ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.200-206 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.200-206*

УДК 517.537.72

ПРО НАЛЕЖНІСТЬ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ СКІНЧЕННОГО R-ПОРЯДКУ ДО КЛАСУ ЗБІЖНОСТІ

Оксана МУЛЯВА[1], Мирослав ШЕРЕМЕТА[2]

[1]*Київський національний університет харчових технологій, 01004, Київ, вул. Володимирська, 68*
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Для ряду Діріхле $F(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\}$ з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a=0$ нехай $M(\sigma)=\sup\{|F(\sigma+it)|:t\in\mathbb{R}\}$ і $\mu(\sigma)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n):n\ge 0\}$ $(\sigma<0)$. Визначено умови на λ_n для еквівалентності співвідношень $\int\limits_{-1}^{0}\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|^2\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}d\sigma<+\infty$ і $\int\limits_{-1}^{0}\frac{\ln \mu(\sigma,F)}{|\sigma|^2\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}d\sigma<+\infty$ $(\varrho>0)$.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимум модуля, максимальний член, клас збіжності.

1. Нехай $\Lambda=(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел $(\lambda_0=0)$, а $S^0(\Lambda)$ – клас рядів Діріхле

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\},\quad s=\sigma+it, \tag{1}$$

з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a=0$. Для $\sigma<0$ нехай $M(\sigma,F)=$ $=\sup\{|F(\sigma+it)|:t\in\mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n):n\ge 0\}$ – максимальний член ряду (1), $\nu(\sigma,F)=\max\{n\ge 0:|a_n|\exp(\sigma\lambda_n)=\mu(\sigma,F)\}$ – його центральний індекс, а $\varkappa_n=\dfrac{\ln|a_n|-\ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$.

Величина $\varrho_R=\varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0}|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)$ називається [1] R-порядком $F\in S^0(\Lambda)$. За умови $0<\varrho_R<+\infty$ клас збіжності означається [2] умовою

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|^2\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}d\sigma<+\infty. \tag{2}$$

В [2] доведено таке: якщо $\ln n = O(\ln \lambda_n)$ $(n \to \infty)$, то для того, щоб ряд (1) належав до класу збіжності, необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\varkappa_n)$ неспадна, достатньо, щоб $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{\ln^+ |a_n|}{\lambda_n}\right)^2 \exp\left\{-\frac{\varrho_R \lambda_n}{\ln^+ |a_n|}\right\} < +\infty$. Умову $\ln n = O(\ln \lambda_n)$ $(n \to \infty)$ у доведенні цього твердження використовували тільки для того, щоб показати, що співвідношення (2) рівносильне співвідношенню

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty. \tag{3}$$

Виникає запитання про істотність умови $\ln n = O(\ln \lambda_n)$ $(n \to \infty)$ для еквівалентності співвідношень (2) і (3). Цій проблемі присвячена наша стаття. Ми покажемо, що наведена умова досить вузька, зазначимо умову, близьку до необхідної. Іншими словами, доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Для того, щоб для кожної функції $F \in S^0(\Lambda)$ співвідношення (2) і (3) були рівносильними, необхідно, щоб $\ln n = O(\lambda_n / \ln^2 \lambda_n)$ $(n \to \infty)$, і достатньо $\ln n \le \lambda_n / \ln^q \lambda_n$ $(n \ge n_0)$ з $q > 3$.*

Ця теорема є об'єднанням нижче доведених тверджень 1 і 2.

2. Необхідна умова еквівалентності співвідношень (2) і (3). Для визначення такої умови використовуватимемо такі леми.

