому $\lambda(x) \leqslant C_0$, звідки негайно випливає твердження леми;
б) існує точка $x^* > x_1$ така, що $\lambda'_+(x^*) > 0$. Оскільки $\lambda'_+(x)$ зростає, то $\lambda'_+(x) > 0$ для всіх $x \geqslant x^*$. Тому функція $\lambda(x)$ зростає на інтервалі $x^* \leqslant x < \infty$. Враховуючи це, з умов леми одержимо

$$m(w(r),f) \leqslant 2m(\sqrt{rw(r)},f) + C \leqslant 2m(\sqrt{w(r)},f) + C, \quad r^* \leqslant r < R_0.$$

Це еквівалентно такій нерівності

$$\lambda(x) \leqslant 2\lambda(x/2) + C, \quad x^* \leqslant x < \infty.$$

З огляду на зростання функції λ, випливає, що $\lambda(x) = O(x),\ x\to\infty$.

Доведення теореми 2. Якщо $rw(r) < 1$, то маємо

$$\begin{aligned} N_w(r,f) &= \sum_{1\leqslant|b_j|\leqslant r}\log\frac{r}{|b_j|} + \sum_{\sqrt{rw(r)}\leqslant|b_j|<1}\log\frac{r}{|b_j|} + \sum_{w(r)\leqslant|b_j|<\sqrt{rw(r)}}\log\frac{|b_j|}{w(r)} = \\ &= \int_1^r \log\frac{r}{t}dn^{(2)}(t,f) - \int_{\sqrt{rw(r)}}^1 \log\frac{r}{t}dn^{(1)}(t,f) - \int_{w(r)}^{\sqrt{rw(r)}} \log\frac{t}{w(r)}dn^{(1)}(t,f) = \\ &= \int_1^r \frac{n^{(2)}(t,f)}{t}dt + \int_{w(r)}^1 \frac{n^{(1)}(t,f)}{t}dt - 2\int_{\sqrt{rw(r)}}^1 \frac{n^{(1)}(t,f)}{t}dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Використовуючи формули (1) і (2), можемо записати такі рівності

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(\sqrt{rw(r)}e^{i\theta})|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta=\\ =\int\limits_{\sqrt{rw(r)}}^{1}\frac{n^{(2)}(t,1/f)}{t}dt-\int\limits_{\sqrt{rw(r)}}^{1}\frac{n^{(2)}(t,f)}{t}dt+k(\psi)\log\sqrt{rw(r)},\end{gathered}\tag{8}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(w(r)e^{i\theta})|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta=\\ =\int\limits_{w(r)}^{1}\frac{n^{(1)}(t,1/f)}{t}dt-\int\limits_{w(r)}^{1}\frac{n^{(1)}(t,f)}{t}dt+k(\psi)\log w(r).\end{gathered}\tag{9}$$

Додавши рівності (1) та (9) і віднявши від цієї суми подвоєну рівність (8), з огляду на формулу (7), одержимо твердження теореми.
У випадку, коли $rw(r)\geqslant 1$, то отримуємо

$$\begin{gathered}N_w(r,f)=\sum_{1\leqslant|b_j|<\sqrt{rw(r)}}\log\frac{|b_j|}{w(r)}+\sum_{\sqrt{rw(r)}\leqslant|b_j|<r}\log\frac{r}{|b_j|}+\sum_{w(r)\leqslant|b_j|<1}\log\frac{|b_j|}{w(r)}=\\ =\int\limits_1^{\sqrt{rw(r)}}\log\frac{t}{w(r)}dn^{(2)}(t,f)+\int\limits_{\sqrt{rw(r)}}^{r}\log\frac{r}{t}dn^{(2)}(t,f)-\int\limits_{w(r)}^{1}\log\frac{t}{w(r)}dn^{(1)}(t,f)=\\ =\int\limits_1^r\frac{n^{(2)}(t,f)}{t}dt+\int\limits_{w(r)}^{1}\frac{n^{(1)}(t,f)}{t}dt-2\int\limits_1^{\sqrt{rw(r)}}\frac{n^{(2)}(t,f)}{t}dt.\end{gathered}\tag{10}$$

Застосувавши формули (1) та (2) подібно, як у попередньому випадку, з огляду на рівність (10), одержимо формулу (3).

Доведення теореми 3. Доведення цієї теореми подібне до доведення класичної теореми Картана. Застосуємо формулу Йенсена (3) до функції $f(z)-e^{i\varphi}$. Одержимо

$$\begin{gathered}cN_w\left(r,\frac{1}{f-e^{i\varphi}}\right)-N_w(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})-e^{i\varphi}|d\theta+\\ +\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(w(r)e^{i\theta})-e^{i\varphi}|d\theta-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(\sqrt{rw(r)}e^{i\theta})-e^{i\varphi}|d\theta,\quad 1\leqslant r<R_0.\end{gathered}\tag{11}$$

Проінтегруємо рівність (11) за змінною φ від 0 до 2π. Використання теореми Фубіні, а також рівності (5), завершує доведення теореми.

