

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Галина ТОРГАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Одержано достатні умови існування і єдиності узагальненого розв'язку в класі типу Тихонова мішаної задачі для рівняння

$$\begin{aligned}
 u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^k (a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^k (a_{ij}(z,t)u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^k (b_{ij}(z,t)u_{tx_i})_{x_j} - \\
 - \sum_{i,j=1}^m (c_{ij}(z,t)u_{y_i})_{y_j} + a_0(z,t)u + b(z,u_t) = \sum_{i,j=1}^k (f_{ij}(z,t))_{x_i x_j} - \\
 - \sum_{i=1}^k (f_i(z,t))_{x_i} + f_0(z,t) - \sum_{i=1}^m (g_i(z,t))_{y_i}
 \end{aligned}$$

в необмеженій області за просторовими змінними.

Ключові слова: еволюційне рівняння, задача в необмеженій області.

У 1960 р. С. Д. Ейдельман [1] розглянув узагальнення параболічних за Петровським систем, ввівши термін " $\overline{2b}$ -параболічні системи". У цих системах диференціюванню за різними просторовими змінними приписують різну вагу стосовно диференціювання за змінною t . За цей час було достатньо детально розроблено теорію задачі Коші для лінійних систем зазначеного типу (див. праці [2-21]).

Зазначимо, що параболічне рівняння з другою похідною за часом і четвертими похідними за просторовими змінними моделюють процеси фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю. Зокрема, задачі для нелінійних рівнянь такого типу досліджено в [22-25].

У цій праці розглянуто еволюційне рівняння з другою похідною за часом, четвертими похідними за однією групою просторових змінних і другою похідною за другою групою просторових змінних. Такі рівняння можна зарахувати до $\overline{2b}$ -параболічних рівнянь Ейдельмана. Досліджено мішану задачу в необмеженій області за просторовими змінними.

Нехай Ω_x – необмежена область в просторі \mathbb{R}^k з межею $\partial\Omega_x \in C^1$, Ω_y – необмежена область в просторі \mathbb{R}^m з межею $\partial\Omega_y \in C^1$, $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0, T]$, $k + m = n$, $z = (x, y)$, $x \in \Omega_x$, $y \in \Omega_y$.

Розглянемо обмежені області $\Omega_x^R = \Omega_x \cap B_x^R$, $\Omega_y^R = \Omega_y \cap B_y^R$, де $B_x^R = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| < R\}$ і $B_y^R = \{y \in \mathbb{R}^m : |y| < R\}$, $\Omega^R = \Omega_x^R \times \Omega_y^R$, $Q_T^R = \Omega^R \times (0, T)$, $\Omega_\tau^R = Q_T^R \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0, T]$.

У необмеженій області Q_T розглянемо задачу для рівняння з дійснозначними коефіцієнтами і вільним членом

$$\begin{aligned}
 A(u) \equiv & u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^k (a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^k (a_{ij}(z,t)u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^k (b_{ij}(z,t)u_{t x_i})_{x_j} - \\
 & - \sum_{i,j=1}^m (c_{ij}(z,t)u_{y_i})_{y_j} + a_0(z,t)u + b(z, u_t) = \sum_{i,j=1}^k (f_{ij}(z,t))_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^k (f_i(z,t))_{x_i} + \\
 & + f_0(z,t) - \sum_{i=1}^m (g_i(z,t))_{y_i}
 \end{aligned} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u(z, 0) = u_0(z), \quad u_t(z, 0) = u_1(z) \tag{2}$$

і крайовими умовами

$$u|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0, T)} = 0, \tag{3}$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0, T)$.

Введемо простори:

$$L^p((0, T); B) = \left\{ u : \int_0^T \|u(\cdot, t)\|_B^p dt < \infty \right\}, \quad \|u\|_{L^p((0, T); B)} = \left(\int_0^T \|u(\cdot, t)\|_B^p dt \right)^{1/p},$$

де $p \in (1, +\infty)$, B – деякий банахів простір;

$$L_{loc}^p(\bar{\Omega}) = \left\{ u : \forall K - \text{компактної множини з } \bar{\Omega} \quad u \in L^p(K) \right\};$$

$$V_0^{1,0}(\Omega^R) = \left\{ u : u, u_{x_i} \in L^2(\Omega^R), i \in \{1, \dots, k\}, u|_{\partial\Omega_x^R} = 0 \right\},$$

$$V_0^{2,1}(\Omega^R) = \left\{ u : u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{y_l} \in L^2(\Omega^R), i, j \in \{1, \dots, k\}, l \in \{1, \dots, m\}, \right.$$

$$\left. u|_{\partial\Omega^R} = 0, \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega_x^R \times \Omega_y^R} = 0 \right\},$$

з відповідними нормами

$$\|u\|_{V_0^{1,0}(\Omega^R)}^2 = \int_{\Omega^R} \left(\sum_{i=1}^k u_{x_i}^2 + u^2 \right) dz,$$

$$\|u\|_{V_0^{2,1}(\Omega^R)}^2 = \int_{\Omega^R} \left(\sum_{i=1}^k u_{x_i}^2 + u^2 + \sum_{i,j=1}^k u_{x_i x_j}^2 + \sum_{i=1}^m u_{y_i}^2 \right) dz;$$

$$V_{0,loc}^{1,0}(\bar{\Omega}) = \left\{ u : u, u_{x_i} \in L_{loc}^2(\bar{\Omega}), i \in \{1, \dots, k\}, u|_{\partial\Omega_x} = 0 \right\},$$

$$V_{0,loc}^{2,1}(\bar{\Omega}) = \left\{ u : u, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \in L_{loc}^2(\bar{\Omega}), i, j \in \{1, \dots, k\}, u_{y_l} \in L_{loc}^2(\bar{\Omega}), l \in \{1, \dots, m\}, \right.$$

$$\left. u|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega_x \times \partial\Omega_y} = 0 \right\},$$

$$V_0^{2,1}(\Omega) = \left\{ u : u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{y_l} \in L^2(\Omega), i, j \in \{1, \dots, k\}, l \in \{1, \dots, m\}, \right.$$

$$\left. u|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y} = 0 \right\},$$

$$H^{i,j}(\Omega^R) = \{u : u \in L^2(\Omega_y^R; H^i(\Omega_x^R)) \cap L^2(\Omega_x^R; H^j(\Omega_y^R)), i, j \in \mathbb{N}\},$$

$$W_0(\Omega^R) = V_0^{2,1}(\Omega^R) \cap H^{1,2}(\Omega^R) \cap L^{2p-2}(\Omega^R).$$

Припустимо виконання таких умов:

(A): $a_{ij}^{sl}, a_{ijt}^{sl}, a_{ijtt}^{sl}, a_{ij}, a_{ijt}, a_{ijtt}, a_0, a_{0t} \in L^\infty(Q_T), D_x^4 a_{ij}^{sl}(\cdot, 0), D_x^2 a_{ij}(\cdot, 0),$
 $a_0(\cdot, 0) \in L^\infty(\Omega),$ де $D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_k,$

$$A_0 \sum_{i,j=1}^k |\xi_{ij}|^2 \leq \sum_{i,j,s,l=i}^k a_{ij}^{sl}(z, t) \xi_{ij} \xi_{sl}, \quad A_0 > 0,$$