Лема 1. (3) . *Нехай $\alpha : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ і $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ – невід'ємні неперервні зростаючі до $+\infty$ функції і $\alpha(x + O(1)) \sim \alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Якщо $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (\alpha(n)/\gamma(\lambda_n)) > 1$, то існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \le \alpha^{-1}(\gamma(\lambda_k^*)) + 1$ для всіх $k \ge 1$ і $k_j \ge \alpha^{-1}(\gamma(\lambda_{k_j}^*))$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.*

Лема 2. (4, с. 10) . *Якщо $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, то абсциса σ_a абсолютної збіжності ряду (1) обчислюється за формулою $\sigma_a = \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}$.*

Лема 3. *Співвідношення (3) рівносильне співвідношенню*

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F)}}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty. \tag{4}$$

Доведення. Справді, оскільки [4, с. 17] $\ln \mu(\sigma, F) = \ln \mu(-1, F) + \int\limits_{-1}^{\sigma} \lambda_{\nu(x,F)} dx$, то

$$l\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma = \int\limits_{-1}^{0} \frac{d\sigma}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} \int\limits_{-1}^{\sigma} \lambda_{\nu(x,F)} dx + K_1 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \lambda_{\nu(x,F)} dx \int\limits_{x}^{0} \frac{d\sigma}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} + K_1 = \frac{1}{\varrho_R} \int\limits_{-1}^{0} \frac{\lambda_{\nu(x,F)}}{\exp\{\varrho_R/|x|\}} dx + K_1, K_1 \equiv \text{const} > 0,$$

тобто співвідношення (3) і (4) рівносильні.

Тепер можемо довести таке твердження.

Твердження 1. *Умова* $\ln n = O(\lambda_n/\ln^2\lambda_n)$ $(n\to\infty)$ *є необхідною для того, щоб для кожної функції* $F\in S^0(\Lambda)$ *співвідношення (2) і (3) були рівносильними.*

Доведення. Припустимо, що умова $\ln n = O(\lambda_n/\ln^2\lambda_n)$ $(n\to\infty)$ не виконується. Тоді існує додатна неперервна повільно зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція l така, що $l(x)=o(\ln^2 x)$ $(x\to+\infty)$ і $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\lambda_n l(\lambda_n)/\ln^2\lambda_n}>1$. За лемою 1 з $\alpha(x)=\ln x$ і $\gamma(x)=xl(x)/\ln^2 x$, $x\ge 1$, існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k\le\exp\left\{\lambda_k^* l(\lambda_k^*)/\ln^2\lambda_k^*\right\}+1$ для всіх $k\ge 1$ і $k_j\ge\exp\left\{\lambda_{k_j}^* l(\lambda_{k_j}^*)/\ln^2\lambda_{k_j}^*\right\}$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Якщо $\lambda_n\ne\lambda_k^*$, то приймемо $a_n=0$, а з метою скорочення запису в отриманому ряді Діріхле замінимо λ_k^* на λ_n. Прийдемо до ряду Діріхле (1), де послідовність (λ_n) така, що $\ln n\le\lambda_n l(\lambda_n)/\ln^2\lambda_n+1$ для всіх $n\ge1$ і $\ln n_j\ge\lambda_{n_j}l(\lambda_{n_j})/\ln^2\lambda_{n_j}$ для деякої зростаючої послідовності (n_j) натуральних чисел. Послідовність (n_j) можемо вважати такою, що $\sum\limits_{j=j_0}^{\infty}\dfrac{1}{l(\lambda_{n_{j+1}})}<+\infty$ і $n_{j+1}>2n_j$ для всіх $j\ge1$.

Нехай (q_k) – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, а $m_j=[n_{j+1}/2]$. Приймемо $n_0=0$, $a_{n_0}=1$, $a_n=0$ для всіх $n_j<n<m_j$,

$$a_{n_{j+1}}=\prod_{k=0}^{j}\exp\{|q_k|(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k})\},\quad j=1,2,3,\ldots,\tag{5}$$

і

$$a_n=a_{n_j}\exp\{|q_j|(\lambda_n-\lambda_{n_j})\},\quad m_j\le n<n_{j+1},\tag{6}$$

тобто отримуємо ряд Діріхле

$$F^*(s)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(a_{n_j}\exp\{s\lambda_{n_j}\}+\sum_{n=m_j}^{n_{j+1}-1}a_n\exp\{s\lambda_n\}\right).\tag{7}$$