Доведення теореми 4. Якщо $rw(r) < 1$, то з (7) отримуємо, що функція $N_w(r,f)$ неперервна на $[1, R_0)$, $N_w(1,f) = 0$. Її правостороння похідна стосовно $\log r$

$$rN'_w(r,f) = n^{(2)}(r,f) - \frac{rw'(r)}{w(r)} n^{(1)}(w(r),f) + \left(1 + \frac{rw'(r)}{w(r)}\right) n^{(1)}(\sqrt{rw(r)}, f) =$$
$$= n^{(2)}(r,f) + n^{(1)}(\sqrt{rw(r)}, f) - \frac{rw'(r)}{w(r)}(n^{(1)}(w(r),f) - n^{(1)}(\sqrt{rw(r)}, f)) \geqslant 0.$$

Оскільки $w'(r) < 0$, $N_w(1,f) = 0$, то функція $N_w(r,f)$ – невід'ємна, неспадна. У випадку, коли $rw(r) \geqslant 1$, з огляду на рівність (10), маємо

$$rN'_w(r,f) = n^{(2)}(r,f) - n^{(2)}(\sqrt{rw(r)}, f) - \frac{rw'(r)}{w(r)}(n^{(1)}(w(r),f) + n^{(2)}(\sqrt{rw(r)}, f)) \geqslant 0.$$

Отже, у двох випадках функція $N_w(r,f)$ неперервна, невід'ємна, неспадна. Рівність $T_w(r,f) = T_w(r,1/f)$ є негайним наслідком теореми 2.

Доведення теореми 5. З умови теореми випливає, що $m(w(r),f) - 2m(\sqrt{rw(r)}, f) \leq \leq const$. На підставі леми C маємо $m(t,f) = O(\log(1/t))$, $t \to 0$. Тоді з рівності (2) одержуємо

$$\int_t^1 \frac{n^{(1)}(\tau, 1/f)}{\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(te^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})| d\theta + k(\psi)\log\frac{1}{t} \leqslant$$
$$\leqslant m(t,f) + k(\psi)\log\frac{1}{t} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})| d\theta \leqslant C\log(1/t), \quad t \to 0.$$

Звідси робимо висновок, що функція $f(z)$ в деякому околі точки $z = 0$ має скінченну кількість нулів. Справді, в протилежному випадку, якщо ми позначимо $p = [C]$, то одержимо

$$\int_t^1 \frac{n^{(1)}(\tau, 1/f)}{\tau} d\tau \geqslant \int_t^{|a_{p+1}|} \frac{n^{(1)}(\tau, 1/f)}{\tau} d\tau \geqslant (p+1)\log\frac{|a_{p+1}|}{t} =$$
$$= (p+1)\log|a_{p+1}| + (p+1-C)\log\frac{1}{t} + C\log\frac{1}{t} > C\log\frac{1}{t}, \quad t \to 0,$$

де $\{a_j\}$ – послідовність нулів функції f в області $\{z : 0 < |z| < 1\}$, пронумерованих в порядку спадання модулів. Отже, існує таке t_0, що $m(t,f) \leqslant C\log\frac{1}{t}$, $0 < t \leqslant t_0$ і $f(z)$ не має нулів в області $\{z : 0 < |z| \leqslant t_0\}$. Розглянемо функцію $h(\xi) = f(\xi t_0/2)$, $0 < |\xi| \leqslant 2$. Для цієї функції

$$m(\rho, h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|h(\rho e^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(\frac{t_0\rho}{2}e^{i\theta})| d\theta = O\left(\log\frac{2}{t_0\rho}\right) = O\left(\log\frac{1}{\rho}\right),$$

при $\rho \to 0$.

Лема В гарантує існування такого $m \in \mathbb{Z}$, що в області $\{\xi : 0 < |\xi| < 2\}$ визначена однозначна вітка $\log G(\xi)$, де $G(\xi) = \xi^{-m} h(\xi)$. Розглянемо розвинення в ряд Лорана

$$\log G(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \xi^k.$$

Нехай $\xi = \rho e^{i\theta},\ 0 < \rho < 2$. Тоді

$$\log|G(\xi)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Re}(c_k \xi^k) = \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (c_k \xi^k + \bar{c}_k \bar{\xi}^k) = $$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (c_k \rho^k + \bar{c}_{-k} \rho^{-k}) e^{ik\theta},$$

$$\frac{1}{2}(c_k \rho^k + \bar{c}_{-k}\rho^{-k}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log|G(\rho e^{i\theta})| e^{-ik\theta} d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки $h(\xi)$ немає ні нулів, ні полюсів, то з формули (2) і з рівності