для майже всіх $(z, t) \in Q_T$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji},$

$$a_{ij}^{sl}(z, t) = a_{sl}^{ij}(z, t), \quad a_{ij}(z, t) = a_{ji}(z, t) \quad \text{майже для всіх } (z, t) \in Q_T;$$

(B): Функція $b : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і її похідна b_ξ вимірні в Ω для всіх $\xi \in \mathbb{R}; b(z, \cdot)$ неперервна на \mathbb{R} майже для всіх $z \in \Omega; b_\xi(z, \cdot)$ неперервна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ майже для всіх $z \in \Omega;$ для всіх $\xi, \tilde{\xi} \in \mathbb{R}$ і майже всіх $z \in \Omega$ виконуються такі нерівності:

$$(b(z, \xi) - b(z, \tilde{\xi}))(\xi - \tilde{\xi}) \geq b_0 |\xi - \tilde{\xi}|^p,$$

де $b_0 = 0$ при $p \in (1, 2]$ і $b_0 > 0$ при $p > 2,$

$$|b(z, \xi)| \leq b^0 |\xi|^{p-1};$$

$$b_{ij}, b_{ijt} \in L^\infty(Q_T), D_x^2 b_{ij}(\cdot, 0) \in L^\infty(\Omega), i, j \in \{1, \dots, k\},$$

$$\sum_{i,j=1}^k b_{ij}(z, t) \xi_i \xi_j \geq B_0 \sum_{i=1}^k |\xi_i|^2, B_0 > 0$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^k$ і майже всіх $(z, t) \in Q_T$;

(C): $c_{ij}, c_{ij t}, c_{ij t t} \in L^\infty(Q_T), D_y^2 c_{ij}(\cdot, 0) \in L^\infty(\Omega)$, де $D_y^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_m^{\beta_m}}$,

$$|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_m,$$

$$C_0 \sum_{i=1}^m |\xi_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^m c_{ij}(z, t) \xi_i \xi_j, C_0 > 0$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$ і майже всіх $(z, t) \in Q_T, c_{ij}(z, t) = c_{ji}(z, t), i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Означення 1. Функцію $u \in L^2((0, T); V_{0,loc}^{2,1}(\bar{\Omega}))$ таку, що $u_t \in L^2((0, T); V_{0,loc}^{1,0}(\bar{\Omega})) \cap L^p((0, T); L_{loc}^p(\bar{\Omega}))$, $u_{tt} \in L^2((0, T); L_{loc}^2(\bar{\Omega}))$ і у задовольняє початкові умови (2) і рівність

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\tau} \left[u_{tt} v + \sum_{i,j,s,l=1}^k a_{ij}^{sl}(z, t) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^k b_{ij}(z, t) u_{t x_i} v_{x_j} + \right. \\ & + \sum_{i,j=1}^m c_{ij}(z, t) u_{y_i} v_{y_j} + a_0(z, t) u v + b(z, u_t) v - \sum_{i,j=1}^k f_{ij}(z, t) v_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^k f_i(z, t) v_{x_i} - \\ & \left. - f_0(z, t) v - \sum_{i=1}^m g_i(z, t) v_{y_i} \right] dz dt = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

для довільних $\tau \in (0, T]$ і функцій $v \in L^2((0, T); V_0^{2,1}(\Omega)) \cap L^p((0, T); L^p(\Omega))$, які мають обмежений носій в Q_T , називаємо узагальненим розв'язком задачі (1)-(3).

Розглянемо спочатку задачу в обмеженій області Q_T^R для рівняння

$$A(u) = \sum_{i,j=1}^k (f_{ij}^R(z, t))_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^k (f_i^R(z, t))_{x_i} + f_0^R(z, t) - \sum_{i=1}^m (g_i^R(z, t))_{y_i} \quad (5)$$

з початковими умовами

$$u(z, 0) = u_0^R(z), \quad u_t(z, 0) = u_1^R(z) \quad (6)$$

і крайовими умовами

$$u|_{\partial\Omega^R \times (0, T)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega_x^R \times \Omega_y^R \times (0, T)} = 0, \quad (7)$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega_x^R \times \Omega_y^R \times (0, T)$.

Накладемо на вільний член умову

(F): $f_{ij}^R, f_{ij t}^R, f_{ij t t}^R, f_i^R, f_{i t}^R, g_l^R, g_{l t}^R, g_{l t t}^R, f_0^R, f_{0 t}^R \in L^2(Q_T^R)$,
 $(f_{ij}^R(\cdot, 0))_{x_i x_j}, (f_i^R(\cdot, 0))_{x_i}, (g_l^R(\cdot, 0))_{y_l} \in L^2(\Omega^R), l \in \{1, \dots, m\}, i, j \in \{1, \dots, k\}$.

Означення 2. Функцию $u \in L^2((0, T); V_0^{2,1}(\Omega^R))$ таку, що $u_t \in L^2((0, T); V_0^{1,0}(\Omega^R)) \cap L^p((0, T); L^p(\Omega^R))$, $u_{tt} \in L^2((0, T); L^2(\Omega^R))$ і u задовольняє початкові умови (6) і рівність

$$\int_{\Omega^R} \left[u_{tt}v + \sum_{i,j,s,l=1}^k a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z,t)u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^k b_{ij}(z,t)u_{tx_i} v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^m c_{ij}(z,t)u_{y_i} v_{y_j} + a_0(z,t)uv + b(z,u_t)v - \sum_{i,j=1}^k f_{ij}^R(z,t)v_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^k f_i^R(z,t)v_{x_i} - f_0^R(z,t)v - \sum_{i=1}^m g_i^R(z,t)v_{y_i} \right] dz dt = 0 \quad (8)$$

для довільних $\tau \in (0, T]$ і $v \in L^2((0, T); V_0^{2,1}(\Omega^R)) \cap L^p((0, T); L^p(\Omega^R))$, називаємо узагальненим розв'язком задачі (5)-(7).

Теорема 1. Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (F) і $u_0^R \in V_0^{2,1}(\Omega^R) \cap H^{4,2}(\Omega^R)$, $u_1^R \in V_0^{1,0}(\Omega^R) \cap L^{2p-2}(\Omega^R) \cap H^{2,2}(\Omega^R)$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (5)-(7).

Доведення. Методом Фаєдо-Гальоркіна побудуємо наближений розв'язок. Оскільки простір $W_0(\Omega^R)$ – сепарабельний банахів, то в ньому існує така злічена множина $\{\varphi_h\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $W_0(\Omega^R)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\varphi_h\}$ ортонормована в $L^2(\Omega^R)$.

