ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.176-190 Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.176-190

УДК 517.95

УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ПІВЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ СИЛЬНИМИ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ НА МЕЖІ ОБЛАСТІ

Галина ЛОПУШАНСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Одержано достатні умови існування розв'язку крайової задачі для квазілінійного з лінійною головною частиною еліптичного рівняння порядку $2m$ при заданих на межі області узагальнених функціях із сильними степеневими особливостями.

Ключові слова: півлінійне еліптичне рівняння, узагальнена функція, ваговий функційний простір, нелінійне інтегродиференціальне рівняння.

У багатьох працях (див., наприклад, [1-13]) досліджуються властивості розв'язків півлінійних еліптичних рівнянь.

У [4] для $q \in (1, q_c)$, де $q_c = \frac{n+1}{n-1}$, у [5] для $q = 2$, у [6] для $q \in [q_c, 2]$, [7] для $q > q_c$ (у тім числі для $q > 2$) досліджується природа крайових значень g розв'язків задачі

$$\Delta u = |u|^{q-1} u, \quad x \in \Omega, \qquad u\,|_{\partial\Omega} = g.$$

При $q \in (1, q_c)$ визначено однозначну розв'язність задачі для довільної g із простору обмежених мір Бореля на $\partial\Omega$. З цих результатів також випливає, що при $q \geq q_c$ узагальнених крайових значень-мір може не існувати. Задачі з мірами також вивчали у [8-12].

Відомо (див. бібліогр. у [14]), що розв'язок лінійного однорідного рівняння набуває узагальнених крайових значень із простору $(C^\infty)'$ тоді і тільки тоді, коли він належить до певного вагового L_1-простору.

У [14-17] запропоновано метод дослідження крайових задач для квазілінійних з головними лінійними частинами (далі півлінійних) еліптичних і параболічних рівнянь при заданих на межі області узагальнених функціях. З результатів [16] випливає, зокрема, розв'язність задачі

$$\Delta u = |u|^q, \quad x \in \Omega, \qquad u\,|_{\partial\Omega} = g$$

у певному ваговому L_1-просторі при довільній $g \in (C^\infty(S))'$ та при $q \in (0, q_0)$, де $q_0 \in (0,1)$ і залежить від порядку сингулярності узагальненої функції g.

Тут досліджуємо розв'язність нормальної крайової задачі для півлінійного еліптичного рівняння порядку $2m < n$ в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, у ваговому L_1-просторі при заданих на межі області узагальнених функціях. З'ясовуємо, в якому сенсі розв'язок рівняння набуває на межі заданих узагальнених крайових значень. Для доведення розв'язності використовуємо метод зведення такої узагальненої крайової задачі до інтегродиференціального рівняння у ваговому L_1-просторі.

1. Основні позначення, функціональні простори. Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею S класу C^∞, у ній задано еліптичний диференціальний вираз $A(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ порядку $2m < n$, $a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$, на S задані крайові диференціальні вирази $B_j(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha$, $b_{j\alpha} \in C^\infty(S)$, $j = \overline{1,m}$, система $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ нормальна і задовольняє умову Лопатинського для $A(x,D)$. Нехай $\{T_j(x,D)\}_{j=1}^m$, $\{\hat{B}_j(x,D)\}_{j=1}^m$, $\{\hat{T}_j(x,D)\}_{j=1}^m$ – такі нормальні системи диференціальних виразів відповідно порядків $\hat{m}_j, 2m - m_j - 1, 2m - \hat{m}_j - 1$, $j = \overline{1,m}$ (див., наприклад, [18]), що правильна формула Гріна

$$\int\limits_\Omega (vAu - uA^*v)dx = \sum_{j=1}^m \int\limits_S (\hat{T}_j v B_j u - \hat{B}_j v T_j u) dS, \; u, v \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{1}$$

Нехай ε_0 – фіксоване мале число, таке що при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ паралельні до поверхні S поверхні $S_\varepsilon = \{x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x) : x \in S\}$ також є нескінченно диференційовними. Тут $\nu(x)$ – орт внутрішньої нормалі до поверхні S у точці $x \in S$.

Для довільної фіксованої точки $\hat{x} \in S$ позначаємо через $\varrho(x, \hat{x})$ $(x \in \overline{\Omega})$ нескінченно диференційовну функцію, яка додатна в $\overline{\Omega} \setminus \{\hat{x}\}$, має порядок $|x - \hat{x}|$ у деякому околі точки $\hat{x}$, $\varrho(\hat{x}, \hat{x}) = 0$, через $\varrho(x)$ – нескінченно диференційовну функцію, яка додатна всередині Ω та має порядок відстані $d(x)$ від точки $x \in \Omega$ до S. Також вважаємо, що $\varrho(x) = 1$ при $d(x) \geq \varepsilon_0$, $\varrho(x, \hat{x}) = 1$ при $|x - \hat{x}| \geq \varepsilon_0$ для всіх $x \in \overline{\Omega}$.

Як у [14, р. 2], при $s \geq 0$ та $k \geq -\hat{m} - 1$, де $\hat{m} = \min\limits_{1\leq j\leq m}(\hat{m}_j)$, визначаємо функційні простори:

$Z_s(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \varrho^{|\alpha|-s} D^\alpha \varphi \in C(\overline{\Omega})\ \forall \alpha$, якщо s неціле та $\frac{D^\alpha \varphi}{ln \varrho} \in C(\overline{\Omega})$, якщо $|\alpha| = s \in N \cup \{0\}\}$,

$Z_k(\overline{\Omega}, \hat{x}) = \{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{\hat{x}\}) : \varrho^{|\alpha|-k}(\cdot, \hat{x}) D^\alpha \varphi \in C(\overline{\Omega})\ \forall \alpha$, якщо k неціле та $\frac{D^\alpha \varphi}{ln \varrho(\cdot,\hat{x})} \in C(\overline{\Omega})$, якщо $|\alpha| = k \in N \cup \{0\}\}$,

$Z_s(S, \hat{x}) = \{\varphi \in C^\infty(S)$: $\varrho^{|\alpha|-s}(\cdot, \hat{x}) D^\alpha \varphi \in C(S)\ \forall \alpha$, якщо s неціле та $\frac{D^\alpha \varphi}{ln \varrho(\cdot,\hat{x})} \in C(S)$, якщо $|\alpha| = s \in N \cup \{0\}\}$,

$X_s(\overline{\Omega}) = \{\psi \in C^\infty(\overline{\Omega}) : A^* \psi = O(\varrho^s(x))$ при $d(x) \to 0$, $\hat{B}_j \psi = 0, j = \overline{1,m}\}$,

$X_k(\overline{\Omega}, \hat{x}) = \{\psi \in Z_{k+2m}(\overline{\Omega}, \hat{x}) : A^* \psi(x) = O(\varrho^k(x, \hat{x}))$ при $|x - \hat{x}| \to 0$, $\hat{T}_j \psi \in Z_{k+m_j+1}(S, \hat{x}), \hat{B}_j \psi = 0,\ j = \overline{1,m}\}$ (згідно з [14], [17] простори $X_s(\overline{\Omega})$ та $X_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$ непорожні),

$M_s(\Omega) = \{v \in L_{1,loc}(\Omega) : ||v||_s = \int\limits_\Omega \varrho^s(x)|v(x)|dx < +\infty\}$,

$M_{s,r}(\Omega) = \{v \in W^r_{1,loc}(\Omega) : ||v||_{s,r} = \int\limits_\Omega \sum\limits_{|\gamma|\le r} \varrho^{s+|\gamma|}(x)|D^\gamma v(x)|dx < +\infty\}$,

$M_{k,r}(\Omega, \hat{x}) = \{v \in W^r_{1,loc}(\Omega) : ||v||_{k,r,\hat{x}} = \int\limits_\Omega \sum\limits_{|\gamma|\le r} \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x})|D^\gamma v(x)|dx < +\infty\}$,

$M_k(\Omega,\hat{x}) = M_{k,0}(\Omega,\hat{x}),\ D(S) = C^\infty(S)$.

