ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.14-29

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.14-29

УДК 517.53

ГОЛОМОРФНІ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО λ-ТИПУ В ПІВСМУЗІ

Андрій БРИДУН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1,
e-mail: a_brydun@franko.lviv.ua, a_brydun@yahoo.com

Доведено критерій скінченності λ-типу голоморфних у півсмузі функцій.

Ключові слова: голоморфна функція, мероморфна функція, характеристика Неванлінни, функція скінченного λ-типу.

1. Формулювання основної теореми та допоміжних тверджень. У 60-х роках минулого століття Л. Рубел і Б. Тейлор [1] розробили метод рядів Фур'є, який допоміг отримати вичерпний опис нулів і полюсів мероморфних функцій f з доволі загальних класів Λ, які визначають довільними додатними, неспадними, необмеженими та неперервними мажорантами λ їхніх неванліннівських характеристик. Такі класи вони назвали класами функцій скінченного λ-типу.

К. Г. Малютін визначив критерій належності функції до класу аналітичних у верхній півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ функцій скінченного λ-типу в термінах sin-коефіцієнтів Фур'є функції $\log|f|$. Ці коефіцієнти Фур'є виражають через нулі функції f та її граничні значення на межі $\mathbb{C}_+$ і одержують з класичної формули Карлемана.

Ми визначаємо критерій скінченності λ-типу голоморфних у півсмузі функцій за інших умов на межі.

Нехай функція f мероморфна в замиканні півсмуги $R = \{z = x + iy : x > x_0, 0 < y < \pi\}$, $\{\rho_q\}$ – послідовність нулів функції f в R, занумерованих у порядку зростання їхніх дійсних частин, $\rho_q = \beta_q + i\gamma_q$; $\{\omega_p\}$ – послідовність полюсів функції f в R, занумерованих відповідно, $\omega_p = \xi_p + i\eta_p$. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на ∂R.

Нехай $f(x_0) \neq 0, \infty$, і значення $\log f(x_0)$ вибране. В замиканні R з розрізами $\{t\beta_q + i\gamma_q : t \geq 1\}$ та $\{t\xi_q + i\eta_q : t \geq 1\}$ приймемо

$$\log f(z) = \log f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta,$$

а також $\arg f(z) = \operatorname{Im} \log f(z)$.

Характеристику $S(x; x_0, f)$, яку ми ввели в [2], аналогічно до [3, с. 37–40], будемо називати *характеристикою Неванлінни для півсмуги*

$$S(x; x_0, f) = A(x; x_0, f) + B(x; x_0, f) + C(x; x_0, f),$$

де

$$C(x; x_0, f) = 2 \sum_{\omega_p \in R_x} \sin \eta_p \left(\frac{1}{e^{\xi_p}} - \frac{e^{\xi_p}}{e^{2x}} \right),$$

$$A(x; x_0, f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_0}^{x} \left(\log^+ |f(t)| + \log^+ |f(t + i\pi)| \right) \left(\frac{1}{e^t} - \frac{e^t}{e^{2x}} \right) dt,$$

$$B(x; x_0, f) = \frac{2}{\pi e^x} \int\limits_{0}^{\pi} \log^+ |f(x + iy)| \sin y \, dy,$$

$R_x = \{ z = t + iy : x_0 < t < x, \, 0 < y < \pi \}$.

Означення 1. *Додатна, неперервна, зростаюча і необмежена на $[x_0, +\infty)$ функція $\lambda(x)$ називається функцією зростання.*

Означення 2. *Функція f, мероморфна в замиканні півсмуги R, називається функцією скінченного λ-типу в R, якщо існують сталі $a, b > 0$ такі, що для всіх $x > x_0$ виконується*

1) $\quad S(x; x_0, f) \le a \, \lambda(x + b)$;

2) $\quad \int\limits_{x_0}^{x} \frac{|\log |f(t)|| + |\log |f(t + i\pi)||}{e^t} \, dt \le a \, \lambda(x + b)$.

Клас таких функцій позначимо через $\mathcal{F}_\lambda$.

Нехай $c_k(x, f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log |f(x + iy)| \sin ky \, dy, \quad k \in \mathbb{N}$, sin-*коефіцієнти Фур'є* функції $\log |f(x + iy)|$ як функції від y.

Теорема 1. *Нехай λ – функція зростання і нехай f голоморфна в замиканні півсмуги R функція. Тоді такі твердження еквівалентні:*
а) $f \in \mathcal{F}_\lambda$;
б) виконується умова 2) та існують сталі $a, b > 0$ такі, що для всіх $x > x_0$ та $k \in \mathbb{N}$ виконується $|c_k(x, f)| \le a e^x \lambda(x + b)$.