Розглянемо функції

$$u^N(z, t) = \sum_{h=1}^N c_h^N(t) \varphi_h(z), \quad N = 1, 2, \dots,$$

де $c_1^N, c_2^N, \dots, c_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші

$$\int_{\Omega^R} \left[u_{tt}^N \varphi_h + \sum_{i,j,s,l=1}^k a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_i x_j}^N(\varphi_h)_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z,t)u_{x_i}^N(\varphi_h)_{x_j} + a_0(z,t)u^N \varphi_h + \sum_{i,j=1}^k b_{ij}(z,t)u_{tx_i}^N(\varphi_h)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^m c_{ij}(z,t)u_{y_i}^N(\varphi_h)_{y_j} + b(z, u_t^N)u_t^N \varphi_h \right] dz = \int_{\Omega^R} \left[\sum_{i,j=1}^k f_{ij}^R(\varphi_h)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^k f_i^R(\varphi_h)_{x_i} + f_0^R \varphi_h + \sum_{i=1}^m g_i^R(\varphi_h)_{y_i} \right] dz, \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$c_h^N(0) = u_{0,h}^{R,N}, \quad c_{ht}^N(0) = u_{1,h}^{R,N}, \quad h = 1, \dots, N, \quad (10)$$

де

$$u_0^N(z) = \sum_{h=1}^N u_{0,h}^{R,N} \varphi_h(z), \quad \|u_0^{R,N} - u_0^R\|_{V_0^{2,1}(\Omega^R) \cap H^{4,2}(\Omega^R)} \rightarrow 0,$$

$$u_1^N(z) = \sum_{h=1}^N u_{1,h}^{R,N} \varphi_h(z), \quad \|u_1^{R,N} - u_1^R\|_{V_0^{1,0}(\Omega^R) \cap L^{2p-2}(\Omega^R) \cap H^{2,2}(\Omega^R)} \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

На підставі теореми Каратеодорі [26, с. 54] існує розв'язок задачі (9), (10), який має абсолютно неперервну похідну на проміжку $[0, t_m]$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_m = T$.

Домножимо (9) на $c_{ht}^N(t)$, підсумуємо за h від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ , де $\tau \in (0, T]$

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\tau^R} \left[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j,s,l=1}^k a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j}^N u_{t x_s x_l}^N + \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z,t) u_{x_i}^N u_{t x_j}^N + a_0(z,t) u^N u_t^N + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^k b_{ij}(z,t) u_{t x_i}^N u_{t x_j}^N + \sum_{i,j=1}^m c_{ij}(z,t) u_{y_i}^N u_{t y_j}^N + b(z, u_t^N) u_t^N \right] dz dt = \int_{Q_\tau^R} \left[\sum_{i,j=1}^k f_{ij}^R u_{t x_i x_j}^N + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^k f_i^R u_{t x_i}^N + f_0^R u_t^N + \sum_{i=1}^m g_i^R u_{t y_i}^N \right] dz dt. \end{aligned} \quad (11)$$

На підставі умов (A), (B), (C), (F) з останньої рівності легко отримати оцінку

$$\|u_t^N\|_{V_0^{1,0}(Q_T^R) \cap L^p(Q_T^R)} \leq K_1, \quad \|u^N\|_{V_0^{2,1}(Q_T^R)} \leq K_1, \quad (12)$$

де K_1 – додатна константа, яка не залежить від N .

Диференціюючи за t рівність (9) і враховуючи умови теореми (A), (B), (C), (F), можемо перекоонатися в правильності оцінок

$$\|u_{tt}^N\|_{V_0^{1,0}(Q_T^R)} \leq K_2, \quad \|u_t^N\|_{V_0^{2,1}(Q_T^R) \cap L^p(Q_T^R)} \leq K_2, \quad \|u^N\|_{V_0^{2,1}(Q_T^R)} \leq K_2, \quad K_2 > 0. \quad (13)$$

Оскільки $u_t^N \in L^p(Q_T^R)$, то

$$\int_{Q_T^R} |b(z, u_t^N)|^{p'} dz dt \leq |b^0|^{p'} \int_{Q_T^R} |u_t^N|^p dz dt \leq K_3, \quad K_3 > 0.$$

На підставі (13) з послідовності $\{u^N\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{N_k}\}$, що

$$\begin{aligned} & u_{tt}^{N_k} \rightarrow u_{tt} \text{ слабко в } L^\infty((0, T); V_0^{1,0}(\Omega^R)), \\ & u_t^{N_k} \rightarrow u_t \text{ слабко в } L^\infty((0, T); L^p(\Omega^R) \cap V_0^{2,1}(\Omega^R)), \\ & b(z, u_t^{N_k}) \rightarrow \chi \text{ слабко в } L^{p'}(Q_T^R) \text{ при } N_k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (14)$$

Доведемо, що $b(z, u_t) = \chi$. З оцінки (14) випливає, що $u_{tt}^N \in L^2((0, T); L^2(\Omega^R))$, $u_t^N \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega^R))$, тому u_t^N належить обмеженій множині в $H^1(Q_T^R)$. Але $H^1(Q_T^R) \subset L^2(Q_T^R)$ компактно. Не зменшуючи загальності, позначимо підпослідовність $u_t^{N_k}$, вибрану з підпослідовності u_t^N таку, що $u_t^{N_k} \rightarrow u_t$ сильно в $L^2(Q_T^R)$ і $u_t^{N_k} \rightarrow u_t$

майже всюди в Q_T^R . Оскільки функція $b(z, \cdot)$ – неперервна, то $b(\cdot, u_t^{N_k}) \rightarrow b(\cdot, u_t)$ слабо в $L^{p'}(Q_T^R)$, але на підставі (14) робимо висновок, що

$$b(z, u_t) = \chi. \quad (15)$$

Залишилося показати, що виконуються початкові умови. З оцінок одержаних раніше і леми 1.2 [27, с. 20] випливає, що

$$u^{N_k}(\cdot, 0) \rightarrow u(\cdot, 0) \text{ слабо в } L^2(\Omega^R),$$

$$\text{але } u^{N_k}(\cdot, 0) = u_0^{R, N_k}(\cdot) \rightarrow u_0^R(\cdot) \text{ в } V_0^{2,1}(\Omega^R),$$

тому $u(z, 0) = u_0^R(z)$.

Оскільки $u_{tt}^{N_k} \rightarrow u_{tt}$ слабо в $L^2(Q_T^R)$, з леми 1.2 [27, с. 20] випливає, що

$$u_t^{N_k}(z, 0) \rightarrow u_t(z, t)|_{t=0} = u_t(z, 0), \quad z \in \Omega^R,$$

але відомо, що $u_t^{N_k}(\cdot, 0) = u_1^{R, N_k}(\cdot) \rightarrow u_1^R(\cdot)$ в $V_0^{1,0}(\Omega^R)$, тому $u_t(z, 0) = u_1^R(z)$. Отже, виконуються початкові умови (6). Отже, розв'язок існує.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), $p \in (1, 2]$, $u_0 \in V_{0,loc}^{2,1}(\bar{\Omega})$, $u_1 \in L_{loc}^2(\bar{\Omega})$, $f_{ij}, f_{ijt}, f_i, f_0, g_l, g_t \in L^2((0, T); L_{loc}^2(\bar{\Omega}))$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $l \in \{1, \dots, m\}$ і нерівність*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0^R} \left[|u_1(z)|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{0x_i x_j}(z)|^2 + \sum_{i=1}^k |u_{0x_i}(z)|^2 + |u_0(z)|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{0y_i}(z)|^2 \right] dz + \\ & + \sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_t^R} \left[\sum_{i,j=1}^k |f_{ij}(z, t)|^2 + \sum_{i=1}^m |g_i(z, t)|^2 \right] dz + \int_{Q_T^R} \left[\sum_{i,j=1}^k |f_{ij}(z, t)|^2 + \sum_{i,j=1}^k |f_{ijt}(z, t)|^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^k |f_i(z, t)|^2 + \sum_{i=1}^m |g_i(z, t)|^2 + \sum_{i=1}^m |g_{it}(z, t)|^2 + |f_0(z, t)|^2 \right] dz dt \leq a e^{bR^2}. \end{aligned}$$

для довільного $R > 1$, де a, b – деякі додатні сталі. Тоді існує $T_0 \leq T$, що задача (1)-(3) має узагальнений розв'язок у необмеженій області Q_{T_0} .