З (5) і (6) легко випливає, що

$$\frac{\ln a_{n_j}-\ln a_{n_{j+1}}}{\lambda_{n_{j+1}}-\lambda_{n_j}}=\frac{\ln a_{n_j}-\ln a_{m_j}}{\lambda_{m_j}-\lambda_{n_j}}=\frac{\ln a_n-\ln a_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}=q_j,\quad m_j\le n<n_{j+1}.$$

Якщо $q_j\le\sigma<q_{j+1}$, то $\nu(\sigma,F^*)=n_{j+1}$ і $\mu(\sigma,F^*)=a_{n_{j+1}}\exp\{\sigma\lambda_{n_{j+1}}\}$. Звідси випливає, що

$$\int_{q_1}^{0}\frac{\lambda_{\nu(\sigma,F^*)}}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}d\sigma=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{q_j}^{q_{j+1}}\frac{\lambda_{\nu(\sigma,F^*)}}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}d\sigma=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{n_{j+1}}\int_{q_j}^{q_{j+1}}\frac{d\sigma}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{n_{j+1}}\int_{q_j}^{q_{j+1}}\frac{\sigma^2d\sigma}{|\sigma|^2\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{n_{j+1}}\frac{1}{\varrho_R}\int_{q_j}^{q_{j+1}}\sigma^2d\left(-\frac{1}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}\right)=$$

$$= \frac{1}{\varrho_R} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}} \left(\frac{|q_j|^2}{\exp\{\varrho_R/|q_j|\}} - \frac{|q_{j+1}|^2}{\exp\{\varrho_R/|q_{j+1}|\}} - 2 \int\limits_{q_j}^{q_{j+1}} \frac{|\sigma| d\sigma}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} \right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{\varrho_R} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n_{j+1}} |q_j|^2}{\exp\{\varrho_R/|q_j|\}}. \tag{8}$$

З іншого боку, для всіх досить великих j

$$M(q_j, F^*) \geq \sum_{n=m_j}^{n_{j+1}} a_n \exp\{q_j \lambda_n\} = (n_{j+1} - m_j) \mu(q_j, F^*) \geq$$
$$\geq K_2 n_{j+1}, \quad K_2 \equiv \text{const} > 0. \tag{9}$$

Виберемо $q_j = -\varrho_R \left(\ln \dfrac{\lambda_{n_{j+1}} l(\lambda_{n_{j+1}})}{\ln^2 \lambda_{n_{j+1}}} \right)^{-1}$. Оскільки l – повільно зростаюча функція, то $\ln l(x) = o(\ln x)$ $(x \to +\infty)$, тому $|q_j| \leq K_3/\ln \lambda_{n_{j+1}}$ $(j \geq j_0)$, $K_3 \equiv \text{const} > 0$.

З (9) отримуємо

$$\ln M(q_j, F^*) \geq \ln n_{j+1} + \ln K_2 \geq \frac{\lambda_{n_{j+1}} l(\lambda_{n_{j+1}})}{\ln^2 \lambda_{n_{j+1}}} + \ln K_2 = \exp\left\{ \frac{\varrho_R}{|q_j|} \right\} + \ln K_2,$$

тобто співвідношення (2) не виконується, бо з нього випливає, що $\ln M(\sigma, F) = o(\exp\{\varrho_R/|\sigma|\})$ $(\sigma \uparrow 0)$.

Водночас з (8) маємо

$$\int\limits_{q_1}^{0} \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F^*)}}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_3^2 \lambda_{n_{j+1}}}{\dfrac{\lambda_{n_{j+1}} l(\lambda_{n_{j+1}})}{\ln^2 \lambda_{n_{j+1}}} \ln^2 \lambda_{n_{j+1}}} = K_3^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{l(\lambda_{n_{j+1}})} < +\infty,$$

тобто співвідношення (4), а за лемою 3 і співвідношення (3) правильні.