Для доведення теореми 1 ми використовуватимемо такі леми.

Лема 1. *Якщо $\{ z_j : z_j = x_j + iy_j \}$ – скінченна множина в R_x, тоді*

$$\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{z_j \in R_t} \frac{e^{kx_j}}{e^{kt}} \sin ky_j \, dt = \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \sin ky_j - \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \frac{e^{kx_j}}{e^{kx}} \sin ky_j, \quad j \in \mathbb{N}, \quad x_0 < x, \tag{1}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{z_j \in R_t} \frac{e^{kt}}{e^{kx_j}} \sin ky_j \, dt = \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \frac{e^{kx}}{e^{kx_j}} \sin ky_j - \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \sin ky_j, \quad j \in \mathbb{N}, \quad x_0 < x. \tag{2}$$

Лема 2. *Нехай голоморфна в замиканні півсмуги* $R = \{z = x + iy : x > x_0, 0 < y < \pi\}$, *функція* f *не має ні нулів, ні полюсів на* ∂R *і* $f(x_0) \neq 0, \infty$. *Правильні такі співвідношення:*

$$c_k(x, f) = \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_x} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x} \left(\frac{e^{kt}}{e^{kx}} - \frac{e^{kx}}{e^{kt}} \right) \left(\log|f(t)| + (-1)^{k+1} \log|f(t+i\pi)| \right) dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}} + \frac{e^{kx}}{e^{kx_0}} \right) \int_0^{\pi} \log|f(x_0 + iy)| \sin ky \, dy +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{kx_0}}{e^{x}} - \frac{e^{kx}}{e^{x_0}} \right) \int_0^{\pi} \arg f(x_0 + iy) \cos ky \, dy, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x_0 < x. \tag{3}$$

Лема 3. *Нехай* $\{\rho_q\}$ *– нулі голоморфної функції скінченного* λ*-типу в замиканні* R_{x+1}. *Тоді*

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \sin \gamma_q \leq a e^{x} \lambda(x + b),$$

для деяких $a, b > 0$ *і для всіх* $x > x_0$.

2. Доведення допоміжних тверджень.

Доведення леми 1. Інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{z_j \in R_t} \frac{e^{kx_j}}{e^{kt}} \sin ky_j \, dt = -\frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} \sum_{z_j \in R_t} e^{kx_j} \sin ky_j \, d\left(e^{-kt}\right) =$$
$$= -\frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \frac{e^{kx_j}}{e^{kx}} \sin ky_j + \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} e^{-kt} d\left(\sum_{z_j \in R_t} e^{kx_j} \sin ky_j \right).$$

Функція $\psi(t) = \sum\limits_{z_j \in R_t} e^{kx_j} \sin ky_j$ має стрибки $e^{kx_j} \sin ky_j$ в точках $t_j = e^{x_j}$. Отже, останній інтеграл можна записати у вигляді

$$\frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} t^{-k} \, d\psi(t) = \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} e^{-kx_j} e^{kx_j} \sin ky_j = \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \sin ky_j.$$

Аналогічно, отримаємо співвідношення (2). Лему 1 доведено.

Доведення леми 2. Нехай функція f голоморфна в замиканні R і не має нулів на ∂R_t. Застосуємо теорему про лишки до функції $f'(z)/f(z)\, e^{-kz}$ в R_t

$$\int_{\partial R_t} \frac{f'(z)}{f(z)} e^{-kz} \, dz = 2\pi i \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q}, \quad k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}. \tag{4}$$

Оскільки ∂R_t складається з чотирьох відрізків, тоді (4) запишемо так:

$$2\pi i \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q} = \int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\, d\tau + ie^{-kt} \int_0^{\pi} e^{-iky} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\, dy +$$

$$+(-1)^{k+1} \int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \frac{f'(\tau+i\pi)}{f(\tau+i\pi)}\, d\tau - ie^{-kx_0} \int_0^{\pi} e^{-iky} \frac{f'(x_0+iy)}{f(x_0+iy)}\, dy, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{5}$$

Інтегруючи частинами в першому інтегралі правого боку (5), маємо

$$\int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\, d\tau = e^{-kt} \log f(t) - e^{-kx_0} \log f(x_0) + k \int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

$k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Роблячи те саме в третьому інтегралі, одержуємо

$$\int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \frac{f'(\tau+i\pi)}{f(\tau+i\pi)}\, d\tau = e^{-kt} \log f(t+i\pi) - e^{-kx_0} \log f(x_0+i\pi) +$$

$$+k \int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi)\, d\tau, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{7}$$