Доведення. Розглянемо в області Q_T^R , де R набуває значення 2^h , $h \in \mathbb{N}$ (для спрощення запису цю область позначимо через Q_T^h) допоміжну задачу

$$\begin{aligned} A(u) &= F^{h,h}, \quad (z, t) \in Q_T^h, \\ u|_{\partial\Omega^h \times (0, T)} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega_x^h \times \Omega_y^h \times (0, T)} = 0, \quad (16) \\ u(z, 0) &= u_0^{h,h}(z), \quad u_t(z, 0) = u_1^{h,h}(z), \quad z \in \Omega^h, \end{aligned}$$

де початкові умови мають такий вигляд $u_0^{h,h}(z) = u_0^h(z)\chi^h(z)$, $u_1^{h,h}(z) = u_1^h(z)\chi^h(z)$ з

$$\chi^h(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < h-1, \quad |y| < h-1, \\ 0 & \text{при } |x| \geq h, \quad |y| \geq h, \end{cases}$$

і $0 \leq \chi^h(z) \leq 1$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\chi^h \in C^2(\mathbb{R}^n)$, а вільний член

$$F^{h,h}(z, t) = \sum_{i,j=1}^k (f_{ij}^{h,h})_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^k (f_i^{h,h})_{x_i} + f_0^{h,h} - \sum_{i=1}^m (g_i^{h,h})_{y_i},$$

$$f_{ij}^{h,h}(z, t) = \begin{cases} f_{ij}^h(z, t), & (z, t) \in Q_T^h, \\ 0, & (z, t) \in Q_T \setminus Q_T^h, \end{cases} \quad f_i^{h,h}(z, t) = \begin{cases} f_i^h(z, t), & (z, t) \in Q_T^h, \\ 0, & (z, t) \in Q_T \setminus Q_T^h, \end{cases}$$

$$f_0^{h,h}(z, t) = \begin{cases} f_0^h(z, t), & (z, t) \in Q_T^h, \\ 0, & (z, t) \in Q_T \setminus Q_T^h, \end{cases} \quad g_i^{h,h}(z, t) = \begin{cases} g_i^h(z, t), & (z, t) \in Q_T^h, \\ 0, & (z, t) \in Q_T \setminus Q_T^h. \end{cases}$$

Нехай виконуються такі умови:

$f_{ij}^h, f_{ij,t}^h, f_i^h, f_0^h, g_l^h, g_{l,t}^h$ вимірні в Q_T і в кожній області Q_T^h задовольняють умову (F);

$$\begin{aligned} u_1^h &\in V_{0,loc}^{2,1}(\bar{\Omega}) \cap H_{loc}^2(\bar{\Omega}), \quad h \in \mathbb{N}, \quad u_1^h \rightarrow u_1 \quad \text{в } L_{loc}^2(\bar{\Omega}) \quad \text{при } h \rightarrow \infty; \\ u_0^h &\in V_{0,loc}^{2,1}(\bar{\Omega}) \cap H_{loc}^4(\bar{\Omega}), \quad u_0^h \rightarrow u_0 \quad \text{в } V_{loc}^{2,1}(\bar{\Omega}) \quad \text{при } h \rightarrow \infty; \\ f_{ij}^h &\rightarrow f_{ij} \quad \text{в } L^2((0, T); L_{loc}^2(\bar{\Omega})), \quad f_{ij,t}^h \rightarrow f_{ij,t} \quad \text{в } L^2((0, T); L_{loc}^2(\bar{\Omega})), \\ f_i^h &\rightarrow f_i \quad \text{в } L^2((0, T); L_{loc}^2(\bar{\Omega})), \quad f_0^h \rightarrow f_0 \quad \text{в } L^2((0, T); L_{loc}^2(\bar{\Omega})), \\ g_l^h &\rightarrow g_l \quad \text{в } L^2((0, T); L_{loc}^2(\bar{\Omega})), \quad g_{l,t}^h \rightarrow g_{l,t} \quad \text{в } L^2((0, T); L_{loc}^2(\bar{\Omega})) \end{aligned} \quad (17)$$

при $h \rightarrow \infty$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $l \in \{1, \dots, m\}$.

Розглянемо u^α, u^β – розв’язки задачі (16) при $\alpha > h + 1$, $\beta > h + 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. З попередньої теореми випливає, що ця задача має узагальнений розв’язок в сенсі означення 2. Підставимо u^α, u^β в рівність (8), отримані рівності віднімемо і приймемо, що

$$v = u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t},$$

де $u^{\alpha\beta} = u^\alpha - u^\beta$,

$$\varphi_{R\chi}(x) = (h_{R\chi}(x))^\gamma = \left(\rho \left(\frac{|x| - R}{\chi} \right) \right)^\gamma, \quad \psi_{R\chi}(y) = (\hat{h}_{R\chi}(y))^{\gamma_1} = \left(\rho \left(\frac{|y| - R}{\chi} \right) \right)^{\gamma_1},$$

$\gamma > 2$, $\gamma_1 > 2$, $\chi > 0$, $0 \leq \rho(\xi) \leq 1$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\rho(\xi) = 1$, $\xi < 0$, $\rho(\xi) = 0$, $\xi \geq 1$.

Тоді одержимо рівність

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz + \int_{Q_\tau} \left[-u_t^{\alpha\beta} u_{tt}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + \mu |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \times \right. \\ &\left. \times \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + \sum_{i,j,s,l=1}^k a_{ij}^{sl}(z, t) u_{x_i x_j}^{\alpha\beta} \left(u_{tx_s x_l}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + u_{tx_s}^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_l} \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times u_{tx_i}^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_s} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + u_t^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_s x_i} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z, t) u_{x_i}^{\alpha\beta} \times \\
& \times \left(u_{tx_i}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + u_t^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_j} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} \right) + a_0(z, t) u^{\alpha\beta} u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \times \\
& \times \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + \sum_{i,j=1}^k b_{ij}(z, t) u_{tx_i}^{\alpha\beta} \left(u_{tx_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + u_t^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_j} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} \right) + \\
& + \sum_{i,j=1}^m c_{ij}(z, t) u_{y_i}^{\alpha\beta} \left(u_{ty_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) (\psi_{R\chi}(y))_{y_j} e^{-\mu t} \right) + \\
& + (b(z, u_t^\alpha) - b(z, u_t^\beta)) u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} \Big] dz dt = \int_{\Omega_0} |u_1^{\alpha, \alpha} - u_1^{\beta, \beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dz + \\
& + \int_{Q_\tau} \left[\sum_{i,j=1}^k (f_{ij}^{\alpha, \alpha} - f_{ij}^{\beta, \beta}) \left(u_{tx_i x_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + u_{tx_i}^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_j} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + u_{tx_j}^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_i} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + u_t^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_i x_j} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^k (f_i^{\alpha, \alpha} - f_i^{\beta, \beta}) \left(u_{tx_i}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + u_t^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_i} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} \right) + \right. \\
& \quad \left. + (f_0^{\alpha, \alpha} - f_0^{\beta, \beta}) u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + \sum_{i=1}^m (g_i^{\alpha, \alpha} - g_i^{\beta, \beta}) \left(u_{ty_i}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) (\psi_{R\chi}(y))_{y_i} e^{-\mu t} \right) \right] dz dt, \quad \tau \in (0, T]. \tag{18}
\end{aligned}$$

