ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ — VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.233-247 — Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.233-247

УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМОГО МНОЖНИКА В КОЕФІЦІЄНТІ ПРИ ПЕРШІЙ ПОХІДНІЙ В ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Галина СНІТКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, Львів, вул. Наукова, 3б

Визначено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомим множником у коефіцієнті при першій похідній в області з вільною межею.

Ключові слова: обернена задача, фукція Гріна, вільна межа, параболічне рівняння.

1. Мета нашої праці – дослідити обернену задачу визначення залежного від часу множника в коефіцієнті при першій похідній невідомої функції в параболічному рівнянні другого порядку загального вигляду в області з невідомою рухомою частиною межі. Згадана задача поєднує два типи задач: коефіцієнтна обернена задача та задача з вільною межею, прикладом якої є задача Стефана [1]. Обернені задачі визначення молодших коефіцієнтів у параболічному рівнянні досліджували у [2, 3]. Задача з вільною межею з інтегральною умовою перевизначення досліджена в [4], а з умовою Стефана – в [5].

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $x = h(t)$ – невідома межа, розглядаємо параболічне рівняння з невідомим множником $b = b(t)$ в коефіцієнті при першій похідній

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(t)b_0(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant h(0), \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h(t),t) = \mu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

та умови перевизначення

$$h'(t) = -k(t)u_x(h(t),t) + \mu_3(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Вводячи нову змінну $y = \dfrac{x}{h(t)}$, зводимо задачу (1)-(5) до оберненої стосовно невідомих $h(t), b(t), v(y,t)$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$, в області $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\, v_{yy} + \frac{b(t)b_0(yh(t),t) + y\,h'(t)}{h(t)} v_y + c(yh(t),t)\, v + f(yh(t),t), \tag{6}$$

де $(y,t) \in Q_T$,

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

$$h'(t) = -\frac{k(t)}{h(t)} v_y(1,t) + \mu_3(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

$$h(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{10}$$

Під розв'язком задачі (6)-(10) будемо розуміти трійку функцій $(h(t), b(t), v(y,t))$ з класу $C^1[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(\overline{Q}_T), h(t) > 0, t \in [0,T]$, що задовольняє рівняння (6) та умови (7)-(10).

1. Існування розв'язку задачі (6)-(10).

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*
*A*1) $a, b_0, c, f \in C([0,\infty) \times [0,T]), \quad a, b_0, c, f \in C^{1,0}([0,H_1] \times [0,T]), \quad \varphi \in C[0,\infty),$ $\varphi \in C^2[0,h_0], \quad \mu_i \in C^1[0,T],\ i = 1,2,4, \quad \mu_3 \in C[0,T];$
*A*2) $a(x,t) > 0, \quad c(x,t) < 0, \quad f(x,t) \geqslant 0,\ (x,t) \in [0,\infty) \times [0,T], \quad b_0(x,t) \neq 0,$ $(x,t) \in [0,H_1] \times [0,T], \quad \varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0,\ x \in [0,\infty), \quad \varphi'(x) > 0,\ x \in [0,h_0],$ $\mu_i(t) > 0,\ i = \overline{1,4},\ t \in [0,T],$

де $h_0 = h(0) > 0$ *є розв'язком рівняння* $\displaystyle\int\limits_0^{h(0)} \varphi(x)dx = \mu_4(0),$

$H_1 = \max\limits_{[0,T]} \mu_4(t)(\min\{\min\limits_{[0,h_0]} \varphi(x),\ \min\limits_{[0,T]} \mu_1(t),\ \min\limits_{[0,T]} \mu_2(t)\})^{-1};$
*A*3) $\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(h_0) = \mu_2(0),$

$\mu_1'(0) = \dfrac{a(0,0)}{h_0^2}\,\varphi''(0) + \dfrac{b(0)b_0(0,0)}{h_0}\,\varphi'(0) + c(0,0)\varphi(0) + f(0,0),$

$\mu_2'(0) = \dfrac{a(h_0,0)}{h_0^2}\,\varphi''(h_0) + \dfrac{b(0)b_0(h_0,0)+h'(0)}{h_0}\varphi'(h_0) + c(h_0,0)\varphi(h_0) + f(h_0,0),$ *де*

$$b(0) = \left(\int\limits_0^1 b_0(yh_0,0)\varphi'(yh_0)dy\right)^{-1}\left[\mu_4'(0) - \mu_3(0)\mu_2(0) + \frac{1}{h_0}\Big((k(0)\mu_2(0) - a(h_0,0))\times\right.$$

$$\left.\times\varphi'(h_0) + a(0,0)\varphi'(0)\Big) + \int\limits_0^1\Big(a_x(yh_0,0)\varphi'(yh_0) - h_0(c(yh_0,0)\,\varphi(yh_0) + f(yh_0,0))\Big)dy\right],$$

$h'(0) = -\dfrac{k(0)}{h_0}\varphi'(h_0) + \mu_3(0).$

Тоді можна зазначити таке число $T_0 : 0 < T_0 \leqslant T$, *яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі (6)-(10) існує при* $0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T_0$.