Як у [14, р. 2], кажемо, що послідовність $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі $Z_k(\overline{\Omega},\hat{x})$ (відповідно $Z_k(S,\hat{x})$), якщо для довільного мультиіндексу α рівномірно в $\overline{\Omega}$ (S) збігається послідовність $\varrho^{|\alpha|-k}(\cdot,\hat{x})D^\alpha\varphi$ при k нецілому та послідовність $\frac{D^\alpha\varphi}{ln\varrho(\cdot,\hat{x})}$ при $|\alpha| = k \in N \cup \{0\}$. Зауважимо, що $Z_k(\overline{\Omega},\hat{x}) \subset C^l(\overline{\Omega})$, $Z_k(S,\hat{x}) \subset C^l(S)$ при $k > l \in N \cup \{0\}$, а також $Z_{k_1}(\overline{\Omega},\hat{x}) \subset Z_{k_2}(\overline{\Omega},\hat{x})$ при $k_1 > k_2$ [14].

Оскільки $\varrho^{-k}\varphi \in C(\overline{\Omega})$ при $\varphi \in Z_k(\overline{\Omega})$, то при такій φ та при $v \in M_k(\Omega)$ існує і скінчений $\int_\Omega \varphi v dx = \int_\Omega \varrho^{-k}\varphi\varrho^k v dx$. Звідси $M_k(\Omega)$ (та відповідно $M_k(\Omega,\hat{x})$) є прикладами просторів регулярних узагальнених функцій на просторах $Z_k(\Omega)$ (відповідно $Z_k(\overline{\Omega},\hat{x})$).

Використовуємо позначення:

$M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x}) = \{u \in M_{k,r}(\Omega,\hat{x}) : ||u||_{k,r,\hat{x}} \le C\}$ – куля в $M_{k,r}(\Omega,\hat{x})$,

$V' = V'(S)$ – простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на просторі гладких функцій $V = V(S)$,

$< \varphi, F >$ – значення узагальненої функції $F \in V'$ на основній функції $\varphi \in V$,

запис $s(F) \le s$ при $s \in N$ означає, що порядок сингулярності узагальненої функції $F \in V'(S)$ не більший, ніж s, тобто (див. [19, 20])

$$< \varphi, F >= \sum_{|\alpha|\le s} \int\limits_S D^\alpha\varphi f_\alpha dS \quad \forall\varphi \in V(S), \tag{2}$$

де $f_\alpha \in L_1(S)$ у випадку $V(S) = D(S)$, відповідно $\varrho^{k-|\alpha|}f_\alpha \in L_1(S)$ у випадку $V(S) = Z_k(S,\hat{x})$, $k > s$ для всіх $|\alpha| \le s$ та k нецілому, $\ln\varrho(\cdot,\hat{x})D^\alpha F \in L_1(S)$, якщо $|\alpha| = k \in N \cup \{0\}$; $s(F) \le s$ при $s \le 0$, якщо $D^\alpha F \in L_1(S)$ для всіх $|\alpha| \le -s$ у випадку $V(S) = D(S)$, $\varrho^{|\alpha|-k}D^\alpha F \in L_1(S)$ для всіх $|\alpha| \le -s$ у випадку $V(S) = Z_k(S,\hat{x})$, $k > s$.

Якщо $F \in D'(S)$ та $s(F) \le s \in N \cup \{0\}$, то $F \in (C^s(S))'$ [20], тоді, враховуючи вкладення $Z_k(S,\hat{x}) \subset C^s(S)$ при $k > s$, одержуємо $F \in (C^s(S))' \subset Z'_k(S,\hat{x})$ при $k > s$ та довільній $\hat{x} \in S$. При довільній $\varphi \in Z_k(S,\hat{x})$ маємо $D^\alpha\varphi \in Z_{k-|\alpha|}(S,\hat{x})$, при $f_\alpha \in L_1(S)$ та $|\alpha| \le s < k$ маємо $\varrho^{k-|\alpha|}f_\alpha \in L_1(S)$, тоді при $F \in D'(S)$ порядку сингулярності $s(F) \le s$ виконується (2) також при $\varphi \in Z_k(S,\hat{x})$, а отже, $F \in Z'_k(S,\hat{x})$ і має в сенсі відповідного означення $s(F) \le s$.

Між точками S та S_ε є взаємооднозначна відповідність: $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x) = \psi_\varepsilon(x)$, $x \in S$, тоді $x = \psi_\varepsilon^{-1}(x_\varepsilon)$. Гомеоморфізми ψ та ψ^{-1} нескінченно диференційовні та обмежені разом з усіма похідними [18].

Побудуємо продовження $\varphi \in V(S)$ до нескінченно диференційовної та фінітної в $\overline{\Omega}$ функції $(\psi_\varepsilon^*\varphi)(x)$, наприклад, так: $(\psi_\varepsilon^*\varphi)(x_\varepsilon) = \varphi(\psi_\varepsilon^{-1}(x_\varepsilon)) = \varphi(x)$ для $\varepsilon \in [0, \frac{\varepsilon_0}{2}]$ та $(\psi_\varepsilon^*\varphi)(x_\varepsilon) = 0$ для $\varepsilon > \varepsilon_0$. Одночасно визначено значення $\psi_\varepsilon^*\varphi$ на поверхнях S_ε.

Якщо $\tilde{B}_j(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum\limits_{|\alpha|\le j} \tilde{b}_{j\alpha}(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$, $j = \overline{0, 2m-1}$ – система Діріхле порядку $2m$ на S, то продовжуючи з S всередину Ω коефіцієнти $\tilde{b}_{j\alpha}$ операторів $\tilde{B}_j(x, \frac{\partial}{\partial x})$, на S_ε визначаємо $\tilde{B}_j(x_\varepsilon, \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon})v = \sum\limits_{|\alpha|\le j} (\psi^*\tilde{b}_{j\alpha})(x_\varepsilon)(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon})^\alpha v(x_\varepsilon)$, $v \in V(\overline{\Omega})$. Так визначені оператори $\tilde{B}_j(x_\varepsilon, \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon})$, $j = \overline{0, 2m-1}$ також утворюють систему Діріхле на S_ε (див. ([21, ч.111]). У [22] на прикладі задачі Діріхле для системи рівнянь другого порядку показано, що при досить малих ε умова Лопатинського виконується на S_ε, якщо вона виконувалась на S.

Означення. Кажемо, що регулярна всередині області Ω функція u набуває на S узагальнених крайових значень $F \in V'(S)$ (див. бібліогр. у [14]), якщо існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) dS = <\varphi, F>, \ \varphi \in V(S).$$

Ця границя не залежить від того, як визначено продовження $\varphi \in V(S)$ до функції з $V(S_\varepsilon)$. Справді, переходячи до інтегрування за S, одержуємо

$$\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = \int\limits_{S} \varphi(x + \varepsilon\nu(x)) u(x + \varepsilon\nu(x)) W_\varepsilon(x) dS,$$

де $W_\varepsilon(x)$ – якобіан перетворення $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, $x \in S$. За лемою [19, с. 70] з існування границі цього виразу випливає, що існує також

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S} \lim_{\varepsilon\to 0} (W_\varepsilon(x)\varphi(x + \varepsilon\nu(x))) u(x + \varepsilon\nu(x)) dS = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S} \varphi(x) u(x + \varepsilon\nu(x)) dS =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x) u(x_\varepsilon) dS_\varepsilon.$$

Зауважимо, що $W_\varepsilon \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.