Оцінімо доданки цієї рівності. Очевидно,

$$\begin{aligned}
J_1 & := - \int_{Q_\tau} u_t^{\alpha\beta} u_{tt}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt = - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |u_1^{\alpha, \beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dz + \frac{\mu}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt.
\end{aligned}$$

На підставі умови (A)

$$\begin{aligned}
J_2 & := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^k a_{ij}^{sl}(z, t) u_{x_i x_j}^{\alpha\beta} u_{tx_s x_l} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geq \frac{A_0}{2} \int_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \times \\
& \times \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dx - \frac{A^0 + 1}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dx - \frac{A_1 + 1 - \mu A_0}{2} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dx dt; \\ J_3 & := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^k a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j}^{\alpha\beta} u_t^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_s x_l} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geq \\ & \geq -\frac{d}{2} \int_{Q_\tau} \left[\frac{A_2 k^2}{\chi^2} |u_t^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} + \frac{1}{\chi^2} \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \right] \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt, \end{aligned}$$

де $|(h_{R\chi})_{x_i x_j}(x)| \leq \frac{d}{\chi^2}$;

$$\begin{aligned} J_4 & := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^k a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j}^{\alpha\beta} u_{tx_s}^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_l} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geq \\ & \geq -\frac{d}{2} \int_{Q_\tau} \left[A_2 k \delta \sum_{i=1}^k |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) + \frac{1}{\chi^2 \delta} \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \right] \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt, \end{aligned}$$

де $|(h_{R\chi})_{x_i}(x)| \leq \frac{d}{\chi}$, $\delta > 0$.

Інтеграл

$$\int_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^k a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j}^{\alpha\beta} u_{tx_l}^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_s} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt$$

оцінюється аналогічно.

Далі

$$\begin{aligned} J_5 & := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z,t) u_{x_i}^{\alpha\beta} u_{tx_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geq \\ & \geq -\frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \left[A_3 \delta \sum_{i=1}^k |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 + \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^k |u_{x_i}^{\alpha\beta}|^2 \right] \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt; \\ J_6 & := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z,t) u_{x_i}^{\alpha\beta} u_t^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_j} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geq \\ & \geq -\frac{d}{2} \int_{Q_\tau} \left[\frac{A_3 k}{\chi^2} |u_t^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} + \sum_{i=1}^k |u_{x_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \right] \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt; \\ J_7 & := \int_{Q_\tau} a_0(z,t) u^{\alpha\beta} u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geq \\ & \geq -\frac{A_4}{2} \int_{Q_\tau} \left[|u^{\alpha\beta}|^2 + |u_t^{\alpha\beta}|^2 \right] \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt. \end{aligned}$$

З умови (B) маємо

$$\begin{aligned}
 J_8 &:= \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k b_{ij}(z,t) u_{tx_i}^{\alpha\beta} u_{tx_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geq \\
 &\geq B_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^k |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt; \\
 J_9 &:= \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k b_{ij}(z,t) u_{tx_i}^{\alpha\beta} u_t^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_j} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geq \\
 &\geq -\frac{d}{2} \int_{Q_\tau} \left[\delta \sum_{i=1}^k |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) + \frac{B_1 k}{\delta \chi^2} |u_t^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \right] \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t}; \\
 J_{10} &:= \int_{Q_\tau} (b(z, u_t^\alpha) - b(z, u_t^\beta)) u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geq 0.
 \end{aligned}$$

З умови (C) одержимо

$$\begin{aligned}
 J_{11} &:= \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^m c_{ij}(z,t) u_{y_i}^{\alpha\beta} u_{ty_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geq \frac{C_0}{2} \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) \times \\
 &\times e^{-\mu\tau} dz - \frac{C^0}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dz + \frac{\mu C_0 - C_1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt; \\
 J_{12} &:= \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^m c_{ij}(z,t) u_{y_i}^{\alpha\beta} u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) (\psi_{R\chi}(y))_{y_j} e^{-\mu t} dz dt \geq \\
 &\geq -\frac{d}{2} \int_{Q_\tau} \left[\frac{1}{\chi^2} \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 [\widehat{h}_{R\chi}(y)]^{\gamma_1-2} + C_2 m |u_t^{\alpha\beta}|^2 \psi_{R\chi}(y) \right] \varphi_{R\chi}(x) e^{-\mu t} dz dt, \\
 &|(h_{R\chi})_{y_i}(y)| \leq \frac{h}{\chi}.
 \end{aligned}$$

Крім того,

$$\begin{aligned}
 J_{13} &:= \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k (f_{ij}^{\alpha,\alpha} - f_{ij}^{\beta,\beta}) u_{tx_i x_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \leq \\
 &\leq \frac{1}{2\delta} \int_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^k |f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^k |f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dz + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k \left(\frac{\mu}{\delta} |f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2 + |f_{ijt}^{\alpha,\beta}|^2 \right) \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \frac{(\delta\mu + 1)}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 \times \\
 & \times \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt,
 \end{aligned}$$

де $f_{ij}^{\alpha,\beta} = f_{ij}^{\alpha,\alpha} - f_{ij}^{\beta,\beta}$;

$$\begin{aligned}
 J_{14} & := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k (f_{ij}^{\alpha,\alpha} - f_{ij}^{\beta,\beta}) u_{tx_i}^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_j} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \leq \frac{d}{2\delta} \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k |f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2 \times \\
 & \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \frac{d\delta}{2\chi^2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^k |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt; \\
 J_{15} & := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k (f_{ij}^{\alpha,\alpha} - f_{ij}^{\beta,\beta}) u_t^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_i x_j} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \leq \\
 & \leq \frac{d}{2\chi^2} \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k |f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \frac{dk^2}{\chi^2} \int_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-4} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt; \\
 J_{16} & := \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^k (f_i^{\alpha,\alpha} - f_i^{\beta,\beta}) u_{tx_i}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \leq \\
 & \leq \frac{1}{2\delta} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^k |f_i^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \frac{\delta}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^k |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt; \\
 J_{17} & := \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^k (f_i^{\alpha,\alpha} - f_i^{\beta,\beta}) u_t^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_i} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \leq \\
 & \leq \frac{d}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^k |f_i^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \frac{d}{2\chi^2} \int_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt; \\
 J_{18} & := \int_{Q_\tau} (f_0^{\alpha,\alpha} - f_0^{\beta,\beta}) u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \leq \\
 & \leq \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |f_0^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{19} &:= \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^m (g_i^{\alpha,\alpha} - g_i^{\beta,\beta}) u_{ty_i}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \leq \\
&\leq \frac{1}{2\delta} \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^m |g_i^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^m |g_i^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dz + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^m |u_{0y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dz + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^m (\mu |g_i^{\alpha,\beta}|^2 + |g_{it}^{\alpha,\beta}|^2) \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{20} &:= \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^m (g_i^{\alpha,\alpha} - g_i^{\beta,\beta}) u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) (\psi_{R\chi}(y))_{y_i} e^{-\mu t} dz dt \leq \\
&\leq \frac{d}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^m |g_i^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \frac{d}{2\chi^2} \int_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) [\widehat{h}_{R\chi}(y)]^{\gamma-2} e^{-\mu t} dz dt.
\end{aligned}$$