Доведення. Враховуючи умови (2), (5) та припущення теореми 1, одержимо існування єдиного значення $h(0) = h_0$, яке задовольняє рівняння

$$\int\limits_0^{h(0)} \varphi(x)dx = \mu_4(0).$$

Доведення теореми 1 ґрунтується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Зведемо задачу (6)-(10) до системи рівнянь. Тимчасово припустимо, що функції $h(t), b(t)$ відомі. Використовуючи функцію Гріна $G_1(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy} + c(yh(t),t)\,v,$$

зводимо пряму задачу (6)-(8) до рівняння

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau),\tau) + \eta\, h'(\tau)}{h(\tau)}v_\eta(\eta,\tau)d\eta d\tau, \quad (11)$$

де $v_0(y,t)$ визначається формулою [6]

$$v_0(y,t) = \int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h_0)d\eta + \int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\,\frac{a(0,\tau)}{h^2(\tau)}\mu_1(\tau)\,d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\,\frac{a(h(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\mu_2(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau.$$

Введемо позначення $p(t) = h'(t)$, $w(y,t) = v_y(y,t)$. Тоді (11) подамо у вигляді

$$v(y,t) \;=\; v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau),\tau) + \eta\, p(\tau)}{h(\tau)} w(\eta,\tau) d\eta d\tau. \quad (12)$$

Випишемо задачу для знаходження $w(y,t)$. Продиференціювавши (6), (7) по y та використавши (8), одержимо

$$w_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\, w_{yy} + \frac{a_x(yh(t),t) + b(t)b_0(yh(t),t) + y\, h'(t)}{h(t)} w_y + \Bigg(\frac{h'(t)}{h(t)} +$$

$$+ b(t)b_{0x}(yh(t),t) + +c(yh(t),t)\Bigg) w + h(t)c_x(yh(t),t)v + h(t)f_x(yh(t),t),\ (y,t) \in Q_T,$$

$$w(y,0) = h_0\varphi'(yh_0), \qquad\qquad y \in [0,1], \quad (13)$$

$$w_y(0,t) = \frac{h^2(t)}{a(0,t)}\left[\mu_1'(t) - c(0,t)\mu_1(t) - f(0,t) - \frac{b(t)b_0(0,t)}{h(t)}\, w(0,t)\right], \quad t \in [0,T],$$

$$w_y(1,t) = \frac{h^2(t)}{a(h(t),t)}\left[\mu_2'(t) - c(h(t),t)\mu_2(t) - f(h(t),t) - \frac{b(t)b_0(h(t),t) + h'(t)}{h(t)}\, w(1,t)\right],$$

$t \in [0,T]$.

Задача (13) у випадку довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $h(t), h'(t)$, $b(t)$ еквівалентна рівнянню

$$w(y,t) = h_0 \int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\, \varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\Big[\mu_1'(\tau) - c(0,\tau)\mu_1(\tau) - f(0,\tau) -$$

$$- \frac{b(\tau)b_0(0,\tau)}{h(\tau)}\, w(0,\tau)\Big] d\tau + \int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\Big[\mu_2'(\tau) - c(h(\tau),\tau)\mu_2(\tau) - f(h(\tau),\tau) -$$

$$- \frac{b(\tau)b_0(h(\tau),\tau) + h'(\tau)}{h(\tau)}\, w(1,\tau)\Big] d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)\Big[\frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau),\tau) + \eta h'(\tau)}{h(\tau)} \times$$

$$\times w_\eta(\eta,\tau) + \left(b(\tau)b_{0x}(\eta h(\tau),\tau) + \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + c(\eta h(\tau),\tau)\right) w(\eta,\tau) + h(\tau)\, c_x(\eta h(\tau),\tau) \times$$

$$\times v(\eta,\tau) + h(\tau) f_x(\eta h(\tau),\tau)\Big] d\eta\, d\tau, \quad (14)$$

де $G_2(y,t,\eta,\tau)$ – функція Гріна другої крайової задачі для рівняння

$$w_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\, w_{yy} + \frac{a_x(yh(t),t)}{h(t)} w_y. \quad (15)$$

Інтегруючи частинами у виразі $\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)\dfrac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau),\tau)+\eta h'(\tau)}{h(\tau)}w_\eta(\eta,\tau)d\eta d\tau$,

