ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.268-280 Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.268-280

УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМОГО КОЕФІЦІЄНТА ПРИ ПОХІДНІЙ ЗА ЧАСОМ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯ

Уляна ФЕДУСЬ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

З'ясовано умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для одновимірного параболічного рівняння загального вигляду з невідомим коефіцієнтом при похідній за часом у випадку крайових умов другого роду та нелокальної умови перевизначення.

Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння, нелокальна умова перевизначення.

1. Формулювання результатів. Дослідження обернених задач зумовлене необхідністю розв'язання певних проблем у геофізиці, медицині, астрономії, біології, сейсмології тощо. Типовим прикладом оберненої задачі є задача визначення невідомих коефіцієнтів параболічного рівняння – в цьому випадку говорять про коефіцієнтну обернену задачу. Для одновимірних параболічних рівнянь поширенішою є задача визначення невідомого коефіцієнта при другій похідній за просторовою змінною. Випадок такого розміщення невідомого коефіцієнта у параболічному рівнянні загального вигляду з нелокальною додатковою умовою досліджено в [1], для однорідного рівняння теплопровідності з локальною умовою перевизначення – в [2]. Серед задач з невідомим коефіцієнтом, розміщеним при похідній за часом, виділимо працю Прилєпка О.І. та Костіна А.Б. [3], в якій було розглянуто питання ідентифікації коефіцієнта $\rho(x)$ у рівнянні

$$\rho(x)u_t - Lu = g, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in (0,T),$$

де L – рівномірно еліптичний оператор. Визначення двох невідомих коефіцієнтів в однорідному рівнянні теплопровідності досліджував Іванчов М.І. [4]. Єдиність розв'язку задачі для нелінійного рівняння

$$c(u)u_t = (k(u)u_x)_x, \quad 0<x<1, \quad t\in[0,T],$$

з невідомими коефіцієнтами $c(u)$ та $k(u)$ довів Музильов М.В. [5].

Мета нашої праці – дослідити можливість однозначного визначення невідомого коефіцієнта $c(t)$ у рівнянні

$$c(t)u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + d(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

з нелокальною умовою перевизначення. Доведення існування розв'язку полягає у зведенні цієї задачі до системи операторних рівнянь стосовно невідомих функцій і застосуванні до неї теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Доведення єдиності розв'язку задачі ґрунтується на використанні властивостей інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

В області $Q_T = (0,h)\times(0,T)$ розглядаємо рівняння (1) з невідомим коефіцієнтом $c(t) > 0$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовою перевизначення вигляду

$$\nu_1(t)u(0,t) + \nu_2(t)u(h,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Теорема 1. *При виконанні умов*

(A1) $\varphi\in C^2([0,h])$, $\mu_i\in C^1([0,T])$, $i=\overline{1,3}$, $\nu_i\in C^1([0,T])$, $i=1,2$, a, b, d, $f\in C^{1,0}(\overline{Q_T})$,

(A2) $\varphi''(x)>0$, $\varphi(x)\geqslant 0$, $x\in[0,h]$, $\mu_1(t)\leqslant 0$, $\mu_2(t)\geqslant 0$, $t\in[0,T]$, $f(x,t)\geqslant 0$,
$a(x,t)>0$, $(x,t)\in\overline{Q}_T$, $\nu_1(t)+\nu_2(t)>0$, $\nu_1(t)\geqslant 0$, $\nu_2(t)\geqslant 0$, $\nu_1'(t)\leqslant 0$, $\nu_2'(t)\leqslant 0$,
$d(0,t)\mu_3(t)+\nu_1(t)b(0,t)\mu_1(t)+\nu_2(t)b(h,t)\mu_2(t)+\nu_1(t)f(0,t)+\nu_2(t)f(h,t)>0$,
$d(h,t)-d(0,t)\geqslant 0$, $\mu_3'(t)>0$, $t\in[0,T]$,

(A3) $\varphi'(0)=\mu_1(0)$, $\varphi'(h)=\mu_2(0)$, $\nu_1(0)\varphi(0)+\nu_2(0)\varphi(h)=\mu_3(0)$,

можна зазначити таке число t_0, $0<t_0\leqslant T$, *що розв'язок* $(c,u)\in C([0,t_0])\times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$ *задачі (1)-(4) існує.*

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A2), (A3) і*

(A4) $\varphi\in H^{2+\gamma}([0,h])$, $\mu_i\in H^{1+\gamma/2}([0,T])$, $i=\overline{1,3}$, $\nu_i\in H^{1+\gamma/2}([0,T])$, $i=1,2$,
a, b, d, $f\in H^{1,\gamma/2}(\overline{Q}_T)$,

Тоді розв'язок (c,u) *задачі (1)-(4) належить класу* $H^{\gamma/2}([0,t_0])\times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$.