Подібно як в лемі [28] легко довести оцінку

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^k |u_{x_i}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \leq \delta_1 \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k u_{x_i x_j}^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \\
&+ \frac{k}{\delta_1} \int_{Q_\tau} u^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \frac{d^2 k}{\chi^2} \int_{Q_\tau} u^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt, \quad \delta_1 > 0.
\end{aligned}$$

Прийmemo $\delta_1 = 1$. Крім того,

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau} |u(z, t)|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \leq T^2 \int_{Q_\tau} u_t^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \\
&\quad + 2T \int_{\Omega_0} u_0^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dz.
\end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо таку оцінку:

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^k |u_{x_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \leq \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \\
&+ kT^2 \int_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \frac{d^2 k T^2}{\chi^2} \int_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt + \\
&+ 2kT \int_{\Omega_0} |u_0^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dz + \frac{2kd^2 T}{\chi^2} \int_{\Omega_0} |u_0^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \psi_{R\chi}(y) dz.
\end{aligned}$$

Використовуючи одержані оцінки, з (18) маємо

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\tau} \left[|u_t^{\alpha\beta}|^2 + (A_0 - \delta) \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 + (C_0 - \delta) \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \right] \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz + \\
 & \quad + \int_{Q_\tau} \left[|u_t^{\alpha\beta}|^2 \left(\mu - A_4 - A_4 \tau^2 - \frac{k\tau^2}{\delta} - dk\tau^2 - dmC_2 - 1 \right) + \right. \\
 & \quad + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 \left(\mu A_0 - A_1 - \frac{1}{\delta} - d - \mu\delta - 1 \right) + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 (\mu C_0 - C_1 - 2) + \\
 & \quad \left. + \sum_{i=1}^k |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 \left(2B_0 - 2dkA_2\delta - A_3\delta - d\delta - \delta - \frac{2d\delta}{\chi^2} \right) \right] \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \leq \\
 & \leq \int_{\Omega_0} \left[\left(2TA_4 + \frac{2kT}{\delta} + 2kTd \right) |u_0^{\alpha\beta}|^2 + |u_1^{\alpha\beta}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{0x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 (A^0 + 1) + \sum_{i=1}^m |u_{0y_i}^{\alpha\beta}|^2 (C^0 + 1) \right] \times \\
 & \quad \times \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dz + \int_{\Omega_0} \left(\frac{2d^2 kT}{\chi^2 \delta} + \frac{2d^3 kT}{\chi^2} \right) |u_0^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \psi_{R\chi}(y) dz + \\
 & \quad + \int_{Q_\tau} \left[\sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \psi_{R\chi}(y) \left(\frac{2d}{\delta\chi^2} + \frac{d}{\chi^2} \right) + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 [\widehat{h}_{R\chi}(y)]^{\gamma-2} \varphi_{R\chi}(x) \frac{d}{\chi^2} + \right. \\
 & \quad \left. + |u_t^{\alpha\beta}|^2 \left(\frac{d^2 k\tau^2}{\chi^2 \delta} + \frac{d^3 k\tau^2}{\chi^2} + \frac{A_1 k^2 d}{\chi^2} + \frac{B_1 kd}{\delta\chi^2} + \frac{dA_3 k}{\chi^2} \right) [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \psi_{R\chi}(y) + \right. \\
 & \quad \left. + |u_t^{\alpha\beta}|^2 [\widehat{h}_{R\chi}(y)]^{\gamma-2} \varphi_{R\chi}(x) \frac{d}{\chi^2} \right] e^{-\mu t} dz dt + \int_{\Omega_0} \left[\sum_{i,j=1}^k |f_{ij}^{\alpha\beta}|^2 + \sum_{i=1}^m |g_i^{\alpha\beta}|^2 \right] \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dz + \\
 & \quad + \int_{\Omega_\tau} \left[\frac{1}{\delta} \sum_{i,j=1}^k |f_{ij}^{\alpha\beta}|^2 + \sum_{i=1}^m |g_i^{\alpha\beta}|^2 \right] \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz + \\
 & \quad + \int_{Q_\tau} \left[\frac{\mu}{\delta} \sum_{i,j=1}^k |f_{ij}^{\alpha\beta}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |f_{ij t}^{\alpha\beta}|^2 + \frac{2d}{\delta} \sum_{i,j=1}^k |f_{ij}^{\alpha\beta}|^2 + \frac{d}{\chi^2} \sum_{i,j=1}^k |f_{ij}^{\alpha\beta}|^2 + \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^m |f_i^{\alpha\beta}|^2 + \right. \\
 & \quad \left. + d \sum_{i=1}^k |f_i^{\alpha\beta}|^2 + |f_0^{\alpha\beta}|^2 + d \sum_{i=1}^m |g_i^{\alpha\beta}|^2 + \mu \sum_{i=1}^m |g_i^{\alpha\beta}|^2 + \sum_{i=1}^m |g_{it}^{\alpha\beta}|^2 \right] \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt.
 \end{aligned}$$

Нехай $R = R_0$, $R_0 + \chi = R_1$, $\mu = \mu_0 + \mu_1$, де $R_0 = 2^h$, $R_1 = 2^{h-1}$, $\chi = 2^h$, $h \in \mathbb{N}$,

$$\mu_1 = \max \left\{ A_4(1 + T^2) + dkT^2 + dmC_2 + 1 + \frac{kT^2}{\delta}; \quad \frac{(A_1 + 1)\delta + 1}{\delta(A_0 + \delta)}; \quad \frac{C_1 + 2}{C_0} \right\},$$

$2B_0 - (2dkA_2 + A_3 + d + \frac{2d}{\chi^2} + 1)\delta \leq B_0$. Тоді з останньої нерівності одержимо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\tau^{R_0}} \left[|u_t^{\alpha\beta}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \right] e^{-\mu_0 \tau} dz + \int_{Q_\tau^{R_0}} \left[\mu_0 |u_t^{\alpha\beta}|^2 + \mu_0 \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^k |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 + \mu_0 \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \right] e^{-\mu_0 t} dz dt \leq \frac{M_1}{(R_1 - R_0)^2} \int_{Q_\tau^{R_1}} \left[\sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 + |u_t^{\alpha\beta}|^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \right] e^{-\mu_0 t} dz dt + M_2 \mu_0, \end{aligned} \quad (19)$$

$M_1 > 0$, M_2 – константа, яка обмежує інтеграли від початкових функцій і вільного члена. З умови (17) випливає, що M_2 можемо зробити як завгодно малою.

Отже, виконується і така нерівність:

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\tau^{R_0}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2 \right] e^{-\mu_0 t} dz dt \leq \\ & \leq \frac{M_1}{\mu_0 \chi^2} \int_{Q_\tau^{R_1}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2 \right] e^{-\mu_0 t} dz dt + M_2. \end{aligned}$$

Поділимо відрізок $[R_0, R_0 + \chi]$ на q частин, де $q = \lambda 2^{2h}$, $\frac{\lambda^2 M_1 2^{2h}}{\mu_0} \leq e^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{N}$. Одержимо

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\tau^{R_0}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2 \right] dz dt \leq e^{-q+\mu_0 \tau} \times \\ & \times \int_{Q_\tau^{R_1}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2 \right] dz dt + M_2 \sum_{i=0}^{q-1} e^{-i+\mu_0 \tau}. \end{aligned} \quad (20)$$

Оцінимо елементи послідовності $\{u^h\}$. Враховуючи означення узагальненого розв'язку, для u^h одержимо нерівність