подамо (14) у вигляді

$$w(y,t)=h_0\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0)d\eta-\int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)\Big[\mu_1'(\tau)-c(0,\tau)\mu_1(\tau)-f(0,\tau)\Big]d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)\Big[\mu_2'(\tau)-c(h(\tau),\tau)\mu_2(\tau)-f(h(\tau),\tau)\Big]d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)\times$$
$$\times(c(\eta h(\tau),\tau)\,w(\eta,\tau)+h(\tau)(c_x(\eta h(\tau),\tau)\,v(\eta,\tau)+f_x(\eta h(\tau),\tau)))d\eta\,d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau)\frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau),\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)d\eta\,d\tau. \tag{16}$$

З умови (9) матимемо

$$p(t)=-\frac{k(t)}{h(t)}w(1,t)+\mu_3(t). \tag{17}$$

З умови (10) отримаємо

$$h(t)=\frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}. \tag{18}$$

Продиференціювавши (10) по t і використавши (6), одержимо

$$b(t)=\left(\int\limits_0^1 b_0(yh(t),t)w(y,t)dy\right)^{-1}\Bigg[\mu_4'(t)-\mu_3(t)\mu_2(t)+\frac{k(t)\mu_2(t)-a(h(t),t)}{h(t)}w(1,t)+$$
$$+\frac{a(0,t)}{h(t)}w(0,t)+\int\limits_0^1\Big(a_x(yh(t),t)w(y,t)-h(t)(c(yh(t),t)\,v(y,t)+f(yh(t),t))\Big)dy\Bigg]. \tag{19}$$

Розглянемо рівняння (15) з початковою та крайовими умовами

$$w(y,0)=1,\qquad w_y(0,t)=w_y(1,t)=0.$$

За допомогою функції Гріна другої крайової задачі для рівняння (15) розв'язок задачі можемо подати у вигляді

$$w(y,t)=\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)d\eta.$$

З іншого боку, розв'язком такої задачі є $w(y,t)=1$. Отже, можемо зробити висновок, що $\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)d\eta=1$, та про додатність першого доданка з (16). Оскільки в (16) решта доданків при $t=0$ дорівнює нулю, то існує деяке число $t_0,\ 0<t_0\leqslant T$, таке що

$$w(y,t)\geqslant\frac{1}{2}\min_{[0,1]}\varphi'(yh_0)\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)d\,\eta=\frac{M_0}{2}>0,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant t_0.$$

Отже, $\int\limits_0^1 b_0(yh(t),t)w(y,t)dy\neq 0$, коли $0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant t_0$.

Отож, задачу (6)-(10) зведено до системи інтегральних рівнянь (12), (16)-(19) з невідомими $h(t),p(t),b(t),v(y,t),w(y,t)$. Якщо $(h(t),b(t),v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10) у сенсі наведеного означення, то функції $(h(t),p(t),b(t),v(y,t),\ w(y,t))$ є неперервним розв'язком системи (12), (16)-(19). Правильним є і обернене твердження: якщо $(h,p,b,v,w)\in(C[0,T])^3\times(C(\overline{Q}_T))^2$ є розв'язком системи (12), (16)-(19), то функції $(h(t),b(t),v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10).

Нехай $(h,p,b,v,w)\in(C[0,T])^3\times(C(\overline{Q}_T))^2$ є розв'язком системи (12), (16)-(19). Припущення теореми 1 допоможуть нам продиференціювати рівність (12) по y та з єдиності розв'язку інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду отримати $w(y,t)=$ $=v_y(y,t)$. Тоді робимо висновок, що $v(y,t)$ має потрібну гладкість і задовольняє рівняння

$$v_t=\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy}+\frac{b(t)b_0(yh(t),t)+yp(t)}{h(t)}v_y+c(yh(t),t)v+f(yh(t),t)\tag{20}$$

і умови (7), (8), (10) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $b(t)$ і $h(t)$. Оскільки $v\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ і $\mu_4\in C^1[0,T]$, то $h\in C^1[0,T]$. Враховуючи те, що функція $v(y,t)$ є розв'язком рівняння (20), продиференціюємо рівність (18) по t

$$b(t)=\left(\int\limits_0^1 b_0(yh(t),t)v_y(y,t)dy\right)^{-1}\Bigg[\mu_4'(t)-p(t)\mu_2(t)-\frac{a(h(t),t)}{h(t)}v_y(1,t)+\frac{a(0,t)}{h(t)}v_y(0,t)+$$

$$+\frac{\mu_4(t)}{h(t)}\Big(p(t)-h'(t)\Big)+\int\limits_0^1\Big(a_x(yh(t),t)v_y(y,t)-h(t)(c(yh(t),t)\,v(y,t)+f(yh(t),t))\Big)dy\Bigg].$$

Віднімаючи від цієї рівності (19), отримаємо

$$\big(p(t)-h'(t)\big)\frac{\mu_4(t)}{h(t)}=0.$$

Звідси матимемо

$$p(t)=h'(t).$$

Отже, еквівалентність задачі (6)-(10) та системи рівнянь (12), (16)-(19) у зазначеному сенсі доведено.