Через $D_r v$ позначаємо $M(r)$-вимірний вектор, компонентами якого є функція v та її похідні до порядку $r \le 2m-1$.

Вважаємо функцію $f(x, z)$ визначеною та неперервною в $\Omega \times \mathbb{R}^{M(R)}$.

Теорема 1. *Нехай s – довільне ціле невід'ємне число, $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}^{M(r)})$, $u \in C^{2m-1}(\Omega) \cap M_s(\Omega)$ – узагальнений розв'язок рівняння*

$$A(x, D)u(x) = f(x, D_r u(x)), \ x \in \Omega \tag{3}$$

та існує

$$\int\limits_{\Omega} |f(x, D_r u(x))| dx < +\infty. \tag{4}$$

Тоді для довільних крайових диференціальних виразів $\tilde{B}_j(x, D)$, $j = \overline{0, 2m-1}$ з нескінченно диференційовними коефіцієнтами, які утворюють систему Діріхле, функції $\tilde{B}_j u$ набувають на S узагальнених крайових значень $\tilde{F}_j \in D'(S)$ ($\tilde{F}_j \in$ $\in Z'_{k+j+1}(S, \hat{x})$ для довільних $k > s$, $\hat{x} \in S$) порядків сингулярностей $s(\tilde{F}_j) \le s + j + 1$ ($< k + j + 1$), $j = \overline{0, 2m-1}$.

Теорема 1 є узагальненням теореми 1.4 із [14] на нелінійний випадок і доводиться подібно. Так само доводиться таке: якщо для узагальненого розв'язку $u \in C^{2m-1}(\Omega)$ рівняння (3) виконується умова (4), $(\frac{\partial}{\partial\nu})^t u$ для всіх $t = \overline{0, 2m-1}$ набувають узагальнених крайових значень із $Z'_{k+t+1}(S, \hat{x})$ (відповідно $D'(S)$) порядків сингулярностей $\leq s+t+1$, де $s < k$, то $u \in M_k(\Omega, \hat{x})$ (відповідно $u \in M_s(\Omega)$) і навіть $u \in M_{k,2m-1}(\Omega, \hat{x})$ (відповідно $u \in M_{s,2m-1}(\Omega)$).

2. Формулювання узагальненої крайової задачі. Нехай функція $f(x, z)$ визначена та неперервна в $\Omega \times \mathbb{R}^{M(r)}$, $F_j \in Z'_{p_j}(S, \hat{x})$, $s(F_j) \leq s_j < p_j$, $p_j \geq 0$, $j = \overline{1, m}$. Розглядаємо нормальну еліптичну крайову задачу

$$A(x, D)u = f(x, D_r u), x \in \Omega, \quad B_j(x, D)u \mid_S = F_j, \quad j = \overline{1, m} \tag{5}$$

за умови, що відповідна їй лінійна однорідна крайова задача однозначно розв'язна.

Далі вважаємо

$k > \hat{k} = \max\{\max_{1\leq j\leq m}(p_j - m_j - 1), -\hat{m} - 1\}, \quad s \geq k_0 = \max\{0, \max_{1\leq j\leq m}(s_j - m_j - 1)\}.$

Формулювання 1 задачі (5). Знайти узагальнений розв'язок $u \in M_{k,r}(\Omega, \hat{x}) \cap$ $\cap C^{2m-1}(\Omega)$ рівняння (3), який задовольняє крайові умови

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi B_j u dS = <\varphi, F_j> \quad \forall \varphi \in Z_{p_j}(S, \hat{x}), \ j = \overline{1, m} \tag{6}$$

та існують

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi T_j u dS \quad \forall \varphi \in Z_{k+\hat{m}_j+1}(S, \hat{x}), \ j = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Формулювання 2 задачі (5). Знайти функцію $u \in M_{k,r}(\Omega, \hat{x})$, яка задовольняє тотожність

$$\int_\Omega A^*\psi u dx = \int_\Omega \psi f dx + \sum_{j=1}^m < \hat{T}_j\psi, F_j > \quad \forall \psi \in X_k(\overline{\Omega}, \hat{x}). \tag{8}$$

Зрозуміло, що інтеграл $\int_\Omega \psi(x) f(x, D_r u(x))dx$ скінчений для розв'язку u задачі та всіх $\psi \in X_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$ і для цього достатньо виконання умови (4).

При $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \leq s_j$, $s_j \geq 0$, $j = \overline{1, m}$ у формулюванні 1 задачі вважаємо $u \in M_s(\Omega) \cap C^{2m-1}(\Omega)$, вимагаємо виконання умов (6) для довільної $\varphi \in D(S)$, умови (7) не накладаються (вони виконуються на підставі теореми 1), а у формулюванні 2 задачі вимагаємо виконання умови (8) для довільної $\psi \in X_s(\overline{\Omega})$.

Подібно до [14, лема 1.10] доводиться, що при $k > \hat{k}$ функція $u \in M_k(\Omega, \hat{x}) \cap$ $\cap C^{2m-1}(\Omega)$ (відповідно при $k \geq k_0$) функція $u \in M_k(\Omega) \cap C^{2m-1}(\Omega)$є розв'язком задачі (5) одночасно в обох формулюваннях.

3. Розв'язок задачі. Позначаємо через $(G_0(x, y), G_1(x, y), \ldots, G_m(x, y))$ вектор-функцію Гріна задачі (5), існування якої та властивості визначено в [23, 24]. Зокрема, правильні оцінки

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma G_j(x, y)| \leq C_{\alpha\gamma j}(1 + |x - y|^{m_j+1-n-|\alpha|-|\gamma|}), \ j = \overline{0, m}, \ m_0 = 2m. \tag{9}$$

Також використовуємо позначення

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} < G_j(x,y), F_j(y) >, x \in \Omega,$$

$$\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x}) = \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x}) D_x^\gamma G_0(x,y), \quad x,y \in \overline{\Omega}, \hat{x} \in S,$$

$R_\gamma = \max\limits_{y\in\overline{\Omega}} \int\limits_\Omega \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x})|D_x^\gamma G_0(x,y)|dx$, $|\gamma| \le r$, $R_0 = \sum\limits_{|\gamma|\le r} R_\gamma$ (ці сталі визначено згідно з лемою 3 [17]).

Лема 1. *Якщо* $F_j \in Z'_{p_j}(S,\hat{x})$, $s(F_j) \le s_j < p_j$, $j = \overline{1,m}$, $k > \hat{k}$, *то* $g \in M_{k,r}(\Omega,\hat{x})$. *Якщо* $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \le s_j$, $j = \overline{1,m}$, $k > k_0 + n - 1$, *то* $g \in M_{k,r}(\Omega)$.