Далі

$$i \int_0^{\pi} e^{-iky} \frac{f'(x_0+iy)}{f(x_0+iy)}\, dy = \int_0^{\pi} e^{-iky}\, d\log f(x_0+iy) = (-1)^k \log f(x_0+i\pi) -$$

$$- \log f(x_0) + ik \int_0^{\pi} e^{-iky} \log f(x_0+iy)\, dy, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{8}$$

З урахуванням (6)–(8) співвідношення (5) набуде вигляду

$$2\pi i \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q} = e^{-kt} \log f(t) + k \int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau)\, d\tau +$$

$$+ie^{-kt} \int_0^{\pi} e^{-iky} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\, dy + (-1)^{k+1} e^{-kt} \log f(t+i\pi) +$$

$$+(-1)^{k+1} k \int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi)\, d\tau - ike^{-kx_0} \int_0^{\pi} e^{-iky} \log f(x_0+iy)\, dy, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{9}$$

Рівність (4), а отже і (9), правильні при $t \in (x_0; x)$ за винятком $t = \operatorname{Re}\rho_q$. Домножимо (9) на e^{kt} і проінтегруємо по t від x_0 до x. Одержимо

$$2\pi i \int_{x_0}^{x} e^{kt} \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q}\, dt = \int_{x_0}^{x} \log f(t)\, dt +$$
$$+k \int_{x_0}^{x} e^{kt} \left(\int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau)\, d\tau \right) dt + \int_{x_0}^{x} \left(i \int_{0}^{\pi} e^{-iky} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\, dy \right) dt +$$
$$+(-1)^{k+1} \int_{x_0}^{x} \log f(t+i\pi)\, dt + (-1)^{k+1} k \int_{x_0}^{x} e^{kt} \left(\int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi)\, d\tau \right) dt +$$
$$+\, i \int_{0}^{\pi} e^{-iky} \log f(x_0+iy)\, dy - i e^{k(x-x_0)} \int_{0}^{\pi} e^{-iky} \log f(x_0+iy)\, dy, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \quad (10)$$

Інтегрування частинами в другому інтегралі правого боку (10) дає

$$\int_{x_0}^{x} e^{kt} \left(\int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau)\, d\tau \right) dt = \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau)\, d\tau \right) de^{kt} =$$
$$= \frac{e^{kx}}{k} \int_{x_0}^{x} e^{-kt} \log f(t)\, dt - \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} \log f(t)\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \quad (11)$$

Аналогічно

$$\int_{x_0}^{x} e^{kt} \left(\int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi)\, d\tau \right) dt = \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi)\, d\tau \right) de^{kt} =$$
$$= \frac{e^{kx}}{k} \int_{x_0}^{x} e^{-kt} \log f(t+i\pi)\, dt - \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} \log f(t+i\pi)\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \quad (12)$$

Застосувавши теорему Фубіні до третього доданка правого боку (10), маємо

$$\int_{x_0}^{x} \left(i \int_{0}^{\pi} e^{-iky} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\, dy \right) dt = i \int_{0}^{\pi} e^{-iky} \left(\int_{x_0}^{x} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\, dt \right) dy =$$
$$= i \int_{0}^{\pi} e^{-iky} \left(\log f(x+iy) - \log(x_0+iy) \right) dy, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \quad (13)$$

Враховуючи (11)–(13), співвідношення (10) запишемо у вигляді

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{-iky}\,\log f(x+iy)\,dy = \int\limits_{x_0}^{x} e^{kt}\sum_{\rho_q\in R_t} e^{-k\rho_q}\,dt+$$
$$+\frac{ie^{kx}}{2\pi}\int\limits_{x_0}^{x} e^{-kt}\left(\log f(t)+(-1)^{k+1}\log f(t+i\pi)\right)\,dt+$$
$$+\frac{e^{k(x-x_0)}}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{-iky}\log f(x_0+iy)\,dy,\quad k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{14}$$

Позначимо

$$l_k(x,f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{-iky}\log f(x+iy)\,dy,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Безпосередні підрахунки засвідчують, що

$$c_k(x,f)=-\mathrm{Im}\frac{l_k(x,f)+\overline{l_{-k}(x,f)}}{2},\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{15}$$

Враховуючи (2) та (15), одержимо

$$c_k(x,f)=2\int\limits_{x_0}^{x}\sum_{\rho_q\in R_t}\left(\frac{e^{k\beta_q}}{e^{kt}}+\frac{e^{kt}}{e^{k\beta_q}}\right)\sin k\gamma_q\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{e^{kt}}{e^{kx}}-\frac{e^{kx}}{e^{kt}}\right)\left(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\right)\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}}+\frac{e^{kx}}{e^{kx_0}}\right)\int\limits_0^{\pi}\log|f(x_0+iy)|\sin ky\,dy+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}}-\frac{e^{kx}}{e^{kx_0}}\right)\int\limits_0^{\pi}\arg f(x_0+iy)\cos ky\,dy,\quad k\in\mathbb{N},\quad x_0<x. \tag{16}$$

Застосувавши лему 1 до першого доданка правого боку (2), отримаємо (3). Лему 2 доведено.