Визначимо апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (12), (16)-(19). Згідно з принципом максимуму [7] для розв'язку задачі (6)-(8) матимемо

$$v(y,t) \geqslant \min\{\min_{[0,h_0]} \varphi(x),\ \min_{[0,T]} \mu_1(t),\ \min_{[0,T]} \mu_2(t)\} \equiv M_1 > 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T.$$

Згідно з (18) отримаємо

$$h(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \mu_4(t)}{M_1} \equiv H_1 < \infty, \quad t \in [0,T].$$

Знайдемо оцінку функції $v(y,t)$ зверху. Для цього знову використаємо принцип максимуму

$$v(y,t) \leqslant \max\{\max_{[0,h_0]} \varphi(x),\ \max_{[0,T]} \mu_1(t),\ \max_{[0,T]} \mu_2(t),\ \max_{[0,H_1]\times[0,T]} f(x,t)\} \equiv M_2 < \infty.$$

Звідси з врахуванням (18) маємо

$$h(t) \geqslant \frac{\min\limits_{[0,T]} \mu_4(t)}{M_2} \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0,T].$$

Отже,

$$0 < M_1 \leqslant v(y,t) \leqslant M_2 < \infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \qquad 0 < H_0 \leqslant h(t) \leqslant H_1 < \infty, \quad t \in [0,T].$$

Позначимо $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} |w(y,t)|$. Тоді з (17), (19) матимемо

$$|p(t)| \leqslant C_1 + C_2 W(t), \tag{21}$$

$$|b(t)| \leqslant C_3 + C_4 W(t). \tag{22}$$

Згідно з (21), (22) та оцінками функції Гріна [7] з (16) одержимо таку нерівність:

$$W(t) \leqslant C_5 + C_6 \int\limits_0^t \frac{W(\tau) + W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Позначивши $W_1(t) = W(t) + 1$, попередню нерівність перепишемо в такому вигляді:

$$W_1(t) \leqslant C_7 + C_8 \int\limits_0^t \frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [6]. Отже, отримаємо оцінку

$$W(t) \leqslant M_3 < \infty, \quad t \in [0, t_1],$$

де t_1, $0 < t_1 \leqslant T$, визначається сталими C_7, C_8. Використовуючи це в (21), (22), одержимо

$$|p(t)| \leqslant C_9 < \infty, \qquad |b(t)| \leqslant C_{10} < \infty, \qquad t \in [0, t_1].$$

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи (12), (16)–(19) знайдено.

Подамо систему (12), (16)–(19) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (h(t), b(t), p(t), v(y,t), w(y,t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (12), (16)–(19). Позначимо $N = \{(h, b, p, v, w) \in (C[0, T_0])^3 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 : H_0 \leqslant h(t) \leqslant H_1, |b(t)| \leqslant C_{10}, |p(t)| \leqslant C_9, M_1 \leqslant v(y,t) \leqslant M_2, |w(y,t)| \leqslant M_3\}$, де $T_0 = \min\{t_0, t_1\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера.

Доведення компактності операторів, що утворюють P, покажемо на прикладі оператора P_5, де P_5 визначається правою частиною (16). Зауважимо, що в [6] визначено компактність подібних операторів з функцією Гріна другої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Задамо $\varepsilon > 0$ і розглянемо різницю

$$\Delta_1 = \left| \int_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0) d\eta \right|$$

з довільними точками $(y_i, t_i) \in \overline{Q}_{T_0}$, $(y_1, t_1) \neq (y_2, t_2)$.
Очевидно, що

$$\Delta_1 \leqslant \left| \int_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0) d\eta \right| +$$

$$+ \left| \int_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0) d\eta \right| = \Delta_{1,1} + \Delta_{1,2}.$$

З властивостей теплових потенціалів [1] випливає, що для заданого $\varepsilon > 0$ існує таке $\overline{t}$, $0 < \overline{t} \leqslant T_0$, що

$$\left| \int_0^1 G_2(y, t, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0) d\eta - \varphi'(y h_0) \right| < \frac{\varepsilon}{5}, \text{ коли } 0 \leqslant t \leqslant \overline{t},\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \tag{23}$$