Доведення. За лемою 2 [17] існують такі натуральні числа $N_j < p_j + \frac{n-1}{2}$, такі функції $f_j \in L_2(S)$, що

$$D^\gamma g(x) = \langle D_x^\gamma G_j(x,y), F_j(y)\rangle = \int\limits_S (1-\Delta_S)_y^{\frac{N_j}{2}} D_x^\gamma G_j(x,y) f_j(y) dS, \quad x \in \Omega, \quad j = \overline{1,m},$$

де Δ_S– оператор Лапласа-Бельтрамі на S. Розглянемо інтеграли

$$I_{j,\gamma}(\hat{x}) = \int\limits_S \Big(\int\limits_\Omega \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x})|(1-\Delta_S)_y^{\frac{N_j}{2}} D_x^\gamma G_j(x,y)|dx\Big)|f_j(y)|dS.$$

Використовуючи лему 3 із [17], одержуємо оцінку

$\int_\Omega \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x})|(1-\Delta_S)_y^{\frac{N_j}{2}} D_x^\gamma G_j(x,y)|dx \le c_j(1+\varrho^{m_j+1+k-N_j}(y,\hat{x}))$, де $c_j = const > 0$; $\varrho^{m_j+1+k-N_j}(y,\hat{x}) \in L_2(S)$ при $k > N_j - 1 - m_j + \frac{1-n}{2}$, що виконується при $k > p_j - m_j - 1$, а отже, при $k > \hat{k}$. Тоді

$$I^2_{j,\gamma}(\hat{x}) \le c_j \int\limits_S [1+\varrho^{m_j+1+k-N_j}(y,\hat{x})]^2 dS \cdot \int\limits_S |f_j(y)|^2 dS < +\infty, \quad j = \overline{1,m}, |\gamma| \le r.$$

За теоремою Фубіні при $k > \hat{k}$ одержуємо існування такої додатної сталої C'_1, що

$$||g||_{k,r,\hat{x}} = \sum_{j=1}^m \sum_{|\gamma|\le r} \int\limits_\Omega \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x})| < D_x^\gamma G_j(x,y), F_j(y) > |dS \le \sum_{j=1}^m \sum_{|\gamma|\le r} |I_{j,\gamma}(\hat{x})| \le C'_1.$$

За теоремою про структуру фінітної узагальненої функції із $D'(S)$ [19] маємо

$$|D^\gamma g(x)| = | < D_x^\gamma G_j(x,y), F_j(y) > | \le \sum_{j=1}^m \tilde{C}_{j,\gamma} \max_{y\in S, |\alpha|\le s_j} |D_x^\gamma D_y^\alpha G_j(x,y)|.$$

На підставі оцінок (9) $\quad ||g||_{k,r} \le \sum\limits_{j=1}^m \tilde{C}_j \int\limits_\Omega \varrho^{k+m_j+1-n-|\alpha|}(x)dx < +\infty$ при $k > n - 1 + k_0$.

При $k > \hat{k}$ у просторі $M_{kr}(\Omega,\hat{x})$ розглядаємо інтегродиференціальне рівняння

$$u(x) - \int\limits_\Omega G_0(x,y) f(y, D_r u(y)) dy = g(x), \; x \in \Omega. \qquad (10)$$

Зрозуміло, що для розв'язку u рівняння (10) також $\int_\Omega G_0(\cdot,y) f(y,D_r u(y))dy \in \in M_k(\Omega,\hat{x})$.

Лема 2. *Якщо u – розв'язок рівняння (10) у $M_k(\Omega, \hat{x})$ та виконується (4), то u є розв'язком задачі (5) у формулюванні 2.*

Доведення. Якщо u – розв'язок рівняння (10) в $M_k(\Omega, \hat{x})$, то

$$\varrho^k(x,\hat{x})[u(x) - \int\limits_\Omega G_0(x,y) f(y, D_r u(y))dy - \sum_{j=1}^m < G_j(x,y), F_j(y) >] = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Оскільки $A^*\psi(x) = O(\varrho^k(x,\hat{x}))$ при $x \to \hat{x}$ для $\psi \in X_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$, то існує

$$\int\limits_\Omega A^*\psi(x) u(x) dx = \int\limits_\Omega A^*\psi(x) \left(\int\limits_\Omega G_0(x,y) f(y, D_r u(y)) dy \right) dx +$$
$$+ \int\limits_\Omega A^*\psi(x) \sum_{j=1}^m \langle G_j(x,y), F_j(y) \rangle dx, \;\; \psi \in X_k(\overline{\Omega}, \hat{x}), j = \overline{1,m}. \tag{11}$$

Згідно з лемою 6 із [17], при $k > \hat{k}$ та при $\psi \in X_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$ правильні тотожності $\int\limits_\Omega A^*\psi(x) G_0(x,y) dx = \psi(y), \; y \in \overline{\Omega}, \quad \int\limits_\Omega A^*\psi(x) G_j(x,y) dx = \hat{T}_j \psi(y), \; y \in S, \quad j = \overline{1,m}.$
Тоді $\int\limits_\Omega (\int\limits_\Omega A^*\psi(x) G_0(x,y) dx) f(y, D_r u(y)) dy = \int\limits_\Omega \psi(y) f(y, D_r u(y)) dy$, а за теоремою Фубіні також $\int\limits_\Omega A^*\psi(x) (\int\limits_\Omega G_0(x,y) f(y, D_r u(y)) dy) dx = \int\limits_\Omega \psi(y) f(y, D_r u(y)) dy$.

За аналогом теореми Фубіні [20]
$\int\limits_\Omega A^*\psi(x) < G_j(x,y), F_j(y) > dx =< \int\limits_\Omega A^*\psi(x) G_j(x,y) dx, F_j(y) >=< \hat{T}_j \psi(y), F_j(y) >$,
$j = \overline{1,m}$. Тому з (3) одержуємо (8).

Лема 3. *При $k > \max\{-\hat{m} - 1, r + 1 - 2m\}$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для довільної підобласті $\omega \subset \Omega$, міра якої $m(\omega) < \delta$, та для всіх $y \in \overline{\Omega}$, $\hat{x} \in S$ виконується*

$$\sum_{|\gamma| \le r} \int\limits_\omega |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})| dx < \varepsilon.$$

Доведення. Лема доводиться за схемою доведення леми 3 із [17]. Нехай $\hat{x} \in S$. Розділяючи особливості функції $\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})$ та використовуючи оцінки (9), при $y \in \overline{\Omega}$, $|y - \hat{x}| < d < 1$ матимемо

$$I_{1\gamma}(y,d) = \int\limits_{\omega \cap \{x \in \Omega : |x - \hat{x}| < d\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})| dx \le \int\limits_{\omega \cap \{x \in \Omega : |x - \hat{x}| < \frac{1}{2}|y - \hat{x}|\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})| dx +$$
$$+ \int\limits_{\omega \cap \{x \in \Omega : |x - y| < \frac{1}{2}|y - \hat{x}|\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})| dx + \int\limits_{\omega \cap \{x \in \Omega : |x - \hat{x}| > \frac{1}{2}|y - \hat{x}|, |x - y| > \frac{1}{2}|y - \hat{x}|\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})| dx \le$$
$$\le \tilde{a} \max\{|y - \hat{x}|^{k+2m}, |y - \hat{x}|^{2m - |\gamma|}, |y - \hat{x}|^{k+n}\} < \tilde{a} d,$$

де $\tilde{a}$ – додатна стала. Тоді $I_1(y,d) = \sum\limits_{|\gamma| \le r} I_{1\gamma}(y,d) < ad$, $a = const > 0$. За заданим $\varepsilon > 0$, вибравши $d_0 < \frac{\varepsilon}{3a}$, при $y \in \overline{\Omega}$, $|y - \hat{x}| < d_0$ матимемо $I_{1k}(y, d_0) < \frac{\varepsilon}{3}$.