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\tau^{R_0}} \left[|u_t^h|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^h|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^h|^2 + \sum_{i=1}^k |u_{tx_i}^h|^2 \right] dz dt \leq \\ & \leq M_3 \left(\int_{\Omega_0^{R_0}} \left[|u_1^{h,h}(z)|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{0x_i x_j}^{h,h}(z)|^2 + \sum_{i=1}^k |u_{0x_i}^{h,h}(z)|^2 + |u_0^{h,h}(z)|^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^m |u_{0y_i}^{h,h}(z)|^2 \right] dz + \int_{\Omega_\tau^{R_0}} \left[\sum_{i,j=1}^k |f_{ij}^{h,h}|^2 + \sum_{i=1}^m |g_i^{h,h}|^2 \right] dz + \int_{\Omega_0^{R_0}} \left[\sum_{i,j=1}^k |f_{ij}^{h,h}|^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^m |g_i^{h,h}|^2 \Big] dz + \int_{Q_\tau^{R_0}} \left[\sum_{i,j=1}^k |f_{ij}^{h,h}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |f_{ijt}^{h,h}|^2 + \sum_{i=1}^k |f_i^{h,h}|^2 + \sum_{i=1}^m |g_i^{h,h}|^2 + \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^m |g_{it}^{h,h}|^2 + |f_0^{h,h}|^2 \right] dz dt \Big).
 \end{aligned}$$

Отже, на підставі умови теореми з останньої нерівності маємо оцінку

$$\int_{Q_\tau^{R(h)}} \left[|u_t^h|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^h|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^h|^2 \right] dz dt \leq M_4 e^{b(R(h))^2}, \quad (21)$$

де M_4 – додатна константа, яка не залежить від h , $h \in \mathbb{N}$. З нерівності $|u^{h+3,h+2}|^2 \leq 2(|u^{h+3}|^2 + |u^{h+2}|^2)$ і з (21) випливає

$$\int_{Q_\tau^{R(h+1)}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2 \right] dz dt \leq 4M_4 e^{b(R(h+4))^2}.$$

З (20) одержимо

$$\begin{aligned}
 \int_{Q_\tau^{R(h)}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2 \right] dz dt & \leq M_5 e^{-q+\mu_0\tau+b(R(s+4))^2} + \\
 & + \frac{\epsilon M_2}{e-1} e^{\mu_0\tau+b(R(s+4))^2},
 \end{aligned}$$

де $\sum_{i=0}^{q-1} e^{-i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i} = \frac{e}{e-1}$ і $e^{\mu_0\tau} \leq e^{\mu_0\tau+b(R(s+4))^2}$.

Враховуючи збіжність послідовностей f_{ij}^h , f_{ijt}^h , f_i^h , f_0^h , g_l^h , g_{lt}^h , де $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $l \in \{1, \dots, m\}$, можемо вибрати таке $h_1 \geq h_0$, що для всіх $h > h_1$ буде виконуватися нерівність $M_2 < e^{-q}$. З останньої нерівності одержимо

$$\int_{Q_\tau^{R(h)}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2 \right] dz dt \leq M_6 e^{-q+\mu_0\tau+b(R(s+4))^2}, \quad (22)$$

де M_6 – додатна константа, яка не залежить від h .

Візьмемо $\lambda = 2^8([b] + 1)$. Але $\frac{\lambda^2 M_1 2^{2h}}{\mu_0} \leq e^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, тому $\mu_0 = b_1 2^{2h}$, де $b_1 = e M_1 2^{16}([b] + 1)$. Оскільки

$$\begin{aligned}
 -q + \mu_0\tau + b(R(h+4))^2 & = -\lambda 2^{2h} + b_1 2^{2h}\tau + b 2^{2h+8} = 2^{2h} (-([b] + 1)2^8 + b_1\tau + 2^8b) = \\
 & = -2^{2h} ((1 + [b] - b)2^8 - b_1\tau) \leq -2^{2h} ((1 - \{b\})2^8 - \lambda\tau_0)
 \end{aligned}$$

для всіх $\tau \in [0, \tau_0]$, де $\tau_0 = \frac{(1-\{b\})2^8 - \beta_0}{b_1}$, $(1 - \{b\})2^8 > \beta_0 > 0$, тоді з (22) випливає оцінка

$$\int_{Q_\tau^{R(h)}} \left[|u_t^{h+3, h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{h+3, h+2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{h+3, h+2}|^2 \right] dz dt \leq M_6 e^{-\beta_0 2^{2h}}, \quad \tau \in [0, \tau_0]. \quad (23)$$

На підставі (23) для довільного $N \in \mathbb{N}$ одержимо

$$\begin{aligned} \|u^{h+1, h+N}\|_{V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_h})} &\leq \sum_{i=1}^{N-1} \|u^{h+1, h+i+1}\|_{V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_h})} \leq \sum_{i=1}^{N-1} \|u^{h+1, h+i+1}\|_{V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_{h+i-1}})} \leq \\ &\leq M_6 e^{-\beta_0 2^{2h}} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\beta_0 2^{2(i-1)}} = M_7 e^{-\beta_0 2^{2h}}. \end{aligned}$$

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване як завгодно мале число, R_0 – довільне фіксоване додатне число. Тоді згідно з останньою оцінкою існує таке $h_2 \in \mathbb{N}$, що для всіх $h > h_2$ і N натуральних

$$\|u^{h+1, h+N}\|_{V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_h})} \leq \varepsilon,$$

тобто послідовність $\{u^h\}$ фундаментальна в просторі $V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_0})$.

Отже, з (19) випливає фундаментальність $\{u^h\}$ у просторі $L^2((0, \tau_0); V_0^{2,1}(\Omega^{R_0}))$ і фундаментальність $\{u_t^h\}$ у просторі $L^2((0, \tau_0); V_0^{1,0}(\Omega^{R_0}))$. Тому $\{u^h\}$ сильно збігається до функції u , u_t^h сильно збігається до функції u_t у відповідних просторах при $h \rightarrow \infty$. Оскільки кожна функція u^h задовольняє рівність

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} \left[u_{tt}^h v + \sum_{i,j,s,l=1}^k a_{ij}^{sl}(z, t) u_{x_i x_j}^h v_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z, t) u_{x_i}^h v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^k b_{ij}(z, t) u_{t x_i}^h v_{x_j} + \right. \\ \left. + \sum_{i,j=1}^m c_{ij}(z, t) u_{y_i}^h v_{y_j} + a_0(z, t) u^h v + b(z, u_t^h) v - \sum_{i,j=1}^k f_{ij}^h(z, t) v_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^k f_i^h(z, t) v_{x_i} - \right. \\ \left. - f_0^h(z, t) v - \sum_{i=1}^m g_i^h(z, t) v_{y_i} \right] dz dt = 0 \quad (24) \end{aligned}$$

для довільної $v \in L^2((0, \tau_0); V_0^{2,1}(\Omega^{R_h})) \cap L^p((0, \tau_0); L^p(\Omega^{R_h}))$, $\text{supp } v \subset Q_{\tau_0}^{R_h}$ і виконується (17), то перейшовши в (24) до границі при $h \rightarrow \infty$, одержимо рівність з означення узагальненого розв'язку задачі (1)-(3) в необмеженій області. Отже, теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C) і $u_0 \in V_{0,loc}^{2,1}(\bar{\Omega})$, $u_1 \in L_{loc}^2(\bar{\Omega})$, f_{ij} , f_{ijt} , f_i , f_0 , g_l , $g_{lt} \in L_{loc}^2(\bar{\Omega})$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $l \in \{1, \dots, m\}$. Тоді в класі функцій, які задовольняють оцінку*

$$\int_{Q_T^R} \left[|u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}|^2 \right] e^{-\mu t} dz dt \leq a e^{bR^2} \quad (25)$$