Залишилось довести, що ряд (7) має нульову абсцису абсолютної збіжності. Оскільки $|q_k| \downarrow 0$ $(k \to \infty)$, то з (5) випливає, що

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\ln a_{n_{j+1}}}{\lambda_{n_{j+1}}} = \lim_{j \to \infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{j} |q_k| (\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})}{\sum\limits_{k=0}^{j} (\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})} = 0,$$

а з (6) для $m_j \leq n < n_{j+1}$ маємо

$$\frac{\ln a_n}{\lambda_n} \leq \frac{\ln a_{n_j}}{\lambda_n} + |q_j| \leq \frac{\ln a_{n_j}}{\lambda_{n_j}} + |q_j| \to 0, \quad j \to \infty.$$

Отже, $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \dfrac{\ln a_n}{\lambda_n} = 0$ і, оскільки $\ln n \leq \lambda_n l(\lambda_n)/\ln^2 \lambda_n + 1 = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$, то за лемою 2 $\sigma_a = 0$. Твердження 1 повністю доведено.

3. Достатня умова еквівалентності співвідношень (2) і (3). Будемо використовувати методику і результати зі статті [5]. Позначимо через $\Omega(0)$ клас додатних необмежених на $(-\infty, 0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' неперервна, додатна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, 0)$. Нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [5] функція Ψ неперервна і зростає до 0 на $(-\infty, 0)$, а функція φ неперервна і зростає до 0 на $(0, +\infty)$. Нарешті, нехай $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$ – лічильна функція послідовності Λ.

Лема 4. *Нехай $\Phi \in \Omega(0)$, $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ і $\ln n(t) = o(t)$ при $t \to +\infty$. Припустимо, що додатна на $(-\infty, 0)$ функція β така, що $\beta(\sigma) < |\sigma|$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, і позначимо $\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))$. Тоді для всіх досить близьких до 0 значень $\sigma < 0$*

$$\sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \le \beta(\sigma) \int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} n(t) \exp\{t\beta(\sigma)\} dt.$$

Доведення цієї леми таке саме, як і леми 4 з [5]. Використовуючи лему 4, неважко (див. доведення теореми 2 з [5]) довести таку лему.

Лема 5. *Нехай α – неперервна, додатна і зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція така, що $\alpha(t) = o(t), t \to +\infty$. Припустимо, що $\ln n(t) \le t/\alpha(t)$ при $t \ge t_0$, а функція $\Phi \in \Omega(0)$ така, що*

$$\frac{2\Phi'(\sigma)}{\alpha(\Phi'(\sigma))} < \Phi(\sigma) + |\sigma|\Phi'(\sigma), \quad \sigma_0 \le \sigma < 0. \tag{10}$$

Якщо $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, $\beta(\sigma) = \dfrac{2}{\alpha(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))}$ і $\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))$, то

$$\sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \to 0, \quad \sigma \uparrow 0. \tag{11}$$

Тепер можемо довести таке твердження.

Твердження 2. *Умова $\ln n \le \lambda_n / \ln^q \lambda_n$ $(n \ge n_0)$ з $q > 3$ є достатньою для того, щоб для кожної функції $F \in S^0(\Lambda)$ співвідношення (2) і (3) були рівносильними.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що з огляду на нерівність $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F)$ з (2) випливає (3). Якщо ж виконується (3), то $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma) = \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$. Зауважимо ще, що з умови $\ln n \le \lambda_n / \ln^q \lambda_n$ $(n \ge n_0)$ випливає нерівність $\ln n(t) \le t/\alpha(t)$ при $t \ge t_0$ з $\alpha(t) = \ln^q t$, $q > 3$.

Оскільки $\Phi'(\sigma) = \dfrac{\varrho_R \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}{|\sigma|^2}$, то неважко перевірити, що $\dfrac{2\Phi'(\sigma)}{\ln^q \Phi'(\sigma)} < \Phi(\sigma) +$ $+|\sigma|\Phi'(\sigma)$, $\sigma_0 \le \sigma < 0$, тобто умова (10) виконується і за лемою 5 правильне співвідношення (11), де $\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))$ і $\beta(\sigma) = \dfrac{2}{\ln^q \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}$.