При $y \in \overline{\Omega}$, $|y - \hat{x}| < d_0$ подібно знаходимо

$$I_{2\gamma}(y, d_0) = \int\limits_{\omega \cap \{x \in \Omega : |x - \hat{x}| > d_0\} = \omega_1} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})| dx =$$

$$= \int\limits_{\omega_1\cap\{x\in\Omega:|x-y|<\frac{1}{2}|y-\hat{x}|\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx + \int\limits_{\omega_1\cap\{x\in\Omega:|x-y|>\frac{1}{2}|y-\hat{x}|\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx \le$$
$$\le \tilde{b}d_0(1+d_0^{-n}m(\omega)).$$

Звідси $I_2(y,d_0)=\sum\limits_{|\gamma|\le r} I_{2\gamma}(y,d) < bd_0 + bd_0^{1-n}m(\omega)$ при всіх $y\in\overline{\Omega}$, $|y-\hat{x}|<d_0$, $\tilde{b}, b$ – додатні сталі.

За заданим $\varepsilon>0$, вибравши $d_0<\min\{\frac{\varepsilon}{3a},\frac{\varepsilon}{3b}\}$ та $m(\omega)<\delta=\frac{\varepsilon d_0^{n-1}}{3b}$, одержуємо $\sum\limits_{|\gamma|\le r}\int\limits_{\omega}|\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx = I_1(y,d_0)+I_2(y,d_0)<\varepsilon$ при всіх $y\in\overline{\Omega}$, $|y-\hat{x}|<d_0$.

При $y\in\overline{\Omega}$, $|y-\hat{x}|\ge d_0$ розглянемо $J_\gamma(y,d_0)=J_{1\gamma}(y,d_0)+J_{2\gamma}(y,d_0)=$
$$= \int\limits_{\omega\cap\{x\in\Omega:|x-y|<\frac{1}{2}d_0\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx + \int\limits_{\omega\cap\{x\in\Omega:|x-y|>\frac{1}{2}d_0\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx.$$

Враховуючи оцінки (9), а також, що $\varrho^k(x,\hat{x})\le cd_0^k$ при $k<0$ та $\varrho^k(x,\hat{x})\le 1$ при $k\ge 0$ ($c=c(k)$ – додатна стала), матимемо
$$J_{1\gamma}(y,d_0)\le C_\gamma \int\limits_{\omega\cap\{x\in\Omega:|x-y|<\frac{1}{2}d_0\}} [1+|x-y|^{2m-n-|\gamma|}]dx\cdot cd_0^{k+|\gamma|}\le$$
$$\le \tilde{c}_1 d_0^{k+|\gamma|+n}+\tilde{c}_2 d_0^{k+2m}<c_1 d_0$$
при $k+|\gamma|<0$, де $C_\gamma=C_{\gamma\alpha j}$ при $|\alpha|=j=0$, $c_1=\tilde{c}_1+\tilde{c}_2$, $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2$ – додатні сталі,
$$J_{1\gamma}(y,d_0)\le C_\gamma \int\limits_{\omega\cap\{x\in\Omega:|x-y|<\frac{1}{2}d_0\}} [1+|x-y|^{2m-n-|\gamma|}]dx\le \tilde{c}_1' d_0^n+\tilde{c}_2' d_0^{2m-|\gamma|}<c_1' d_0$$
при $k+|\gamma|\ge 0$, де $c_1'=\tilde{c}_1'+\tilde{c}_2'$, $\tilde{c}_1',\tilde{c}_2'$ – додатні сталі;
$$J_{2\gamma}(y,d_0)\le 2C_\gamma(\tfrac{d_0}{2})^{2m-n-|\gamma|}\cdot\{\int\limits_{\omega\cap\{x\in\Omega:|x-y|>\frac{1}{2}d_0,|x-\hat{x}|<\frac{1}{2}d_0\}}\varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x})dx+$$
$$+c(k+|\gamma|)d_0^{k+|\gamma|}m(\omega)\}\le \tilde{c}_2 d_0^{2m-n-|\gamma|}[d_0^{k+n+|\gamma|}+d_0^{k+|\gamma|}m(\omega)]=$$
$$=\tilde{c}_2 d_0^{k+2m}+\tilde{c}_2 d_0^{k+2m-n}m(\omega)<\tilde{c}_2 d_0+\tilde{c}_2 d_0^{1-n}m(\omega)$$
при $k+|\gamma|<0$,
$$J_{2\gamma}(y,d_0)\le 2C_\gamma c(k+|\gamma|)(\tfrac{d_0}{2})^{2m-n-|\gamma|}m(\omega)\le \tilde{c}_2' d_0^{1-n}m(\omega)$$
при $k+|\gamma|\ge 0$, $\tilde{c}_2,\tilde{c}_2'$ – додатні сталі.

Отже, $J_\gamma(y,d_0)\le C_1 d_0 + C_2 d_0^{1-n}m(\omega)$, додатні сталі C_1, C_2 виражаються через сталі $c_1, c_1', \tilde{c}_2, \tilde{c}_2'$, а тоді
$$J(y,d_0)=\sum_{|\gamma|\le r} J_\gamma(y,d_0)<C(r)d_0+C(r)d_0^{1-n}m(\omega),\ C(r)\ \text{–додатна стала.}$$
За заданим $\varepsilon>0$, вибравши $d_0<\min\{\frac{\varepsilon}{3a},\frac{\varepsilon}{3b},\frac{\varepsilon}{2C(r)}\}$ та $m(\omega)<\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{3b},\frac{\varepsilon}{2C(r)}\}d_0^{n-1}$, матимемо попередню оцінку $I(y,d_0)<\varepsilon$ при $|y-\hat{x}|<d_0$, а також $J(y,d_0)<\varepsilon$ при $|y-\hat{x}|>d_0$.

Теорема 2. *Нехай $k>\max\{\hat{k}, r+1-2m\}$, функція f задовольняє умови:*

1) існує така додатна стала C_0, що для довільних сталої $C>C_0$, $v\in M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x})$
$$2R_0\int\limits_\Omega |f(y,D_r v(y))|dy<C; \tag{12}$$

2) існує додатна неперервна функція h, $h(0+)=0$, така що
$$\int\limits_\Omega |f(y,D_r v_1(y))-f(y,D_r v_2(y))|dy\le h(||v_1-v_2||_{k,r,\hat{x}})\quad \forall v_1,v_2\in M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x}). \tag{13}$$

Тоді існує розв'язок $u \in M_{k,r}(\Omega, \hat{x})$ рівняння (10) та задачі (5) у формулюванні 2, який задовольняє умову (4).

Доведення. Використаємо теорему Шаудера [25, с.291]. Введемо оператор

$$H : (Hv)(x) = \int\limits_{\Omega} G_0(x,y) f(y, D_r v(y)) dy + g(x), \ x \in \Omega, \ v \in M_{k,r}(\Omega, \hat{x}).$$

Маємо $||Hv||_{k,r,\hat{x}} = \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{|\gamma| \le r} \varrho^{k+|\gamma|}(x, \hat{x}) |D^\gamma \big(\int\limits_{\Omega} G_0(x,y) f(y, D_r v(y)) dy + g(x) \big)| dx.$

Оскільки $\int_\Omega \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x}) |D_x^\gamma G_0(x,y)| dx \le R_\gamma$, то з умови (12) за теоремою Фубіні одержуємо

$$||Hv||_{k,r,\hat{x}} \le R_0 \int\limits_{\Omega} |f(y, D_r v(y))| dy + ||g||_{k,r,\hat{x}} \le \tfrac{C}{2} + ||g||_{k,r,\hat{x}}, \ v \in M_{k,r}(\Omega, \hat{x}).$$

За лемою 1 при $k > \hat{k}$ існує така додатна стала C_1, що $||g||_{k,r,\hat{x}} = C_1$. Вибираючи $C > \max(C_0, 2C_1)$, одержуємо $||Hv||_{k,r,\hat{x}} \le \frac{C}{2} + C_1 < C$ для всіх $v \in M_{k,r,C}(\Omega, \hat{x})$, так що при таких C

$$H : M_{k,r,C}(\Omega, \hat{x}) \to M_{k,r,C}(\Omega, \hat{x}). \tag{14}$$

Доведемо, що оператор H цілком неперервний на $M_{k,r,C}(\Omega, \hat{x})$.