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

одержуємо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{h}(\rho e^{i\theta}) \right| d\theta = O(\log \frac{1}{\rho}), \quad \rho \to 0.$$

Враховуючи цю рівність, маємо

$$|c_k \rho^k + \bar{c}_{-k}\rho^{-k}| \leqslant 2\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\log|G(\rho e^{i\theta})|| d\theta \leqslant 2(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\log|h(\rho e^{i\theta})|| d\theta + |m||\log\rho|) =$$
$$= 2(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |h(\rho e^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |\frac{1}{h}(\rho e^{i\theta})| d\theta + |m||\log\rho|) = O(\log\frac{1}{\rho}),\ \rho \to 0.$$

Звідси $c_k = 0$, $k < 0$. Отже, функція $\log G(\xi)$ аналітична в області $\{\xi : 0 \leqslant |\xi| < 2\}$, звідки випливає, що в околі точки $z = 0$ функція $f(z)$ допускає зображення $f(z) = z^m q(z), m \in \mathbb{Z}$, де функція $q(z)$ аналітична в околі точки $z = 0,\ q(0) \neq 0$. Якщо $m \geqslant 0$, то з обмеженості характеристики $T_w(r, f)$ негайно випливає, що f – аналітична в області $\{z : |z| < R_0\}$ функція з обмеженою характеристикою $T(r, f)$. У випадку, коли $m < 0$, маємо

$$T_w(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log|f(w(r)e^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log|f(\sqrt{rw(r)} e^{i\theta})| d\theta +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log|q(w(r)e^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log|q(\sqrt{rw(r)} e^{i\theta})| d\theta +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta + m\log r \leqslant C, \qquad r \to R_0.$$

Звідси, враховуючи те, що $w(r) \to 0,\ r \to R_0$, а функція $q(z)$ аналітична в околі нуля, отримуємо, що f – мероморфна в області $\{z : |z| < R_0\}$ функція з обмеженою характеристикою $T(r, f)$.

---

1. *Hällström G. af* Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zussammenhängenden Existenzgebieten // Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys., 1940, **12**, Bd. 8, 1-100.
2. *Hällström G. af* Ein eindeutiger Ordnungsbegriff bei Funktionen mit nullberandetem Existenzgebiet // Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 117.
3. *Hällström G. af* Zur Berechnung der Bodenordnung oder Borenhyperordnung eindeutiger Funktionen // Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1995, Sar. AI, Bd. 193, 1-16.
4. *Oğuztöreli N.* Extension de la théorie de Nevanlinna aux domaines multiplement connexes // Istanbul Univ. fen fak. mecm., 1953, **A18**, Bd. 4, 384-419.
5. *Oğuztöreli N.* Représentations intégrales de la fonction caracteristique, de la fonction de nombre et de la forme sphérique normale généralisée et de extension d'un théorème de Borel // Istanbul Univ. fen fak. mecm., 1954, **A19**, Bd. 2, 79-85.
6. *Jenkins J. A.* Sur quelques aspects globaux du théorème de Picard // Ann. sci. Ecole norm. supér., 1955, **72**, B2, 151-161.
7. *Künzi H. P.* Über periodische Enden mit mehrfach zusammenhängendem Existenzgebiet // Math. Z., 1954, **61**, B2, 200-205.
8. *Wittich H.* Defekte Werte eindeutiger analytisher Funktionen // Arch. Math. 1958, 9, 1-2, 65-74.
9. *Mathevossian H. H.* On a factorisation of meromorphic function in multiply connected domain and some of its applications // Izvest. Acad. Nauk Arm. SSR, 1974, **IX**, Bd. 5, 387-408. (in Russian)
10. *Mathevossian H. H.* An analog of $N\{\omega\}$ classes for annuli // Mat. zamet., 1977, Bd. 2, 173-181. (in Russian)
11. *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. I // Matematychni Studii 23 (2005), 19-30.
12. *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. II // Matematychni Studii 24 (2005), 57-68.
13. *Kshanovskyy I.* An analog of Poisson-Jensen formula for annuli // Matematychni Studii 24 (2005), 147-158.
14. *Hayman W.K., Kennedy P.* Subharmonic functions, Vol. 1, London: Academic Press. – 1980.
15. *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций, М., 1970.

ON THE ANALYTIC IN PUNCTURED DISCS FUNCTIONS WITH BOUNDED NEVANLINNA CHARACTERISTIC

Ivan KSHANOVSKYY

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

A generalized Nevanlinna characteristic for meromorphic in punctured discs functions is introduced. A counterpart of the Jensen formula is proved. The structure of analytic functions with bounded Nevanlinna characteristic is studied.

Key words: meromorphic function, counting function, Nevanlinna characteristic, Jensen formula.

Стаття надійшла до редколегії 08.11.2006

Прийнята до друку 24.10.2007