Доведення леми 3. Якщо $\beta_q\le x$, тоді правильна така нерівність

$$\frac{e^{\beta_q}}{e^{x}}\le\frac{e^{x+1}}{e^{\beta_q}}-\frac{e^{\beta_q}}{e^{x}}.$$

Звідси

$$\frac{e^{\beta_q}}{e^{x}}\le e^{x+1}\left(\frac{1}{e^{\beta_q}}-\frac{e^{\beta_q}}{e^{2x+2}}\right).$$

Отже, оскільки $0 < \gamma_q < \pi$, то

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^{\beta_q}}{e^x} \sin\gamma_q \le \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} \frac{e^{\beta_q}}{e^x} \sin\gamma_q \le \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} e^{x+1}\left(\frac{1}{e^{\beta_q}} - \frac{e^{\beta_q}}{e^{2x+2}}\right)\sin\gamma_q. \tag{17}$$

За означенням 2 права частина (17) є характеристикою $C(x+1; x_0, 1/f)$, тобто

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^{\beta_q}}{e^x} \sin\gamma_q \le e^{x+1} C(x+1; x_0, \frac{1}{f}) \le ae^x\,\lambda(x+1+b) \le a_1 e^x\,\lambda(x+b_1). \tag{18}$$

Враховуючи, що функція f є функцією скінченного λ-типу та аналог першої основної теореми (див. [2]), маємо $C(x; x_0, 1/f) \le a\,\lambda(x+b)$.

Врахувавши означення $C(x; x_0, 1/f)$, одержуємо

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \left(\frac{e^x}{e^{\beta_q}} - \frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}}\right)\sin\gamma_q \le ae^x\,\lambda(x+b). \tag{19}$$

З огляду на нерівності (17)–(19), одержуємо

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \sin\gamma_q \le \sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^x}{e^{\beta_q}} \sin\gamma_q \le ae^x\,\lambda(x+b) +$$
$$+ \sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^{\beta_q}}{e^x} \sin\gamma_q \le a_2 e^x\,\lambda(x+b_2),$$

при $0 < \gamma_q < \pi$. Лему 3 доведено.

3. Доведення теореми 1.

Доведення теореми 1. Нехай $f \in \mathcal{F}_\lambda$.

Для коефіцієнтів Фур'є функції f правильна оцінка

$$|c_k(x,f)| \le \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \big|\log|f(x+iy)|\big|\,|\sin ky|\,dy, \quad k \in \mathbb{N}.$$

З огляду на нерівність $|\sin ky| \le k \sin y$ для $0 \le y \le \pi$, (див., наприклад, [4, с. 10]) та умову a) теореми 1 отримаємо

$$|c_k(x,f)| \le k\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \big|\log|f(x+iy)|\big| \sin y\,dy =$$
$$= k\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log^+|f(x+iy)| \sin y\,dy + k\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log^-|f(x+iy)| \sin y\,dy \le$$
$$\le k\,ae^x\,\lambda(x+b) + k\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log^-|f(x+iy)| \sin y\,dy, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

За аналогом першої основної теореми (теорема 2 з [2]) $S(x;x_0,1/f)=S(x;x_0,f)+$ $+\varepsilon(x;x_0,f)$, де $\varepsilon(x;x_0,f)=O(1)$ при $x\to\infty$, для функції $f\in\mathcal{F}_\lambda$ маємо, що функція $1/f\in\mathcal{F}_\lambda$. Звідси та з умови *a)* випливає, що $S(x;x_0,1/f)\le a\,\lambda(x+b)+\varepsilon(x;x_0,f)$, де $\varepsilon(x;x_0,f)=O(1)$ при $x\to\infty$. Оскільки $B(x;x_0,1/f)\le S(x;x_0,1/f)$, то

$$\frac{2}{\pi\,e^x}\int\limits_0^\pi \log^-|f(x+iy)|\sin y\,dy=$$
$$=\frac{2}{\pi\,e^x}\int\limits_0^\pi \log^+\left|\frac{1}{f(x+iy)}\right|\sin y\,dy=B(x;x_0,\frac{1}{f})\le a_1\,\lambda(x+b),$$

де a_1- деяка стала.

Отже, з нерівності (3) та умови *a)* теореми 1 випливає

$$|c_k(x,f)|\le k\,ae^x\,\lambda(x+b), \tag{21}$$

при деяких додатних a,b і всіх $k\in\mathbb{N}$.