Для довільних $v_1, v_2 \in M_{k,r,C}(\Omega, \hat{x})$ розглянемо

$$||Hv_1 - Hv_2||_{k,r,\hat{x}} = \sum_{|\gamma| \le r} \int\limits_{\Omega} \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x}) |(D^\gamma H v_1)(x) - (D^\gamma H v_2)(x)| dx =$$

$$= \sum_{|\gamma| \le r} \int\limits_{\Omega} \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x}) | \int\limits_{\Omega} D_x^\gamma G_0(x,y) [f(y, D_r v_1(y)) - f(y, D_r v_2(y))] dy | dx. \tag{15}$$

Оскільки $\sum\limits_{|\gamma| \le r} \int\limits_{\Omega} \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x}) |D_x^\gamma G_0(x,y)| dx \le R_0$ при $y \in \overline{\Omega}$, то за умовою (13) та теоремою Фубіні одержуємо існування такої додатної сталої K_1, що $||Hv_1 - Hv_2||_{k,r,\hat{x}} \le K_1 h(||v_1 - v_2||_{k,r,\hat{x}})$, а тоді H – неперервне відображення $\tilde{M}_{k,r,C}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ в себе.

За теоремою Рісса [25, с.242] для компактності H на $M_{k,r,C}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

а) існує така додатна стала $\tilde{C} > 0$, що $||Hv||_{k,r,\hat{x}} \le \tilde{C}$ для всіх $v \in \tilde{M}_{k,r,C}(\overline{\Omega}, \hat{x})$;

б) для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для довільних $v \in \tilde{M}_{k,r,C}(\overline{\Omega}, \hat{x})$, $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| < \delta$ $\quad ||(Hv)(x+z) - (Hv)(x)||_{k,r,\hat{x}} < \varepsilon$.

Перше твердження довели раніше. Доведемо виконання другого. Вважаємо $\varrho(x+$

$z, \hat{x}) = 0$ та $G_0(x+z, y) = 0$, якщо $x+z \notin \Omega$. При $z \in \mathbb{R}^n$, $v \in M_{k,r,C}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ розглянемо

$$||(Hv)(x+z) - (Hv)(x)||_{k,r,\hat{x}} =$$

$$= \sum_{|\gamma| \le r} \int_\Omega |\varrho^{k+|\gamma|}(x+z, \hat{x})(D^\gamma Hv)(x+z) - \varrho^{k+|\gamma|}(x, \hat{x})(D^\gamma Hv)(x)|dx \le$$

$$\le \sum_{|\gamma| \le r} \int_\Omega |\varrho^{k+|\gamma|}(x+z, \hat{x}) D_x^\gamma g(x+z) - \varrho^{k+|\gamma|}(x, \hat{x}) D_x^\gamma g(x)|dx +$$

$$+ \sum_{|\gamma| \le r} \int_\Omega \left(\int_\Omega |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})||f(y, D_r v(y))|dy \right) dx = J_1(z) + J_2(z, D_r v).$$

Оскільки $g \in M_{k,r}(\Omega, \hat{x})$ (за лемою 1), а отже, $\varrho^{k+|\gamma|}(\cdot, \hat{x}) D^\gamma g \in L_1(\Omega)$ при всіх $\hat{x} \in S$, $|\gamma| \le r$, то за теоремою про неперервність у цілому функцій із $L_1(\Omega)$ [25] маємо: для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$, що для всіх $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| < \delta'$,

$$J_1(z) = ||g(x+z) - g(x)||_{k,r,\hat{x}} < \tfrac{\varepsilon}{6}.$$

Через Ω_η позначаємо підобласть Ω, обмежену поверхнею S_η. Але $dist(\Omega_\eta, S) = \eta$, тому за лемою 3 для довільного $\varepsilon > 0$ існують такі числа $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$, $\eta_0 = \eta_0(\delta_0) > 0$, що $m(\Omega \setminus \Omega_{\eta_0}) < \delta_0$ та

$$I_{21}(y) = \int_{\Omega \setminus \Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma| \le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx < \tfrac{R_0}{3C}\varepsilon \quad \text{для всіх } y \in \Omega.$$

Через ω^z позначимо зсув множини ω на вектор z. Оскільки $m(\omega^z) = m(\omega)$, то

$$I'_{21}(y, z) = \int_{\Omega \setminus \Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma| \le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x})|dx =$$

$$= \int_{(\Omega \setminus \Omega_{\eta_0})^{-z}} \sum_{|\gamma| \le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx < \frac{R_0}{3C}\varepsilon \text{ для всіх } y \in \Omega, z \in \mathbb{R}^n.$$

Розглянемо при $z \in \mathbb{R}^n$, $v \in M_{k,r,C}(\Omega, \hat{x})$

$$\int_\Omega (\int_\Omega \sum_{|\gamma| \le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx)|f(y, D_r v(y))|dy =$$

$$= \int_\Omega (\int_{\Omega \setminus \Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma| \le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx)|f(y, D_r v(y))|dy +$$

$$+ \int_\Omega (\int_{\Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma| \le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx)|f(y, D_r v(y))|dy =$$

$$= \tilde{J}_{21}(z, D_r v) + \tilde{J}_{22}(z, D_r v).$$

Згідно з вибором чисел δ_0, η_0 та умовою (12),

$$\tilde{J}_{21}(z, D_r v) \le \int_\Omega (I_{21}(y) + I'_{21}(y, z))|f(y, D_r v(y))|dy < 2 \cdot \tfrac{R_0}{3C}\varepsilon \int_\Omega |f(y, D_r v(y))|dy < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Знайдемо оцінку $\tilde{J}_{22}(z, D_r v)$. Запишемо

$$\tilde{J}_{22}(z, D_r v) = \int_{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}} (\int_{\Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma| \le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx)|f(y, D_r v(y))|dy +$$

$$+ \int_{\Omega_{\frac{\eta_0}{4}}} (\int_{\Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma| \le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx)|f(y, D_r v(y))|dy =$$

$$= \tilde{J}_{221}(z, D_r v) + \tilde{J}_{222}(z, D_r v).$$

Для всіх $y \in \overline{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}}$, $x \in \overline{\Omega}_{\eta_0}$, $|z| < \frac{\eta_0}{2}$ маємо $x + z \in \Omega_{\frac{1}{2}\eta_0}$, $|x - y| \geq \frac{3\eta_0}{4}$, $|x + z - y| \geq |x - y| - |z| \geq \frac{3\eta_0}{4} - |z| > \frac{\eta_0}{4}$. Тому за рівномірною неперервністю функцій $\tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})$ на замкненій множині $V : x \in \overline{\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}}, y \in \overline{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}}, \hat{x} \in S$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) < \frac{\eta_0}{4}$, що для довільних $x \in \overline{\Omega_{\eta_0}}$, $y \in \overline{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}}$, $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| < \delta_1$

$$\sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x + z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})| < \frac{R_0}{Cm(\Omega)}\varepsilon.$$

Звідси та з умови (12)

$$\tilde{J}_{221}(z, D_r v) = \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}} (\int\limits_{\Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x + z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx)|f(y, D_r v(y))|dy <$$

$$< \frac{R_0 m(\Omega_{\eta_0})}{Cm(\Omega)}\varepsilon \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}} |f(y, D_r v(y))|dy < \frac{R_0}{C}\varepsilon \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}} |f(y, D_r v(y))|dy.$$