Теорема 3. *Якщо*

a, b, $d\in H^{\gamma,0}(\overline{Q}_T)$,
$\varphi(x)\geqslant 0, x\in[0,h]$, $\mu_3'(t)>0$, $\nu_1'(t)\leqslant 0$, $\nu_2'(t)\leqslant 0$, $\mu_1(t)\leqslant 0$, $\mu_2(t)\geqslant 0, t\in[0,T]$,
$f(x,t)\geqslant 0, (x,t)\in\overline{Q}_T$,

то розв'язок $(c,u)\in H^{\gamma/2}([0,T])\times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T)$ *задачі (1)-(4) єдиний.*

2. Доведення теореми 1.
Зафіксуємо довільну точку $y \in [0,h]$ і подамо рівняння (1) у такому вигляді

$$c(t)u_t = a(y,t)u_{xx} + (a(x,t) - a(y,t))u_{xx} + b(x,t)u_x + d(x,t)u + f(x,t). \tag{5}$$

При відомій функції $c(t)$ знаходження розв'язку задачі (5), (2), (3) зводиться до інтегро-диференціального рівняння

$$u(x,t) = \int_0^h \varphi(\xi)G_2(x,t,\xi,0;y)\,d\xi - \int_0^t \frac{a(y,\tau)\mu_1(\tau)}{c(\tau)}\,G_2(x,t,0,\tau;y)\,d\tau + \int_0^t \frac{a(y,\tau)\mu_2(\tau)}{c(\tau)} \times$$
$$\times\, G_2(x,t,h,\tau;y)d\tau + \int_0^t\int_0^h \frac{f(\xi,\tau)}{c(\tau)}\,G_2(x,t,\xi,\tau;y)d\xi\,d\tau + \int_0^t\int_0^h \frac{G_2(x,t,\xi,\tau;y)}{c(\tau)}\big((a(\xi,\tau) -$$
$$- a(y,\tau))u_{\xi\xi} + b(\xi,\tau)u_\xi + d(\xi,\tau)u\big)d\xi\,d\tau, \tag{6}$$

де

$$G_2(x,t,\xi,\tau;y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}\Big) +\right.$$
$$\left. + \exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}\Big)\right), \quad \theta(t,y) = \int_0^t \frac{a(y,\tau)}{c(\tau)}\,d\tau.$$

Введемо позначення $v(x,t) = u_x(x,t)$, $w(x,t) = u_{xx}(x,t)$. Диференціюючи (6) двічі по x з врахуванням рівності

$$G_{2xx}(x,t,\xi,\tau;y) = -\frac{c(\tau)}{a(y,\tau)}\,G_{2\tau}(x,t,\xi,\tau;y),$$

інтегруючи частинами, врахувавши умови (A3) і прийнявши $y = x$, отримаємо

$$w(x,t) = \int_0^h \varphi''(\xi)G_2(x,t,\xi,0;x)\,d\xi - \int_0^t \mu_1'(\tau)G_2(x,t,0,\tau;x)\,d\tau + \int_0^t \mu_2'(\tau)G_2(x,t,h,\tau;x)d\tau +$$
$$+ \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a(\xi,\tau) - a(x,\tau)\big)w(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \Big(f_\xi(\xi,\tau) + d_\xi(\xi,\tau)u +$$
$$+ (d(\xi,\tau) + b_\xi(\xi,\tau))v + b(\xi,\tau)w\Big)G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi \equiv \sum_{k=1}^5 I_k(x,t). \tag{7}$$

Знайдемо рівняння стосовно невідомої функції $c(t)$. Для цього продиференціюємо умову перевизначення по t і використаємо рівняння (1) для знаходження $u_t(0,t)$,