Згідно з (3)

$$c_k(x+1,f)=\frac{2}{k}\sum_{\rho_q\in R_{x+1}}\left(\frac{e^{k(x+1)}}{e^{k\beta_q}}-\frac{e^{k\beta_q}}{e^{k(x+1)}}\right)\sin k\gamma_q+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x+1}\left(\frac{e^{kt}}{e^{k(x+1)}}-\frac{e^{k(x+1)}}{e^{kt}}\right)\big(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\big)\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{kx_0}}{e^{k(x+1)}}+\frac{e^{k(x+1)}}{e^{kx_0}}\right)\int\limits_0^\pi \log|f(x_0+iy)|\sin ky\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{kx_0}}{e^{k(x+1)}}-\frac{e^{k(x+1)}}{e^{kx_0}}\right)\int\limits_0^\pi \arg f(x_0+iy)\cos ky\,dy,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Домножимо обидва боки рівності (22) на e^{-k}, віднімемо від них $c_k(x,f)$, і використавши (3), отримаємо

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{e^k} c_k(x+1,f) - c_k(x,f) = \\
= \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{2k} e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q - \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_x} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q + \\
+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_0}^{x+1} \left(\frac{e^{kt}}{e^{k(x+2)}} - \frac{e^{kx}}{e^{kt}} \right) \left(\log|f(t)| + (-1)^{k+1} \log|f(t+i\pi)| \right) dt - \\
- \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{e^{kt}}{e^{kx}} - \frac{e^{kx}}{e^{kt}} \right) \left(\log|f(t)| + (-1)^{k+1} \log|f(t+i\pi)| \right) dt + \\
+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{e^{2k}} - 1 \right) \frac{e^{kx_0}}{e^{kx}} \int\limits_0^{\pi} \log|f(x_0+iy)| \sin ky \, dy + \\
+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{e^{2k}} - 1 \right) \frac{e^{kx_0}}{e^{kx}} \int\limits_0^{\pi} \arg f(x_0+iy) \cos ky \, dy = \\
= I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{gathered} \tag{23}
$$

Розглянемо I_1

$$
\begin{gathered}
I_1 = \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{2k} e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q - \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_x} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q = \\
= \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_{x+1} \setminus R_x} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{2k} e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q + \\
+ \frac{2}{k} \left(1 - \frac{1}{e^{2k}} \right) \sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}} \sin k\gamma_q = G_1 + G_2, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{gathered}
$$

Оцінимо $|G_1|$,

$$
|G_1| = \frac{2}{k} \left| \sum_{\rho_q \in R_{x+1} \setminus R_x} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{2k} e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q \right|, \quad k \in \mathbb{N}.
$$

Оскільки $e^{k(x-\beta_q)} - e^{k(\beta_q - x - 2)} \le 1$ для всіх $x \le \rho_q \le x+1$, то

$$
|G_1| \le \frac{2}{k} \left| \sum_{\rho_q \in R_x} \sin k\gamma_q \right| \le 2 \sum_{\rho_q \in R_x} \sin \gamma_q, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{24}
$$

а також

$$|G_2| = \frac{2}{k}\left|\left(1-\frac{1}{e^{2k}}\right)\sum_{\rho_q\in R_x}\frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}}\sin k\gamma_q\right| \le$$

$$\le \frac{2}{k}\left|\sum_{\rho_q\in R_{x+1}}\sin k\gamma_q\right| \le 2\sum_{\rho_q\in R_{x+1}}\sin\gamma_q, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{25}$$

Отож, застосувавши лему 3 до співвідношень (24) та (25), отримаємо

$$|I_1| \le ae^x\,\lambda(b+x). \tag{26}$$

Оцінимо I_2

$$|I_2| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x+1}\left(\frac{e^{kt}}{e^{k(x+2)}}-\frac{e^{kx}}{e^{kt}}\right)\big(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\big)\,dt\,-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{e^{kt}}{e^{kx}}-\frac{e^{kx}}{e^{kt}}\right)\big(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\big)\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left|\left(\frac{1}{e^{2k}}-1\right)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{e^{kt}}{e^{kx}}\big(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\big)\,dt\right| +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{x}^{x+1}\left(\frac{e^{kt}}{e^{k(x+2)}}-\frac{e^{kx}}{e^{kt}}\right)\big(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\big)\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x+1}\big(|\log|f(t)||+|\log|f(t+i\pi)||\big)\,dt.$$

Врахувавши умову 2) означення 2, отримуємо

$$|I_2| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x+1}\frac{e^{x+1}}{e^t}\big(|\log|f(t)||+|\log|f(t+i\pi)||\big)\,dt \le e^{x+1}a\,\lambda(x+b), \tag{27}$$

де a, b – деякі сталі.