Оскільки $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)} = \sigma - \dfrac{\sigma^2}{\varrho_R}$, то $\Psi^{-1}(\sigma) = \sigma + \dfrac{\sigma^2}{\varrho_R} + O(\sigma^3)$ $(\sigma \uparrow 0)$ і $1/\Psi^{-1}(\sigma) = -1/|\sigma| - 1/\varrho_R + O(\sigma)$ $(\sigma \uparrow 0)$. Тому $\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)) = \dfrac{e\varrho_R(1+o(1))\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}{|\sigma|^2}$ при $\sigma \uparrow 0$, звідки випливає, що

$$\beta(\sigma) = \frac{2(1+o(1))|\sigma|^q}{\varrho_R^q} \text{ та } \frac{1}{\sigma+\beta(\sigma)} = \frac{1}{\sigma} - \frac{2(1+o(1))|\sigma|^{q-2}}{\varrho_R^q} \text{ при } \sigma \uparrow 0.$$

Звідси випливає, що

$$\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma+\beta(\sigma))) = \frac{e\varrho_R(1+o(1))\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}{|\sigma|^2}, \quad \sigma \uparrow 0.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} M(\sigma,F) \quad &\le \left(\sum_{\lambda_n \le \gamma(\sigma)} + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)}\right) |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} \le \\ &\le \mu(\sigma,F)(n(\gamma(\sigma))+1) + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}, \end{aligned}$$

то з огляду на (11) нам залишається довести, що $\int\limits_{-1}^{0} \dfrac{\ln n(\gamma(\sigma))}{|\sigma|^2\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty$. Але

$$\ln n(\gamma(\sigma)) \le \gamma(\sigma)/\ln^q \gamma(\sigma) = e\varrho_R^{1-q}(1+o(1))|\sigma|^{q-2}\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

і, оскільки $q > 3$, то

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln n(\gamma(\sigma))}{|\sigma|^2\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma \le K_4 \int\limits_{-1}^{0} |\sigma|^{q-4} d\sigma < +\infty.$$

Твердження 2 доведено.

Зауваження 1. У доведенні твердження 2 використано нерівність $\ln \mu(\sigma,F) \le \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}$ $(\sigma \in [\sigma_0, 0))$. Насправді ж із (3) випливає, що

$$\ln \mu(\sigma,F) = o(\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}) \ (\sigma \uparrow 0).$$

Тому може бути правдоподібним таке твердження.

Гіпотеза 1. *Умова* $\ln n = O(\lambda_n/\ln^2 \lambda_n)$ $(n \to \infty)$ *є необхідною і достатньою для того, щоб для кожної функції* $F \in S^0(\Lambda)$ *співвідношення (2) і (3) були рівносильними.*

---

1. *Гайсин А.М.* Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуплоскости // Мат. сб. – 1982. – Т. 117, №3. – С. 412-424.

2. *Мулява О.М.* Про класи збіжності рядів Діріхле // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №11. – С. 1485-1494.
3. *Sumyk O.M., Sheremeta M.M.* On connection between the growth of maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in term of m-member asymptotics // Matem. Studii. – Vol. 19, №1. – 2003. – P. 83-88.
4. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К., 1993.
5. *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* О производной ряда Дирихле // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, №1. – С. 206-223.

ON THE BELONGING OF DIRICHLET SERIES ABSOLUTELY CONVERGENT IN HALF-PLANE TO A CONVERGENCE CLASS

Mulyava Oksana[1], Sheremeta Myroslav[2]

[1]*Kyiv National University of Food Technology, 01004, Kyiv, Volodymyrska Str., 68*
[2]*Ivan Franko National University of L'viv, 79000, L'viv, Universytetska Str., 1*

For a Dirichlet series $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ with the abscissa of absolute convergence $\sigma_a = 0$ let $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and $\mu(\sigma) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ $(\sigma < 0)$. Conditions on λ_n for the equivalence of relations $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|^2\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}d\sigma < +\infty$ and $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln \mu(\sigma,F)}{|\sigma|^2\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}d\sigma < +\infty$ $(\varrho > 0)$ are established.

Key words: Dirichlet series, maximum modulus, maximal term, convergence class.

Стаття надійшла до редколегії 26.10.2006

Прийнята до друку 24.10.2007