$u_t(h,t)$. Отримаємо

$$\nu_1'(t)u(0,t)+\nu_2'(t)u(h,t)+\frac{\nu_1(t)}{c(t)}\left(a(0,t)w(0,t)+b(0,t)\mu_1(t)+d(0,t)u(0,t)+f(0,t)\right)+$$
$$+\frac{\nu_2(t)}{c(t)}\left(a(h,t)w(h,t)+b(h,t)\mu_2(t)+d(h,t)u(h,t)+f(h,t)\right)=\mu_3'(t).$$

Звідси приходимо до такого рівняння стосовно $c(t)$

$$c(t)=\big(\nu_1(t)a(0,t)w(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)w(h,t)+\nu_1(t)d(0,t)u(0,t)+\nu_2(t)d(h,t)u(h,t)+$$
$$+\nu_1(t)b(0,t)\mu_1(t)+\nu_2(t)b(h,t)\mu_2(t)+\nu_1(t)f(0,t)+\nu_2(t)f(h,t)\big)\big(\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u(0,t)-$$
$$-\nu_2'(t)u(h,t)\big)^{-1}$$

або, використовуючи умову перевизначення (4),

$$c(t)=\big(\nu_1(t)a(0,t)w(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)w(h,t)+\nu_2(t)u(h,t)(d(h,t)-d(0,t))+d(0,t)\mu_3(t)+$$
$$+\nu_1(t)b(0,t)\mu_1(t)+\nu_2(t)b(h,t)\mu_2(t)+\nu_1(t)f(0,t)+\nu_2(t)f(h,t)\big)\big(\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u(0,t)-$$
$$-\nu_2'(t)u(h,t)\big)^{-1}. \tag{8}$$

З очевидних рівностей

$$u(x,t)=u(0,t)+\int_0^x v(x,t)dx,\ u(x,t)=u(h,t)-\int_x^h v(x,t)dx$$

маємо

$$u(x,t)=\frac{1}{\nu_1(t)+\nu_2(t)}\Big(\mu_3(t)+\nu_1(t)\int_0^x v(x,t)dx-\nu_2(t)\int_x^h v(x,t)dx\Big), \tag{9}$$

оскільки

$$v(x,t)=v(0,t)+\int_0^x w(x,t)dx=\mu_1(t)+\int_0^x w(x,t)dx, \tag{10}$$

то задача (1)-(4) зводиться до системи інтегральних рівнянь (7), (8) щодо невідомих c та w.

Доведення існування розв'язку задачі (1)-(4) ґрунтується на використанні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, тому треба визначити апріорні оцінки розв'язків системи (7), (8).

Визначимо спочатку оцінку $c(t)$ знизу. З умов (A2) маємо

$$\nu_1(t)a(0,t)I_1(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)I_1(h,t)\geqslant$$
$$\geqslant(\nu_1(t)a(0,t)+\nu_2(t)a(h,t))\min_{[0,h]}\varphi''(x)\geqslant C_1>0. \tag{11}$$

Оскільки у виразі $\nu_1(t)a(0,t)w(0,t) + \nu_2(t)a(h,t)w(h,t)$ всі доданки, крім доданка $\nu_1(t)a(0,t)I_1(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)I_1(h,t)$, прямують до нуля при $t \to 0$, то існує такий проміжок $[0,T_0]$, $0 < T_0 \leqslant T$, на якому буде виконуватись нерівність

$$\nu_1(t)a(0,t)I_1(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)I_1(h,t) \geqslant -\sum_{k=2}^{5}(\nu_1(t)a(0,t)I_k(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)I_k(h,t)), \tag{12}$$

звідки $\nu_1(t)a(0,t)w(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)w(h,t) \geqslant 0$. Згідно з припущеннями (A2) маємо $u(x,t) \geqslant 0$. З рівності (9) приходимо до оцінки

$$|u(x,t)| \leqslant C_2+C_3V(t), \tag{13}$$

де $V(t)=\max\limits_{x\in[0,h]}|v(x,t)|$. Тоді

$$c(t) \geqslant \frac{C_4}{C_5+C_6V(t)} > 0. \tag{14}$$

Запишемо задачу стосовно функції $v(x,t)$. Продиференціювавши (1) і (2) по x, в області Q_T отримаємо рівняння

$$c(t)v_t = a(x,t)v_{xx}+(a_x(x,t)+b(x,t))v_x+(b_x(x,t)+d(x,t))v+d_x(x,t)u+f_x(x,t) \tag{15}$$