Зауважимо, що доданки $|I_3|$ та $|I_4|$ не перевищують деякої сталої. Справді, $|\log|f(x_0+iy)|\sin ky| \le K$ і $|\arg f(x_0+iy)\cos ky| \le K$, $0<y<\pi$, де K – деяка стала. Тоді

$$|I_3|+|I_4| = \left|\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{e^{2k}}-1\right)\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}}\int\limits_0^{\pi}\log|f(x_0+iy)|\sin ky\,dy\right| +$$
$$+\left|\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{e^{2k}}-1\right)\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}}\int\limits_0^{\pi}\arg f(x_0+iy)\cos ky\,dy\right| \le$$
$$\le \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{e^{2k}}\,\pi K_1 + \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{e^{2k}}\,\pi K_1 \le K_2, \tag{28}$$

де K_1, K_2 – деякі сталі.

Отже, з (3) та (26)–(28) маємо

$$|c_k(x,f)| - 1/e^k\,|c_k(x+1,f)| \le \left|1/e^k\,c_k(x+1,f) - c_k(x,f)\right| \le ae^x\,\lambda(x+b), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Звідси

$$|c_k(x,f)| \le 1/e^k\,|c_k(x+1,f)| + ae^x\,\lambda(x+b), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Враховуючи (21), одержимо $|c_k(x,f)| \le k/e^k\,a\lambda(x+1+b)+ae^x\,\lambda(x+b)$, звідки випливає *б)*, оскільки умова 2) входить в означення класу $\mathcal{F}_\lambda$.

Нехай тепер виконуються умови *б)* теореми 1.

Для функції f правильна формула Пуассона-Йенсена

$$\log|f(x+iy)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial P_{x_1}}\log|f(u+iv)|\,\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n}\,ds - \sum_{\rho_q\in P_{x_1}} G(z,\rho_q), \tag{29}$$

де $P_{x_1}=\{z=x+iy : x_1-\alpha<x<x_1+\alpha,\ 0<y<\pi\}$, $x_0+\alpha<x_1,\ \alpha>0$, $G(z,\zeta)$ – функція Гріна прямокутника P_{x_1}, $\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n}$ – похідна за внутрішньою нормаллю ([3, c. 15]). Оскільки $G(z,\zeta)\ge 0$, то справджується таке співвідношення:

$$\log|f(x+iy)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial P_{x_1}}\log|f(u+iv)|\,\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n}\,ds. \tag{30}$$

Використовуючи теорію еліптичних функцій (див., наприклад, [5, гл. VIII], [6], [7]), можемо отримати розвинення ядра у формулі Пуассона-Йенсена (29)

$$G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(1-e^{-4m\alpha})}\,e^{m(u-x)}\left(1-e^{2m(x-x_1-\alpha)}\right)\times$$
$$\times\left(1-e^{2m(x_1-u-\alpha)}\right)\sin my\sin mv, \quad x_1-\alpha\le u<x\le x_1+\alpha, \tag{31}$$

$$G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(1-e^{-4m\alpha})}\,e^{m(x-u)}\left(1-e^{2m(x_1-x-\alpha)}\right)\times$$
$$\times\left(1-e^{2m(u-x_1-\alpha)}\right)\sin my\sin mv, \quad x_1-\alpha\le x<u\le x_1+\alpha. \tag{32}$$

Тоді

$$\frac{\partial G(z,u)}{\partial n} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{-4m\alpha}}\, e^{m(u-x)} \left(1-e^{2m(x-x_1-\alpha)}\right) \times$$
$$\times \left(1-e^{2m(x_1-u-\alpha)}\right) \sin my, \quad x_1-\alpha \le u < x \le x_1+\alpha, \tag{33}$$

$$\frac{\partial G(z,u+i\pi)}{\partial n} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{1-e^{-4m\alpha}}\, e^{m(u-x)} \left(1-e^{2m(x-x_1-\alpha)}\right) \times$$
$$\times \left(1-e^{2m(x_1-u-\alpha)}\right) \sin my, \quad x_1-\alpha \le u < x \le x_1+\alpha; \tag{34}$$

$$\frac{\partial G(z,u)}{\partial n} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{-4m\alpha}}\, e^{m(x-u)} \left(1-e^{2m(x_1-x-\alpha)}\right) \times$$
$$\times \left(1-e^{2m(u-x_1-\alpha)}\right) \sin my, \quad x_1-\alpha \le x < u \le x_1+\alpha, \tag{35}$$