Тому при $t_2 \leqslant \overline{t}$ маємо

$$\Delta_{1,1} \leqslant \left| \int_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0) d\eta - \varphi'(y_2 h_0) \right| +$$

$$+ \left| \int_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0) d\eta - \varphi'(y_1 h_0) \right| + \left| \varphi'(y_2 h_0) - \varphi'(y_1 h_0) \right|.$$

З рівномірної неперервності функції φ на $[0,h_0]$ випливає існування такого $\delta_1>0$, що
$$|\varphi(y_2h_0)-\varphi(y_1h_0)|<\frac{\varepsilon}{5},$$
коли $|y_2-y_1|<\delta_1$. Звідси і з (23) маємо $\Delta_{1,1}<\dfrac{3\varepsilon}{5}$, якщо $t_2\leqslant\overline{t}$. Якщо ж і $t_1\leqslant\overline{t}$, то $\Delta_{1,2}<\dfrac{2\varepsilon}{5}$, і отримуємо $\Delta_1<\varepsilon$ за умови $|y_2-y_1|<\delta$ і t_1 та t_2 досить малі $t_1\leqslant\overline{t},t_2\leqslant\overline{t}$.

Нехай тепер $t_2>\overline{t}$, $t_1>\overline{t}$ і, для визначеності, $t_2>t_1$. Тоді згідно з оцінками функції Гріна [7]
$$\Delta_{1,1}=\left|\int\limits_0^1\varphi'(\eta h_0)d\eta\int\limits_{y_1}^{y_2}G_{2y}(y,t_2,\eta,0)dy\right|\leqslant\frac{C_{11}|y_2-y_1|}{\sqrt{\overline{t}}}\max_{[0,1]}|\varphi'(yh_0)|.$$
Це означає, що існує таке число $\delta_2>0$, що $\Delta_{1,1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ при $|y_2-y_1|<\delta_2$. Аналогічно визначаємо існування $\delta_3>0$ такого, що $\Delta_{1,2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, коли $|t_2-t_1|<\delta_3$.

Отже, необхідні нерівності визначено у випадку $t_i\leqslant\overline{t}$, $i=1,2$, і випадку $t_i\geqslant\overline{t}$, $i=1,2$. Якщо ж, наприклад, $t_1\leqslant\overline{t}$, а $t_2>\overline{t}$, то подамо $\Delta_{1,2}$ у вигляді
$$\Delta_{1,2}=\left|\int\limits_0^1G_2(y_1,t_2,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta-\int\limits_0^1G_2(y_1,\overline{t},\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta\right|+$$
$$+\left|\int\limits_0^1G_2(y_1,\overline{t},\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta-\int\limits_0^1G_2(y_1,t_1,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta\right|.$$
Другий доданок оцінимо, враховуючи (23), а перший – як у випадку $t_1>\overline{t}$, $t_2>\overline{t}$. Отже, ми довели, що $\Delta_1<\varepsilon$.

Розглянемо різницю
$$\Delta_2=\left|\int\limits_0^{t_2}G_2(y_2,t_2,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_1}G_2(y_1,t_1,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau\right|,$$
де $\widetilde{\mu}_1(t)=\mu_1'(t)-c(0,t)\mu_1(t)-f(0,t)$.
Очевидно, що
$$\Delta_2\leqslant\left|\int\limits_0^{t_2}G_2(y_2,t_2,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_2}G_2(y_1,t_2,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau\right|+$$
$$+\left|\int\limits_0^{t_2}G_2(y_1,t_2,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_1}G_2(y_1,t_1,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau\right|=\Delta_{2,1}+\Delta_{2,2}.$$

Оцінимо перший доданок, зробивши заміну змінних $t_2-\tau=\sigma$

$$\Delta_{2,1}\leqslant C_{12}\int\limits_0^{t_2}|G_2(y_2,t_2,0,t_2-\sigma)-G_2(y_1,t_2,0,t_2-\sigma)|\,d\sigma.$$

Згідно з оцінками функції Гріна [7], для заданого $\varepsilon>0$ можна зазначити $\bar t>0$, що

$$\int\limits_0^{\bar t}|G_2(y,t_2,0,\tau)|d\tau<\frac{\varepsilon}{6C_{12}},\quad y\in[0,1]. \tag{24}$$

Якщо $t_2\leqslant\bar t$, то з (24) маємо $\Delta_{2,1}<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Якщо ж $t_2>\bar t$, то, розбиваючи інтеграл на суму двох інтегралів і застосовуючи (24), отримуємо

$$\Delta_{2,1}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+C_{12}\int\limits_{\bar t}^{t_2}|G_2(y_2,t_2,0,t_2-\sigma)-G_2(y_1,t_2,0,t_2-\sigma)|\,d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+C_{12}\int\limits_{\bar t}^{t_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}|G_{2y}(y,t_2,0,t_2-\sigma)|dy\,d\sigma.$$

Звідси, використовуючи оцінки функції Гріна [7], маємо

$$\Delta_{2,1}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+C_{13}|y_2-y_1|.$$

Вибираючи $\delta_4<\dfrac{\varepsilon}{6C_{13}}$, визначаємо оцінку $\Delta_{2,1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, коли $|y_2-y_1|<\delta_4$.