з умовами

$$v(x,0)=\varphi'(x),\ x\in[0,h], \quad v(0,t)=\mu_1(t),\ v(h,t)=\mu_2(t),\ t\in[0,T]. \tag{16}$$

Розв'язок цієї задачі подамо у вигляді

$$v(x,t)=v_0(x,t)+\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\big((b_\xi(\xi,\tau)+d(\xi,\tau))v(\xi,\tau)+d_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\big)\widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)d\xi. \tag{17}$$

Тут $\widetilde{G}_1$ – функція Гріна для рівняння

$$c(t)v_t = a(x,t)v_{xx}+(a_x(x,t)+b(x,t))v_x \tag{18}$$

з однорідними умовами першого роду, а v_0 задовольняє рівняння

$$c(t)v_{0t} = a(x,t)v_{0xx}+(a_x(x,t)+b(x,t))v_{0x}+(b_x(x,t)+d(x,t))v_0+f_x(x,t)$$

й умови (16). Згідно з принципом максимуму [8, с. 20] маємо $|v_0(x,t)| \leqslant C_7 < \infty$.

Розв'язком задачі для рівняння (18) з умовами

$$v(x,0)=1, \quad v(0,t)=1, \quad v_0(h,t)=1$$

буде

$$1=\int_0^h\widetilde{G}_1(x,t,\xi,0)\,d\xi+\int_0^t\frac{a(0,\tau)}{c(\tau)}\,\widetilde{G}_{1\xi}(x,t,0,\tau)\,d\tau-\int_0^t\frac{a(h,\tau)}{c(\tau)}\widetilde{G}_{1\xi}(x,t,h,\tau)d\tau.$$

Згідно з властивостями функції $\widetilde{G}_1$ кожен член у правій частині цієї рівності є невід'ємною функцією, тому виконується оцінка $\int\limits_0^h \widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)d\xi \leqslant 1$. Тоді, продовжуючи з (17), отримаємо

$$V(t) \leqslant C_7 + C_8 \int\limits_0^t \frac{V(\tau)}{c(\tau)}\, d\tau.$$

За нерівністю Гронуолла-Белмана [10, с. 188],

$$V(t) \leqslant C_7 \exp C_8 \theta_0(t), \tag{19}$$

де $\theta_0(t) = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}$. Враховуючи (14), приходимо до нерівності

$$c(t) \geqslant \frac{C_4}{C_5 + C_9 \exp C_8 \theta_0(t)}, \quad t \in [0, T_0]. \tag{20}$$

Подамо (20) у вигляді

$$\frac{1}{c(t)(C_5 + C_9 \exp C_8 \theta_0(t))} \leqslant C_{10}.$$

Скористаємося методом доведення нерівності Біхарі [10]. Приймемо в цій нерівності $t = \tau$ і проінтегруємо від 0 до t. Отримаємо

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)(C_5 + C_9 \exp C_8 \theta_0(\tau))} \leqslant C_{10} t.$$

Зробивши заміну $\theta_0(\tau) = \sigma$, прийдемо до нерівності

$$\int\limits_0^{\theta_0(t)} \frac{d\sigma}{C_5 + C_9 \exp C_8 \sigma} \leqslant C_{10} t. \tag{21}$$

Якщо розглянути функцію

$$r(s) = \int\limits_0^s \frac{d\sigma}{C_5 + C_9 \exp C_8 \sigma} = \frac{1}{C_5 C_8} \ln \frac{(C_5 + C_9) \exp C_8 s}{C_5 + C_9 \exp C_8 s} = \frac{1}{C_5 C_8} \ln \frac{C_5 + C_9}{C_5 \exp(-C_8 s) + C_9},$$