$$\frac{\partial G(z,u+i\pi)}{\partial n} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{1-e^{-4m\alpha}}\, e^{m(x-u)} \left(1-e^{2m(x_1-x-\alpha)}\right) \times$$
$$\times \left(1-e^{2m(u-x_1-\alpha)}\right) \sin my, \quad x_1-\alpha \le x < u \le x_1+\alpha; \tag{36}$$

$$\frac{\partial G(z,x_1-\alpha)}{\partial n} = 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{-4m\alpha}}\, e^{m(x_1-x-\alpha)} \times$$
$$\times \left(1-e^{2m(x-x_1-\alpha)}\right) \times \sin my \sin mv, \tag{37}$$

$$\frac{\partial G(z,x_1+\alpha)}{\partial n} = 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{-4m\alpha}}\, e^{m(x-x_1-\alpha)} \times$$
$$\times \left(1-e^{2m(x_1-x-\alpha)}\right) \times \sin my \sin mv. \tag{38}$$

Співвідношення (30) при $\alpha = 1$, $0 < \delta < 1$ і $x = x_1$ має вигляд

$$\log|f(x_1+iy)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \log|f(x_1+1+iv)| \frac{\partial G(z,x_1+1)}{\partial n}\,dv+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \log|f(x_1-1+iv)| \frac{\partial G(z,x_1-1)}{\partial n}\,dv + \frac{1}{2\pi}\int_{x_1-1}^{x_1-\delta} \log|f(u)| \frac{\partial G(z,u)}{\partial n}\,du+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} \log|f(u)| \frac{\partial G(z,u)}{\partial n}\,du + \frac{1}{2\pi}\int_{x_1+\delta}^{x_1+1} \log|f(u)| \frac{\partial G(z,u)}{\partial n}\,du+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{x_1-1}^{x_1-\delta} \log|f(u+i\pi)| \frac{\partial G(z,u+i\pi)}{\partial n}\,du + \frac{1}{2\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} \log|f(u+i\pi)| \frac{\partial G(z,u+i\pi)}{\partial n}\,du+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{x_1+\delta}^{x_1+1} \log|f(u+i\pi)| \frac{\partial G(z,u+i\pi)}{\partial n}\,du = I_1+I_2+I_{31}+I_{32}+I_{33}+I_{41}+I_{42}+I_{43}.$$

Використавши нерівність $a^+ \le |a|$, маємо

$$\log^+|f(x_1+iy)| \le (I_1+I_2)^+ + I_{31}^+ + I_{32}^+ + I_{33}^+ + I_{41}^+ + I_{42}^+ + I_{43}^+. \tag{39}$$

Розглянемо I_1+I_2

$$I_1+I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial G(z,x_1+1+iv)}{\partial n}\log|f(x_1+1+iv))|\,dv+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial G(z,x_1-1+iv)}{\partial n}\log|f(x_1-1+iv)|\;dv =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-4m}}\,e^{-m}\left(1-e^{-2m}\right)\sin my\;\log|f(x_1+1+iv)|\sin mv\,dv+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-4m}}\,e^{-m}\left(1-e^{-2m}\right)\sin my\;\log|f(x_1-1+iv)|\sin mv\,dv.$$

Оскільки

$$\left|\frac{1}{1-e^{-4m}}\,e^{-m}\left(1-e^{-2m}\right)\sin my\right| \le \frac{e^{-m}}{1+e^{-2m}} \le \frac{1}{e^m},$$

то за теоремою Вейєрштрасса ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-4m}}\,e^{-m}\left(1-e^{-2m}\right)\sin my\sin mv$$

рівномірно збігається при $0 \le v \le \pi$ і його можна почленно інтегрувати. Тому

$$I_1 + I_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{e^m} \left(c_m(x_1+1,f) + c_m(x_1-1,f) \right).$$

Отже, згідно з умовою *б)* теореми 1

$$|I_1 + I_2| \le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{e^m} \left(|c_m(x_1+1,f)| + |c_m(x_1-1,f)| \right) \le a\, e^{x_1}\, \lambda(x_1+b),$$

де a, b – деякі сталі. Домноживши це співвідношення на $\sin y$ і проінтегрувавши за y від 0 до π, отримаємо

$$\int\limits_0^{2\pi} |I_1 + I_2|\, \sin y\, dy \le 2\, a e^{x_1}\, \lambda(x_1+b). \tag{40}$$

Розглянемо I_{31} при $\alpha = 1$ і $x = x_1$. Оскільки $\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n} \ge 0$, $\log^+|x| \le |\log|x||$, то

$$I_{31}^+ \le \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log|f(u)|| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^{-2m}}\, e^{m(u-x_1)} \left(1 - e^{2m(x_1-u-1)}\right) \sin my\, du. \tag{41}$$