Вважаючи для визначеності $t_2>t_1$, оцінимо другий доданок

$$\Delta_{2,2}\leqslant\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}G_2(y_1,t_2,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau\right|+\left|\int\limits_0^{t_1}(G_2(y_1,t_2,0,\tau)-G_2(y_1,t_1,0,\tau))\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau\right|=$$

$$=\Delta_{2,2,1}+\Delta_{2,2,2}.$$

Оцінимо $\Delta_{2,2,1}$, провівши заміну змінних $t_2-\tau=\sigma$

$$\Delta_{2,2,1}\leqslant C_{12}\int\limits_0^{t_2-t_1}|G_2(y_1,t_2,0,t_2-\sigma)|d\sigma.$$

Враховуючи (24), робимо висновок про існування такого $\delta_5>0$, що $\Delta_{2,2,1}<\dfrac{\varepsilon}{6}$ при $|t_2-t_1|<\delta_5$.

Для оцінки $\Delta_{2,2,2}$ зробимо заміну змінних $t_1-\tau=\sigma$

$$\Delta_{2,2,2}\leqslant C_{12}\int\limits_0^{t_1}|G_2(y_1,t_2,0,t_1-\sigma)-G_2(y_1,t_1,0,t_1-\sigma)|d\sigma.$$

Враховуючи (24), доходимо висновку про існування такого $\overline{t}>0$, що $\Delta_{2,2,2}<\frac{\varepsilon}{6}$ при $t_1\leqslant\overline{t}$. У випадку $t_1>\overline{t}$ маємо

$$\Delta_{2,2,2}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+C_{12}\int\limits_{\overline{t}}^{t_1}\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}G_{2t}(y_1,t,0,t_1-\sigma)dt\right|d\sigma.$$

Звідси випливає існування такого $\delta_6>0$, що при $|t_2-t_1|<\delta_6$ матимемо $\Delta_{2,2,2}<\frac{\varepsilon}{6}$. Отже, $\Delta_2<\varepsilon$.

Наведені міркування використовують для оцінок

$$\Delta_3=\left|\int\limits_0^{t_2}G_2(y_2,t_2,1,\tau)\widetilde{\mu}_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_1}G_2(y_1,t_1,1,\tau)\widetilde{\mu}_2(\tau)d\tau\right|,$$

$$\Delta_4=\left|\int\limits_0^{t_2}\int\limits_0^{1}G_2(y_2,t_2,\eta,\tau)f(\eta,\tau)d\eta\,d\tau-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{1}G_2(y_1,t_1,\eta,\tau)f(\eta,\tau)d\eta\,d\tau\right|.$$

Отже, компактність оператора P доведено.

Тоді за теоремою Шаудера існує розв'язок $(h(t),b(t),p(t),v(y,t),w(y,t))$ системи рівнянь (12), (16)-(19) з класу $(C[0,T_0])^3\times(C(\overline{Q}_{T_0}))^2$, а отже, і розв'язок задачі (6)-(10) $(h(t),b(t),v(y,t))$ з класу $C^1[0,T_0]\times C[0,T_0]\times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$.

Теорему 1 доведено.

2. Єдиність розв'язку задачі (6)-(10).

Теорема 2. *У випадку виконання умов*
$B1)$ $a\in C^{2,0}([0,H_1]\times[0,T])$, $b_0,c,f\in C^{1,0}([0,H_1]\times[0,T])$, $\varphi\in C[0,\infty)$;
$B2)$ $a(x,t)>0$, $(x,t)\in[0,\infty)\times[0,T]$, $b_0(x,t)\neq0$, $(x,t)\in[0,H_1]\times[0,T]$, $\varphi(x)\geqslant\varphi_0>0$, $x\in[0,\infty)$, $\varphi'(x)>0$, $x\in[0,h_0]$, $\mu_4(t)>0$, $t\in[0,T]$
можна зазначити таке число $t_0:0<t_0\leqslant T$, що розв'язок задачі (6)-(10) єдиний при $0\leqslant y\leqslant1$, $0\leqslant t\leqslant t_0$.