то (21) можна подати у вигляді

$$r(\theta_0(t)) \leqslant C_{10} t. \tag{22}$$

Позначимо $R_0 = \sup\limits_{[0,\infty)} r(s)$. Очевидно, що $r(s)-$монотонно зростаюча неперервна на $[0,\infty)$, тому існує обернена монотонно зростаюча неперервна функція $r^{-1}(\sigma)$, визначена на проміжку $[0,R_0)$. Тоді з (22) маємо

$$\theta_0(t) \leqslant r^{-1}(C_{10}t) \leqslant C_{11}, \quad t\in[0,T_1],$$

де число T_1, $0<T_1\leqslant T$, задовольняє нерівність

$$C_{10}T_1 < R_0.$$

Використовуючи оцінку $\theta_0(t)$ в (20), (19), визначаємо

$$c(t)\geqslant A_0>0, \quad V(t)\leqslant C_{12}, \quad t\in[0,T_1]. \tag{23}$$

Звідси

$$|u(x,t)|\leqslant C_{13}, \quad (x,t)\in Q_{T_1}. \tag{24}$$

Знайдемо оцінку $c(t)$ зверху. Введемо позначення $W(t)=\max\limits_{x\in[0,h]}|w(x,t)|$. Оскільки за умовами (A2)

$$\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u(0,t)-\nu_2'(t)u(h,t)\geqslant\min_{[0,T]}\mu_3'(t),$$

то з (8) отримаємо

$$c(t)\leqslant C_{14}+C_{15}W(t), \quad t\in[0,T]. \tag{25}$$

Оцінимо $W(t)$. З відомих співвідношень [9, с. 12]

$$\int_0^h G_2(x,t,\xi,0;x)\,d\xi=1, \quad G_2(x,t,\xi,\tau;x)\leqslant C_{16}+\frac{C_{17}}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}} \tag{26}$$

маємо

$$\left|\sum_{k=1}^{3} I_k(x,t)\right|\leqslant C_{18}+C_{19}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}.$$

Оскільки

$$\int_0^t\frac{a(x,\tau)d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}=2\sqrt{\theta(t,x)},$$

то, враховуючи (25) і оцінку $\theta_0(t)$ зверху, одержимо

$$\left|\sum_{k=1}^{3} I_k(x,t)\right|\leqslant C_{18}+C_{20}\sqrt{\theta(t,x)}+C_{21}\int_0^t\frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau\leqslant C_{22}+$$

$$+C_{21}\int_0^t\frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau.$$

Використаємо нерівність

$$z^p \exp(-qz^2) \leqslant C_{p,q} < \infty, \quad \forall z \in [0,\infty), \quad p \geqslant 0, \quad q > 0, \tag{27}$$

для оцінки $|G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)|$:

$$|G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{\pi(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(|x-\xi+2nh|\times$$
$$\times\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\Big)+|x+\xi+2nh|\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\Big)\Bigg) \leqslant \frac{C_{23}}{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\Big)+\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{8(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\Big)\Bigg).$$

Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^h\Bigg(\exp\Big(\frac{-(x-\xi+2nh)^2}{8(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\Big)+\exp\Big(\frac{-(x+\xi+2nh)^2}{8(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\Big)\Bigg)d\xi \leqslant C_{24},$$

то

$$\left|-\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h f_\xi(\xi,\tau)G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi\right| \leqslant C_{25}\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}} \leqslant C_{26}.$$

Тоді, враховуючи (24), (23) та визначену оцінку $|G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)|$, отримаємо

$$|I_5(x,t)| \leqslant C_{27}\sqrt{\theta(t,x)}+C_{28}\int_0^t\frac{W(\tau)d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}} \leqslant C_{29}+C_{28}\int_0^t\frac{W(\tau)d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}.$$

Для оцінки інтеграла $I_4(x,t)$ обчислимо $G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)$

$$G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\right)+$$
$$+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\right)\Bigg)+\frac{1}{8\sqrt{\pi(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))^5}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg((x-\xi+2nh)^2\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\right)+(x+\xi+2nh)^2\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\right)\Bigg). \tag{28}$$

Оскільки $|x-\xi| \leqslant |x-\xi+2nh|$ і $|x-\xi| \leqslant |x+\xi+2nh|$ при $n \geqslant 1$, то, використовуючи нерівність (27), одержуємо

$$\left|\int_0^h (a(\xi,\tau)-a(x,\tau))w(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi\right| \leqslant \frac{C_{30}W(\tau)}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}.$$