Виберемо $\eta_1 < \min\{\frac{\eta_0}{4}, (\frac{\delta_0}{\sigma_n})^{\frac{1}{n}}\}$, де σ_n – площа поверхні одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$. При $y \in \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}$ множини $\omega_{\eta_1}(y) = \{\xi \in \Omega : |\xi - y| < \eta_1\}$ знаходяться всередині Ω. Оскільки $m(\omega_{\eta_1}) = \sigma_n \eta_1^n < \delta_0$, то за лемою 3 для всіх $y \in \overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{4}}$

$$I_{22}(y) = \int\limits_{\omega_{\eta_1}(y)} \sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx < \frac{R_0\varepsilon}{3C},$$

а при $|z| < \delta_2 < \min\{\delta_0, \delta_1, \frac{\eta_1}{2}\}$ також

$$I'_{22}(y, z) = \int\limits_{\omega_{\eta_1}(y)} \sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x + z, y, \hat{x})|dx = \int\limits_{\omega^{-z}_{\eta_1}(y)} \sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx < \frac{R_0\varepsilon}{3C}.$$

При $y \in \overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{4}}$, $x \in \overline{\Omega_{\eta_0} \setminus \omega_{\eta_1}(y)}$, та $|z| < \delta_2$ маємо $x + z \in \Omega_{\frac{7}{8}\eta_0} \subset \overline{\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}}$, $|x - y| \geq \eta_1$, $|x + z - y| \geq |x - y| - |z| \geq \eta_1 - \delta_2 > \frac{\eta_1}{2}$. Тому за рівномірною неперервністю функцій $\tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})$ на замкненій множині $V_1 : y \in \overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{4}}, x \in \overline{\Omega_{\frac{\eta_0}{2}} \setminus \omega_{\eta_1}(y)}$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) < \delta_2$, що для довільних $y \in \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}$, $x \in \overline{\Omega_{\eta_0} \setminus \omega_{\eta_1}(y)}$, $|z| < \delta_3$

$$\sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x + z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})| < \frac{R_0}{3Cm(\Omega)}\varepsilon,$$

звідки $I_{23}(y, z) = \int\limits_{\Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x + z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx < \frac{R_0\varepsilon}{3C}$.

Враховуючи (12), при $|z| < \delta_3$ одержуємо

$$\tilde{J}_{222}(z, D_r v) < \int\limits_{\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}} (I_{22}(z) + I'_{22}(y, z) + I_{23}(z))|f(y, D_r v(y))|dy < \frac{R_0\varepsilon}{C} \int\limits_{\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}} |f(y, D_r v(y))|dy.$$

Тоді $\tilde{J}_{22}(z, D_r v) \leq \frac{R_0\varepsilon}{C}(\int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{2}}} |f|dy + \int\limits_{\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}} |f|dy) = \frac{R_0\varepsilon}{C} \int\limits_{\Omega} |f|dy < \frac{\varepsilon}{2}$, тому при $|z| < \delta_3$ $\tilde{J}_{21}(z, D_r v) + \tilde{J}_{22}(z, D_r v) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{5\varepsilon}{6}$.

За теоремою Фубіні також $J_2(z, D_r v) < \frac{5\varepsilon}{6}$. Отож, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \min[\delta', \delta_3]$, що для всіх $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| < \delta$ та для довільної $v \in M_{k,r,C}(\Omega, \hat{x})$

$$||(Hv)(x + z) - (Hv)(x)||_{k,r,\hat{x}} \leq J_1(z) + J_2(z, D_r v) < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{5\varepsilon}{6} = \varepsilon.$$

За теоремою Шаудера одержуємо твердження теореми.

Зауваження 1. Умови теореми 2, зокрема, виконуються для функції

$$|f(y,z)| \le \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} |z_\gamma|^{q_s}, \quad y \in \Omega, \quad z \in \mathbb{R}^{M(r)}, \tag{16}$$

$$|f(y,z^1) - f(y,z^2)| \le \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} |z^1_\gamma - z^2_\gamma|^{q_s}, \quad y \in \Omega,\ z^1, z^2 \in \mathbb{R}^{M(r)} \tag{17}$$

при $A_s = const \ge 0, \quad 0 < q_s < \frac{n}{n+k+s}$, $s = \overline{0,r}$.

Справді, використовуючи нерівність Гельдера, для довільної $v \in M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x})$ одержуємо

$$\int_\Omega |f(y, D_r v(y))| dy \le \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} \int_\Omega |D^\gamma v(y)|^{q_s} dy =$$

$$= \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} \int_\Omega \varrho^{-(k+s)q_s}(y,\hat{x}) [\varrho^{k+s}(y,\hat{x}) |D^\gamma v(y)|]^{q_s} dy \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} (\int_\Omega \varrho^{-\frac{(k+s)q_s}{1-q_s}}(y,\hat{x}) dy)^{1-q_s} \cdot (\int_\Omega \varrho^{k+s}(y,\hat{x}) |D^\gamma v(y)| dy)^{q_s} \le \sum_{s=0}^{r} \tilde{A}_s ||v||^{q_s}_{k,r},$$

де $\tilde{A}_s = C(s) A_s (\int_\Omega \varrho^{-\frac{(k+s)q_s}{1-q_s}}(y,\hat{x}) dy)^{1-q_s}$, $C(s)$ – додатна стала (кількість мультиіндексів γ з довжиною s), визначені при $0 < q_s < \frac{n}{n+k+s}, \quad s = \overline{0,r}$.

Тоді при $v \in M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x})$ матимемо $\int\limits_\Omega |f(y, D_r v(y))| dy \le \sum\limits_{s=0}^{r} \tilde{A}_s C^{q_s}$.

За властивостями степеневої функції at^q, $q \in (0,1)$ для довільного числа $\tilde{A}_s$ існує таке число $C_{s0} > 0$, що для всіх $C > C_{s0}$ виконується $2R_0 \tilde{A}_s C^{q_s} < \frac{C}{r+1}$, тоді при всіх $C > \max\limits_{0 \le s \le r} C_{s0} = C_0$ матимемо $2R_0 \sum\limits_{s=0}^{r} \tilde{A}_s C^{q_s} < C$. Отже, виконується (12).

Так само показуємо, що для довільних $v_1, v_2 \in M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x})$

$$\int_\Omega |f(y, D_r v_1(y)) - f(y, D_r v_2(y))| dy \le \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} \int_\Omega |D^\gamma v_1(y) - D^\gamma v_2(y)|^{q_s} dy =$$

$$= \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} \int_\Omega \varrho^{-(k+s)q_s}(y,\hat{x}) [\varrho^{k+s}(y,\hat{x}) |D^\gamma v_1(y) - D^\gamma v_2(y)|]^{q_s} dy \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} (\int_\Omega \varrho^{-\frac{(k+s)q_s}{1-q_s}}(y,\hat{x}) dy)^{1-q_s} \cdot (\int_\Omega \varrho^{k+s}(y,\hat{x}) |D^\gamma v_1(y) - D^\gamma v_2(y)| dy)^{q_s} \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{r} \tilde{A}_s ||v_1 - v_2||^{q_s}_{k,r}.$$

Функція $h(t) = \sum\limits_{s=0}^{r} \tilde{A}_s t^{q_s}$ задовольняє умови теореми.