для довільного $R > 1$, де a, b – додатні сталі, задача (1)-(3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Доведення. Припустимо, що існує два узагальнені розв'язки u^1 і u^2 задачі (1)-(3), які задовольняють (25). Позначимо $u^{1,2} = u^1 - u^2$. Тоді аналогічно як при доведенні теореми 2 для довільного $\tau \in [0, T]$ впливає оцінка

$$\int_{Q_\tau^{R_0}} \left[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{1,2}|^2 \right] dz dt \leq e^{-q+\mu_0\tau} \times \tag{26}$$

$$\times \int_{Q_\tau^{R_1}} \left[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{1,2}|^2 \right] dz dt. \tag{27}$$

Зазначимо, що $q, R_0, R_1, \mu_0, \lambda$ такі самі як у теоремі 2. Тому з (27) маємо

$$\int_{Q_\tau^{R_0}} \left[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{1,2}|^2 \right] dz dt \leq M_8 e^{-2^{2h+8}(1-\{b\})-2^{2h}b_1\tau_0}. \tag{28}$$

Вибравши $\tau_0 < \frac{2^8(1-\{b\})}{b_1}$, з (28) одержимо

$$\int_{Q_{\tau_0}^{R_0}} \left[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{1,2}|^2 \right] dz dt \leq M_8 e^{-\beta_0 2^{2h}}, \text{ де } \beta_0 > 0.$$

Нехай R_0 – довільне фіксоване додатне число, ε – як завгодно мале число. Тоді існує таке $h_3 \in \mathbb{N}$, що для всіх $h > h_3$

$$\int_{Q_{\tau_0}^{R_0}} \left[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^k |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^m |u_{y_i}^{1,2}|^2 \right] dz dt \leq \varepsilon.$$

Звідси $u^1(z, t) = u^2(z, t)$ майже всюди в $Q_{\tau_0}^{R_0}$. Враховуючи довільність R_0 , маємо єдиність розв'язку в області Q_{τ_0} . Тоді, проводячи аналогічні міркування для скінченного числа множин вигляду $\Omega \cap (\tau_0, 2\tau_0), \dots, \Omega \cap (p\tau_0, T)$, де $p\tau_0 < T \leq (p+1)\tau_0, p \in \mathbb{N}$, доводимо єдиність узагальненого розв'язку в області Q_T .

1. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 133. – №1. – С. 40-43.
2. *Матійчук М. І.* Фундаментальні матриці розв'язків загальних $\vec{2b}$ -параболічних і $\vec{2b}$ -еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера // Доп. НА УРСР. – 1964. – №8. – С. 1010-1013.
3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М., 1964.

4. Матійчук М. И., Эйдельман С. Д. О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини // Труды семинара по функциональному анализу. – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 54-83.
5. Івасишен С. Д., Эйдельман С. Д. $\vec{2b}$ -параболические системы // Труды семинара по функциональному анализу. – Киев, 1968. – Вып. 1. – С. 3-175, 271-173.
6. Мартыненко М. Д., Войко Д. Ф. $\vec{2b}$ -параболические граничные задачи // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14. – №12. – С. 2212-2222.
7. Івасишен С. Д. Интегральное представление и начальные значения решений $\vec{2b}$ -параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – №4. – С. 500-506.
8. Березан Л. П., Івасишен С. Д. Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\vec{2b}$ -параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1998. – №12. – С. 7-12.
9. Березан Л. П., Івасишен С. Д. Про сильно виродженні на початковій гіперплощині $\vec{2b}$ -параболічні системи // Вісник держ. ун-ту “Львівська політехніка”. Прикладна математика. – 1998. – №337. – С. 73-76.
10. Матійчук М. І. Параболічні сингулярні крайові задачі. – К., 1999.
11. Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\vec{2b}$ -параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – №6. – С. 18-22.
12. Пасічник Г. С. Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\vec{2b}$ -параболічних систем // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 140-151.
13. Пасічник Г. С. Про розв'язність задачі Коші для $\vec{2b}$ -параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, №3. – С. 61-65.
14. Березан Л. П. Інтегральне зображення розв'язків задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\vec{2b}$ -параболічної системи // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 46. Математика. – Чернівці – 1999. – С. 13-18.
15. Березан Л. П. Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\vec{2b}$ -параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці – 2000. – С.5-10.
16. Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. Про задачу Коші для $\vec{2b}$ -параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №11. – С. 1484-1496.
17. Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболических систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженням на початковій площині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці. – 2000. – С. 82-91.
18. Івасишен С. Д., Кондур О. С. Про матрицю Гріна задачі Коші та характеристизацію деяких класів розв'язків для $\vec{2b}$ -параболічних систем довільного порядку // Мат. студії. – 2000. – Т. 14, №1. – С. 73-84.
19. Балабушенко Т. М. Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\vec{2b}$ -параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування // Вісник нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – N 411. Прикладна математика. – 2000. – С. 6-11.
20. Балабушенко Т. М. Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\vec{2b}$ -параболічних систем // Мат. студії. – 2002. – Т. 17, №2. – С. 163-174.
21. Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д. Про властивості розв'язків $\vec{2b}$ -параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002.

- Т. 45, №4. – С. 19-26.
22. *R. Abeyaratne and J. K. Knowles.* Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids, // *Arch. Rational Mech. Anal.* **114** (1991), 119-154.
 23. *R. Abeyaratne and J. K. Knowles.* Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids // *SIAM J. Appl. Math.* **51** (1991), 1205-1221.
 24. *M. Slemrod.* Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid // *Arch. Rational Mech. Anal.* **81** (1983), 37-85.
 25. *Трускиновский Л. М.* Равновесные межфазные границы // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 265, №2. – С. 306-310.
 26. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.
 27. *Ж.-Л. Лионс.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
 28. *Bernis F.* Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations // *Huston J. Mathem.* – 1988. – Vol. 14, №3. – P. 319-352.
 29. *Гаевський Х., Грегер К., Захаріас К.* Нелинейные операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
 30. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н.* Уравнения линейные и квазилинейные параболического типа. – М., 1967.

MIXED PROBLEM FOR EIDELMAN TYPE EVOLUTION EQUATION IN THE UNBOUNDED REGION

Halyna TORHAN

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1*

The conditions of existence and singularity of the generalized solution in the class of the Tykhonov type mixed many-dimensional problem for the equation

$$\begin{aligned}
 u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^k (a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^k (a_{ij}(z,t)u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^k (b_{ij}(z,t)u_{tx_i})_{x_j} - \\
 - \sum_{i,j=1}^m (c_{ij}(z,t)u_{y_i})_{y_j} + a_0(z,t)u + b(z, u_t) = \sum_{i,j=1}^k (f_{ij}(z,t))_{x_i x_j} - \\
 - \sum_{i=1}^k (f_i(z,t))_{x_i} + f_0(z,t) - \sum_{i=1}^m (g_i(z,t))_{y_i}
 \end{aligned}$$

in the unbounded region have been obtained.

Key words: evolution equation, problem in the unbounded region.

Стаття надійшла до редколегії 01.02.2007

Прийнята до друку 24.10.2007