Звідси

$$|I_4(x,t)| \leqslant C_{30} \int\limits_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\, d\tau.$$

Отже, враховуючи всі визначені оцінки, отримаємо

$$|w(x,t)| \leqslant C_{31} + C_{32} \int\limits_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\, d\tau,$$

звідки приходимо до нерівності

$$W(t) \leqslant C_{31} + C_{33} \int\limits_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\, d\tau.$$

Використавши лему 2.2.1 [9, с.22] та оцінку $\theta_0(t)$ зверху, одержуємо

$$W(t) \leqslant C_{31} \exp(C_{33}\theta_0(t)) \leqslant C_{34}, \quad t \in [0, T_1]. \tag{29}$$

Звідси

$$c(t) \leqslant A_1 < \infty, \quad t \in [0, T_1]. \tag{30}$$

При відомих оцінках $c(t)$ і $w(x,t)$ справджується нерівність

$$\left| -\sum_{k=2}^{5} (\nu_1(t)a(0,t)I_k(0,t) + \nu_2(t)a(h,t)I_k(h,t)) \right| \leqslant C_{35}\sqrt{t} + C_{36}t,$$

тоді з (11) і (12) маємо таке обмеження на T_0

$$C_{35}\sqrt{T_0} + C_{36}T_0 \leqslant C_1.$$

Виберемо $t_0 = \min\{T_0, T_1\}$. Тоді оцінки (23), (29), (30) виконуються на проміжку $[0, t_0]$. У визначених оцінках $C_i (i = \overline{1,36}), A_0, A_1$ – відомі величини.

Розглянемо систему рівнянь (8), (7) як операторне рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (c, w)$, $P = (P_1, P_2)$, а оператори P_1, P_2 визначаються рівняннями (8), (7), відповідно. Нехай $N = \{(c,w) \in C[0,t_0] \times C(\overline{Q}_{t_0}) \,:\, 0 < A_0 \leqslant c(t) \leqslant A_1,\ |w(x,t)| \leqslant C_{34}\}$. Внаслідок апріорних оцінок (23), (29), (30) оператор P переводить множину N в себе. Компактність оператора вигляду P доведено в [9, с. 27]. Застосовуючи теорему Шаудера до оператора P, отримуємо існування неперервного розв'язку системи рівнянь (8), (7), а отже, й існування розв'язку задачі (1)-(4).

3. Доведення теореми 2. В умовах теореми 1 маємо існування розв'язку $(c,u)\in C([0,t_0])\times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$ задачі (1)-(4). Доведемо, що при зроблених припущеннях (c,u) належатиме до класу $H^{\gamma/2}([0,t_0])\times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$.

При відомих u і v рівняння (7) можна розглядати як інтегральне стосовно функції w з ядром

$$K(x,t,\xi,\tau)=\frac{a(\xi,\tau)-a(x,\tau)}{c(\tau)}G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)-\frac{b(\xi,\tau)}{c(\tau)}\,G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)=$$
$$=K_1(x,t,\xi,\tau)+K_2(x,t,\xi,\tau)$$

і вільним членом

$$\widetilde{f}(x,t)=\sum_{k=1}^{3}I_k(x,t)-\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\Big(f_\xi(\xi,\tau)+d_\xi(\xi,\tau)u+(d(\xi,\tau)+b_\xi(\xi,\tau))v\Big)G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi,$$

де I_k – раніше введені позначення. Тоді (7) перепишемо у вигляді

$$w(x,t)=\widetilde{f}(x,t)+\int_0^t\int_0^h K(x,t,\xi,\tau)w(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Розв'язок цього інтегрального рівняння шукаємо методом послідовних наближень

$$w_0(x,t)=\widetilde{f}(x,t),\; w_k(x,t)=\widetilde{f}(x,t)+\sum_{i=1}^{k}\int_0^t\int_0^h K_i(x,t,\xi,\tau)\widetilde{f}(\xi,\tau)d\xi d\tau,\; k=1,2,...$$

$$K_1(x,t,\xi,\tau)=K(x,t,\xi,\tau),K_{i+1}(x,t,\xi,\tau)=\int_\tau^t\int_0^h K(x,t,\eta,\sigma)K_i(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta\, d\sigma,i=1,2,..$$

Згідно з оцінками теплових потенціалів [8, с. 318] маємо, що $\widetilde{f}\in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$. Можна стверджувати, що для ядра K виконується лема.