Доведення. Нехай $(h_i(t),b_i(t),v_i(y,t))$, $i=1,2$, – два розв'язки задачі (6)-(10). Позначимо

$$\frac{b_i(t)}{h_i(t)}=q_i(t),\qquad\frac{h_i'(t)}{h_i(t)}=s_i(t),\quad i=1,2,$$

$$q(t)=q_1(t)-q_2(t),\qquad s(t)=s_1(t)-s_2(t)\qquad v(y,t)=v_1(y,t)-v_2(y,t).$$

Функції $q(t),s(t),v(y,t)$ задовольняють умови

$$v_t=\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)}v_{yy}+(q_1(t)b_0(yh_1(t),t)+ys_1(t))v_y+c(yh_1(t),t)v+$$
$$+\left(\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)}-\frac{a(yh_2(t),t)}{h_2^2(t)}\right)v_{2yy}+(q_1(t)b_0(yh_1(t),t)-q_2(t)b_0(yh_2(t),t)+ys(t))v_{2y}$$
$$+(c(yh_1(t),t)-c(yh_2(t),t))v_2+f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t),\qquad(y,t)\in Q_T,\tag{25}$$

$$v(y,0)=0, \qquad 0\leqslant y\leqslant 1, \tag{26}$$

$$v(0,t)=v(1,t)=0, \qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{27}$$

$$h'(t)=-k(t)\left(\frac{v_{1y}(1,t)}{h_1(t)}-\frac{v_{2y}(1,t)}{h_2(t)}\right), \qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{28}$$

$$\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right), \qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{29}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ для рівняння

$$v_t=\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)}v_{yy}+(q_1(t)b_0(yh_1(t),t)+ys_1(t))v_y+c(yh_1(t),t)v$$

з врахуванням умов (26), (27) функцію $v(y,t)$ подамо в такому вигляді

$$v(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg[\left(\frac{a(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)}-\frac{a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+$$
$$+(q_1(\tau)b_0(\eta h_1(\tau),\tau)-q_2(\tau)b_0(\eta h_2(\tau),\tau)+\eta s(\tau))v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$
$$+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_2(\eta,\tau)+f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau)\Bigg]d\eta d\tau. \tag{30}$$

Оскільки $(h_i(t),b_i(t),v_i(y,t)),\ i=1,2,$ – розв'язки задачі (6)-(10), то для $h_i(t),b_i(t)$, $i=1,2$, справджуються рівності, аналогічні (17), (19)

$$\frac{h_i'(t)}{h_i(t)}=-\frac{k(t)}{h_i^2(t)}v_{iy}(1,t)+\frac{\mu_3(t)}{h_i(t)}, \tag{31}$$

$$\frac{b_i(t)}{h_i(t)}=\left(h_i(t)\int\limits_0^1 b_0(yh_i(t),t)v_{iy}(y,t)dy\right)^{-1}\Bigg[\mu_4'(t)-\mu_3(t)\mu_2(t)+\frac{a(0,t)}{h_i(t)}v_{iy}(0,t)+$$
$$+\frac{k(t)\mu_2(t)-a(h_i(t),t)}{h_i(t)}v_{iy}(1,t)+\int\limits_0^1\Bigg(a_x(yh_i(t),t)v_{iy}(y,t)-h_i(t)(c(yh_i(t),t)\times$$
$$\times v_i(y,t)+f(yh_i(t),t))\Bigg)dy\Bigg],\ i=1,2. \tag{32}$$

З умов теореми можемо зробимо висновок про існування деякого числа $t_0, 0<t_0\leqslant T$, такого що

$$v_{iy}\geqslant\frac{M_0}{2}>0, \quad 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant t_0, \quad i=1,2.$$

Тоді $\int\limits_0^1 b_0(yh_i(t),t)v_{iy}(y,t)dy \neq 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad i = 1,2.$

З (31), (32) матимемо

$$s(t) = -k(t)\left(v_{1y}(1,t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right) + \frac{1}{h_2^2(t)}\left(v_{1y}(1,t) - v_{2y}(1,t)\right)\right) + \\ +\mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \tag{33}$$