Зауваження 2. Подібно доводимо, що при $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \le s_j$, $s_j \ge 0$, $j = \overline{1,m}$, $k > k_0 + n - 1$ та виконанні умов, як у теоремі 2, але з заміною простору $M_{k,r}(\Omega,\hat{x})$ на $M_{k,r}(\Omega)$, задача (4) у формулюванні 2 має розв'язок $u \in M_{k,r}(\Omega)$. Зокрема, такі умови виконуються для функції f, яка задовольняє (16) та (17) при $q_s < \frac{1}{k+s+1}$, $s = \overline{1,r}$.

Приклад 1. Розглянемо узагальнену задачу Діріхле ($F_j \in Z'_{p_j}(S,\hat{x}), j=1,2$)

$$\Delta^2 u = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^q, \; u|_S = F_1, \; \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = F_2. \tag{18}$$

Перевіримо виконання умов теореми 2 при $q \in (0,1)$: $r=2, \hat{m}=2$, при $k > \max(p_1-1,$ $p_2-2,-1)$ виконуються умови лем 1, 3; при $0 < q < \frac{n}{n+k+2}$ права частина рівняння задовольняє умови (16) та (17), тому згідно з зауваженням 2 вона задовольняє умови теореми 2.

За теоремою 2 при

$$\max\{p_1-1, p_2-2, -1\} < k < \frac{n}{q} - n - 2, \tag{19}$$

а отже, при $0 < q < \frac{n}{n+1}$, $0 \le p_1 < \frac{n}{q} - n - 1$, $0 \le p_2 < \frac{n}{q} - n$ існує розв'язок $u \in M_{k,2}(\Omega,\hat{x})$ задачі (18), де k задовольняє умову (19). Бачимо, що числа p_1 та p_2 можуть набувати додатних значень, досить великих при малих значеннях q. Зокрема, $u \in L_1(\Omega)$ при $p_1 < 1$, $p_2 < 2$.

Теорема 3. *Нехай $k > \hat{k}$, $\int_\Omega |f(y,v(y))dy < +\infty$ для всіх $v \in M_k(\Omega,\hat{x})$ та існує така стала $K \in (0,1)$, що для довільних $v_1, v_2 \in M_k(\Omega,\hat{x})$*

$$2\max_{y\in\overline{\Omega}} \int_\Omega \varrho^k(x,\hat{x})|G_0(x,y)|dx \cdot \int_\Omega |f(y,v_1(y)) - f(y,v_2(y))|dy \le K||v_1 - v_2||_k.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $u \in M_k(\Omega,\hat{x})$ інтегродиференціального рівняння (10) та задачі (5) у формулюванні 2.

Твердження теореми 3 одержуємо на підставі принципу стискуючих відображень.

Зауваження 3. Як у [16], доводиться таке: якщо виконуються умови теореми 2 та для довільної підобласті Ω' області Ω, розміщеної строго всередині Ω, довільних $s \le r$, $x \in \overline{\Omega'}$ для розв'язку $u \in M_{k,r}(\Omega,\hat{x})$ задачі (5)

$$\int_{\Omega'} |x-y|^{2m-n-s}|f(y,D_r u(y))|dy < +\infty, \tag{20}$$

то $u \in C^{2m-1}(\Omega)$; якщо, крім того, $r \le 2m-2$ та функція $f(x,z)$ має неперервні похідні першого порядку за всіма аргументами $x \in \Omega, z \in \mathbb{R}^{M(r)}$, то $u \in C^{2m}(\Omega)$.

Функція f, яка задовольняє умови (16) та (17), при $0 < q_s < \min\{\frac{n}{k+n+s}, \frac{2m-s}{n}\}$, $s = \overline{0,r}$ також задовольняє (20).

---

1. *Крейн С.Г., Симонов А.С.* Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167, №6. – С. 1226-1229.
2. *Kondrat'ev V.A. and Nikishkin V.A.* Asymptotic, near the boundary, of a solution of a singular boundary-value problem for a semilinear elliptic equation // Diff. uravn. – 1990. – Vol. 26, №3. – P. 465-468.

3. *Похожаев С.* О задаче Дирихле для уравнения $\Delta u = u^2$ // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 134, №4. – P. 769-772.
4. *Gmira A., Veron L.* Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equation // Indiana Math. J. – 1991. – Vol. 64. – P. 271-324.
5. *Le Gall J.-F.* The Brounian snake and the solutions of $\Delta u = u^2$ in a domain // Probab. Theory Related Fields. – 1995. – Vol. 102. – P. 393-432.
6. *Dynkin E.B., Kuznetsov S.E.* Trace on the boundary for solutions of nonlinear equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol. 350. – P. 4499-4519.
7. *Marcus M., Veron L.* Removable singularities and boundary traces // J. Math. Pures Appl. – 2001. – Vol. 80, №1. – P. 879-900.
8. *Boccardo L., Gallovet Th.* Non-linear elliptic equations with right-hand side measures // Comm. Partial Dif. Eqns. – 1992. – Vol. 17. – P. 641-655.
9. *Rakotoson J.M.* Generalized solutions in a new-type of sets for problems with measures as data // Diff. Integral Eqns. – 1993. – Vol. 6. – P. 27-36.
10. *Alvino A., Ferone V., Trombetti G.* Nonlinear elliptic equations with lower-order terms // Diff. Int. Equations. – 2001. – Vol. 14. – P. 1169-1180.
11. *Benilan Ph., Boccardo L.,Gallouet T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J.L.* An L_1-theory of existence and uniquenessof solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1995. – Vol. 22. – P. 241-273.
12. *Poretta A.* Nonlinear equations with natural growth terms and measure data // 2002-Fez Conference on Partial Differentials Equations. Electron. J. Diff. Eqns. Conf. 09, 2002. – P. 183-202.
13. *Kovalevskii A.A.* Integrability of solutions of nonlinear elliptic equations with right-hand sides from classes close to L^1 // Math Notes. – 2001. – Vol. 70. – P. 337-346.
14. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D': Монографія. – Львів, 2002.
15. *Лопушанська Г.П.* Задача Діріхле для квазілінійних еліптичних рівнянь у просторі розподілів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1990. – Вип. 35. – С. 26-31.
16. *Лопушанська Г.П., Жидик У.В.* Про узагальнені граничні значення розв'язків квазілінійного еліптичного рівняння 2-го порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 126-138.
17. *Лопушанська Г.П.* Узагальнені крайові задачі для лінійних та напівлінійних еліптичних рівнянь // Укр. мат. вісник. – 2005. – Т. 2, №3. – С. 377-394.
18. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М., 1971.
19. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. – М., 1965.
20. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М., 1981.
21. *Ройтберг Я.А.* Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях. I-IV. – Чернигов, 1990, 1991.
22. *Лопатинский Я.Б.* Граничные свойства решений дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа // Докл. АН СССР. – 1956. – N2.
23. *Березанский Ю.М., Ройтберг Я.А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач // Укр. мат. журн. – 1967. – Т. 19, №5. – С. 3-32.
24. *Красовский Ю.П.* Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1969. – Т. 33, №1. – С. 109-137.
25. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М., 1965.

GENERALIZED SOLUTIONS TO SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATION WITH STRONG POWER SINGULARITIES AT FRONTIER

Halyna LOPUSHANSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1,
e-mail: diffeq@franko.lviv.ua

The sufficient conditions of the existence of the solution of the boundary value problem for quasilinear with linear main part elliptic $2m$ order equation and given generalized functions with strong power singularities onto the frontier are obtained.

Key words: semilinear elliptic equation, generalized function, weight space, nonlinear integrodifferential equation.

Стаття надійшла до редколегії 12.05.2006

Прийнята до друку 24.10.2007