Лема 1. *Для $x,\xi\in[0,h]$, $\tau,t\in[0,T]$ та $\forall\beta$, $0<\beta<\gamma$, правильна нерівність*

$$|K_1(x,t,\xi,\tau)-K_1(y,t,\xi,\tau)|\leqslant\frac{C_1|x-y|^\beta}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{(3-\alpha)/2}}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{\widetilde{\lambda}(x-\xi+2nh)^2}{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}\right)+\exp\left(-\frac{\widetilde{\lambda}(y-\xi+2nh)^2}{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}\right)\right),$$

де $\widetilde{\lambda}$ – довільна додатна стала, а $\alpha=\gamma-\beta$.

Доведення цієї леми проводиться аналогічно до доведення теореми 7 [11, с. 29-31].

Оцінимо, враховуючи визначену оцінку $G_{2\xi}$ та оцінки $\theta(t)$, наступну різницю

$$\Delta=|K_2(x,t,\xi,\tau)-K_2(y,t,\xi,\tau)|\leqslant\frac{C_2}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\Big)+$$
$$+\exp\Big(-\frac{(y-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\Big).$$

Отже,

$$\Delta \leqslant \frac{C_3|x-y|^\gamma}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1+\gamma/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\Big(\frac{-(x-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))} \Big) + \exp\Big(\frac{-(y-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))} \Big) \right).$$

Тоді, враховуючи лему, маємо

$$|K(x,t,\xi,\tau)-K(y,t,\xi,\tau)| \leqslant \frac{C_4|x-y|^\gamma}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{\gamma/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))} \Big) + \right.$$
$$\left. + \exp\Big(-\frac{(y-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))} \Big) \right),$$

звідки

$$|w_1(x,t)-w_1(y,t)| \leqslant C_5|x-y|^\gamma \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{\frac{\gamma-1}{2}}} = C_6|x-y|^\gamma \theta_0(t)^{\frac{3-\gamma}{2}} \leqslant C_7|x-y|^\gamma,$$

тобто $w_1 \in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$. Аналогічно доводиться, що $w_k \in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0}), k = 2,3,..$ Оскільки інтегральні оператори типу Вольтерра не мають власних значень, то послідовність w_k рівномірно збігається до w. Звідси маємо, що $w \in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$ як границя послідовності функцій з класу Гельдера. Тоді з (8) матимемо $c \in H^{\gamma/2}([0,t_0])$, а з (10), (9) – $u \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$. Тут $C_i, i = \overline{1,7}$, – довільні додатні сталі. Теорему доведено.

4. Доведення теореми 3. Припустимо, що існують два розв'язки (c_1,u_1) і (c_2,u_2) задачі (1)-(4) з класу $H^{\gamma/2}([0,T]) \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T)$. Нехай $c(t)=c_1(t)-c_2(t)$, $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Утворимо задачу для (c,u):

$$c_1(t)u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + d(x,t)u - c(t)u_{2t}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{31}$$
$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{32}$$
$$u_x(0,t) = u_x(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{33}$$
$$\nu_1(t)u(0,t)+\nu_2(t)u(h,t)=0, \quad t \in [0,T]. \tag{34}$$

За допомогою функції Гріна $\widetilde{G}_2$ запишемо розв'язок задачі (31) – (33)

$$u(x,t) = -\int_0^t\int_0^h \widetilde{G}_2(x,t,\xi,\tau)\,\frac{c(\tau)u_{2\tau}(\xi,\tau)}{c_1(\tau)}\,d\xi d\tau. \tag{35}$$

Продиференціювавши умову (34) по t і використавши рівняння (31) для знаходження $u_t(0,t)$, $u_t(h,t)$, отримаємо

$$c(t)(\nu_1(t)u_{2t}(0,t)+\nu_2(t)u_{2t}(h,t))-(c_1(t)\nu_1'(t)+\nu_1(t)d(0,t))\,u(0,t)-(c_1(t)\nu_2'(t)+$$
$$+\nu_2(t)d(h,t))u(h,t)-\nu_1(t)a(0,t)u_{xx}(0,t)-\nu_2(t)a(h,t)u_{xx}(h,t)=0. \tag{36}$$