$$q(t) = \left[\int\limits_0^1 (b_0(yh_1(t),t)v_y(y,t) + (b_0(yh_1(t),t) - b_0(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t))dy\left(h_1(t)\times\right.\right. \\ \left.\times\int\limits_0^1 b_0(yh_1(t),t)v_{1y}(y,t)dy \int\limits_0^1 b_0(yh_2(t),t)v_{2y}(y,t)dy\right)^{-1} + \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right)\times \\ \left.\times\left(\int\limits_0^1 b_0(yh_2(t),t)v_{2y}(y,t)dy\right)^{-1}\right]\left[\mu_4'(t) - \mu_3(t)\mu_2(t) + \frac{k(t)\mu_2(t) - a(h_2(t),t)}{h_2(t)}v_{2y}(1,t) + \right. \\ \left.+\frac{a(0,t)}{h_2(t)}v_{2y}(0,t) + \int\limits_0^1\left(a_x(yh_2(t),t)v_{2y}(y,t) - h_2(t)(c(yh_2(t),t)\, v_2(y,t) + f(yh_2(t),t))\right)dy\right] + \\ +\left(h_1(t)\int\limits_0^1 b_0(yh_1(t),t)v_{1y}(y,t)dy\right)^{-1}\left[\frac{k(t)\mu_2(t) - a(h_1(t),t)}{h_1(t)}v_y(1,t) + \frac{a(0,t)}{h_1(t)}v_y(0,t) - \right. \\ -\frac{a(h_1(t),t) - a(h_2(t),t)}{h_1(t)}v_{2y}(1,t) + \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right)\left((k(t)\mu_2(t) - a(h_2(t),t))v_{2y}(1,t) + \right. \\ \left.+a(0,t)v_{2y}(0,t)\right) + \int\limits_0^1\left(a_x(yh_1(t),t)v_y(y,t) + (a_x(yh_1(t),t) - a_x(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t) - \right. \\ -h_1(t)c(yh_1(t),t)\, v(y,t) - (h_1(t)(c(yh_1(t),t) - c(yh_2(t),t)) + h(t)c(yh_2(t),t))v_2(y,t) - \\ \left.\left. -h_1(t)(f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t)) + h(t)f(yh_2(t),t)\right)dy\right]. \tag{34}$$

Використаємо таке перетворення:

$$f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t) = y(h_1(t) - h_2(t))\int\limits_0^1 f_x(y(h_2(t) + \sigma(h_1(t) - h_2(t))),t)d\sigma. \tag{35}$$

Перетворення (35) можемо використати для різниць $a(yh_1(t),t) - a(yh_2(t),t)$, $a_x(yh_1(t),t) - a_x(yh_2(t),t)$, $c(yh_1(t),t) - c(yh_2(t),t)$, $b_0(yh_1(t),t) - b_0(yh_2(t),t)$. Виразимо $h_i(t)$ через $s_i(t)$

$$h_i(t) = h_i(0) \exp\left(\int_0^t s_i(\tau)d\tau\right), \quad i = 1, 2,$$

де $h_1(0) = h_2(0) = h_0$.
Тоді

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = \frac{1}{h_0}\left(\exp\left(-\int_0^t s_1(\tau)d\tau\right) - \exp\left(-\int_0^t s_2(\tau)d\tau\right)\right).$$

Використавши

$$e^x - e^y = (x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

отримаємо

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0}\int_0^t s(\tau)d\tau \int_0^1 \exp\left(-\int_0^t (\sigma s(\tau) + s_2(\tau))d\tau\right)d\sigma. \tag{36}$$

Аналогічно

$$\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} = -\frac{2}{h_0^2}\int_0^t s(\tau)d\tau \int_0^1 \exp\left(-2\int_0^t (\sigma s(\tau) + s_2(\tau))d\tau\right)d\sigma. \tag{37}$$

Використавши (35)–(37) і підставивши (30) в (33), (34), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду стосовно невідомих $s(t)$, $q(t)$. З єдиності розв'язків таких систем випливає, що $s(t) = 0$, $q(t) = 0$, $t \in [0, t_0]$. Звідси отримаємо $s_1(t) = s_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$, $t \in [0, t_0]$, а отже, $h_1(t) = h_2(t)$, $b_1(t) = b_2(t)$, $t \in [0, t_0]$. Використовуючи це в задачі (25)–(27), знаходимо, що $v_1(y,t) = v_2(y,t)$, $(y,t) \in \overline{Q}_{t_0}$, що завершує доведення теореми 2.

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1968.
2. *Cannon J.R., Perez-Esteva S.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – Vol. 10, No. 3. – P. 521-531.
3. *Пабирівська Н. В.* Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142-149.
4. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – Т.55, № 7. – С. 901-910.
5. *Lorenzi L.* An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2001. – Vol. 9, No. 6. – P. 1-27.
6. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – VNTL Publishers, 2003.
7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

DETERMINATION OF UNKNOWN MULTIPLIER IN THE COEFFICIENT AT THE FIRST DERIVATIVE IN A PARABOLIC EQUATION IN A FREE BOUNDARY DOMAIN

Halyna SNITKO

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
79060, Lviv, Naukova Str., 3b

We established conditions of existence and uniqueness of the solution to the inverse problem for a parabolic equation with unknown multiplier in the coefficient at the first derivative in a domain with free boundary.

Key words: inverse problem, Green's function, free boundary, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 25.12.2006

Прийнята до друку 24.10.2007