З того, що $(c_2(t), u_2(t))$– розв'язок задачі (1)-(4), одержуємо

$$\nu_1(t)u_{2t}(0,t)+\nu_2(t)u_{2t}(h,t)=\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u_2(0,t)-\nu_2'(t)u_2(h,t).$$

Тоді (36) можемо переписати у вигляді

$$c(t)(\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u_2(0,t)-\nu_2'(t)u_2(h,t))-(c_1(t)\nu_1'(t)+\nu_1(t)d(0,t))u(0,t)-(c_1(t)\nu_2'(t)+ \\ +\nu_2(t)d(h,t))u(h,t)-\nu_1(t)a(0,t)u_{xx}(0,t)-\nu_2(t)a(h,t)u_{xx}(h,t)=0$$

або

$$c(t)(\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u_2(0,t)-\nu_2'(t)u_2(h,t))+\int_0^t c(\tau)K(t,\tau)d\tau=0, \tag{37}$$

де

$$K(t,\tau)=\frac{1}{c_1(\tau)}\int_0^h\Big(\nu_1(t)a(0,t)\widetilde{G}_{2xx}(0,t,\xi,\tau)+\nu_2(t)a(h,t)\widetilde{G}_{2xx}(h,t,\xi,\tau)+(c_1(t)\nu_1'(t)+ \\ +\nu_1(t)d(0,t))\widetilde{G}_2(0,t,\xi,\tau)+(c_1(t)\nu_2'(t)+\nu_2(t)d(h,t))\widetilde{G}_2(h,t,\xi,\tau)\Big)u_{2\tau}(\xi,\tau)d\xi.$$

З припущень теореми отримаємо, що $\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u_2(0,t)-\nu_2'(t)u_2(h,t)>0$, а це означає, що (37) – однорідне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду. Тоді з того, що $u_2\in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q_T})$ та з властивостей об'ємних теплових потенціалів [8, с. 318] випливає, що ядро $K(t,\tau)$ рівняння (37) має інтегровну особливість

$$|K(t,\tau)|\leqslant\frac{C_1}{(t-\tau)^{1-\gamma/2}}.$$

Тут C_1 – деяка додатна стала. Оскільки рівняння (37) має єдиний розв'язок $c(t)\equiv 0$ на $[0,T]$, то, повертаючись до задачі (31)-(33), отримаємо $u(x,t)\equiv 0$. Тобто, $c_1(t)=c_2(t)$ і $u_1(x,t)=u_2(x,t)$, що і доводить єдиність розв'язку задачі.

1. *Березницька І.Б.* Обернена задача для параболічного рівняння з нелокальною умовою перевизначення // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 1. – С. 54-62.
2. *Jones B.F.* Various methods for finding unknown coefficient in parabolic equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1963. – Vol. 16. – P. 33-34.
3. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34, № 5. – С. 147-162.
4. *Иванчов Н.И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. – 1994. – Т. 35, № 3. – С. 612-621.
5. *Музылев Н.В.* Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1980. – Т. 20, № 2. – С.388-400.
6. *Іванчов М.І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. – К., 1995.

7. *Гуль О., Дороховецъ У., Іванчов М.* Обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при похідній за часом у параболічному рівнянні // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 27-37.
8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.
9. *Ivanchov M.I.* Inverse problems for equations of parabolic type. VNTL Publishers, 2003.
10. *Беккенбах Э. Беллман Р.* Неравенства. – М., 1965.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1967.

ON INVERSE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN COEFFICIENT AT THE DERIVATIVE WITH RESPECT TO TIME VARIABLE

Ulyana FEDUS

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

We establish conditions for existence and uniqueness of solution of the inverse problem for one-dimentional parabolic equation of general type with unknown coefficient at the derivative with respect to time variable and nonlocal overdetermination condition.

Key words: inverse problem, parabolic equation, nonlocal overdetermination condition, Green function.

Стаття надійшла до редколегії 02.04.2007

Прийнята до друку 24.10.2007