Оскільки

$$\left| \frac{1}{1+e^{-2m}}\, e^{(u-x_1)} \left(1 - e^{-2m(x_1-u-1)}\right) \sin my \right| \le e^{m(u-x_1)} \le e^{-m\delta},$$

і мажоруючий ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} e^{-m\delta} = \frac{1}{1-e^{-\delta}}$, збіжний, то за теоремою Вейєрштрасса ряд (41) збіжний абсолютно і рівномірно при $0 \le y \le \pi$, $x_1 - 1 \le u \le x_1 - \delta$. Отже, його можна почленно інтегрувати на $[x_1-1, x_1-\delta]$. Тому

$$I_{31}^+ \le \sum_{m=1}^{\infty} \sin my \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log|f(u)|| \frac{1}{1+e^{-2m}}\, e^{m(u-x_1)} \left(1 - e^{2m(x_1-u-1)}\right) du. \tag{42}$$

Домножимо співвідношення (42) на $\sin y$ і проінтегруємо за y від 0 до π. Тоді

$$\int\limits_0^{\pi} I_{31}^+\, \sin y\, dy \le$$

$$\le \int\limits_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sin my \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log|f(u)|| \frac{e^{m(u-x_1)}}{1+e^{-2m}} \left(1 - e^{2m(x_1-u-1)}\right) du \sin y\, dy.$$

Почленне інтегрування рівномірно збіжного на $[0,\pi]$ ряду дає

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\sin my\sin y\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta}|\log|f(u)||\,\frac{e^{m(u-x_1)}}{1+e^{-2m}}\left(1-e^{2m(x_1-u-1)}\right)\,du\,dy.$$

З ортогональності системи $\{\sin my\}_{m=1}^{\infty}$ на $[0,\pi]$, маємо

$$\int\limits_0^{\pi} I_{31}^{+}\sin y\,dy\le\int\limits_0^{\pi}\sin^2 y\int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta}|\log|f(u)||\,\frac{e^{u-x_1}}{1+e^{-2}}\left(1-e^{2(x_1-u-1)}\right)\,du\,dy\le$$
$$\le\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta}|\log|f(u)||\,\frac{e^{u-x_1}}{1+e^{-2}}\left(1-e^{2(x_1-u-1)}\right)\,du\,dy\le$$
$$\le\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta}|\log|f(u)||\,du\le\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_1+1}|\log|f(u)||\,du.$$

Оскільки $\frac{1}{e^{x_1+1}}\le\frac{1}{e^t}$, при $t\le x_1+1$, то використавши умову 2), отримуємо

$$\frac{1}{e^{x+1}}\int\limits_0^{\pi} I_{31}^{+}\sin y\,dy\le a\lambda(x_1+b). \tag{43}$$

Аналогічно до I_{31}^{+} доводиться оцінка для I_{33}^{+}, I_{41}^{+} та I_{43}^{+}.

З абсолютної неперервності інтеграла Лебега існує таке $\delta>0$, $\delta=\delta(x_1)<1$, що кожен з інтегралів $|I_{32}|$ і $|I_{42}|$ не перевищує 1. Отже, з урахуванням співвідношень (40) та (43) отримаємо $\int_0^{\pi}\log^{+}|f(x_1+iy)|\sin y\,dy\le e^{x}a_1\lambda(x+b_1)$, де a_1, b_1 – деякі сталі. Ми показали, що $B(x;x_0,f)\le a\,\lambda(x+b)$. Тепер оцінимо $A(x;x_0,f)$,

$$A(x;x_0,f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\left(\log^{+}|f(t)|+\log^{+}|f(t+i\pi)|\right)\left(\frac{1}{e^t}-\frac{e^t}{e^{2x}}\right)dt\le$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\log^{+}|f(t)|+\log^{+}|f(t+i\pi)|}{e^t}\,dt.$$

Використавши умову 2) та нерівність $\log^{+}|x|\le|\log|x||$, одержуємо $A(x;x_0,f)\le$ $\le a_1\,\lambda(x+b_1)$, де a_1, b_1 – деякі сталі.

Отож, теорему 1 доведено.

---

1. *Rubel L. A., Taylor B. A.* Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France – 1968. – **96**. – P. 53-96.

2. *Бридун А. М.* Характеристика і перша основна теорема Неванлінни для мероморфних в півсмузі функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2004. – Вип. 63. – С. 32-43.
3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М., 1970.
4. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1990.
5. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. – М., 1970.
6. *Малютин К. Г.* Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости // Матем. сборник – 2001. – 192. – №6. – С. 51-70.
7. *Малютин К. Г., Коломиец С. В.* Ряды Фурье и истинно-субгармонические функции конечного γ-типа // Вісн. Харків. ун-ту. Серія матем., прикладна матем. і мех. – 2000. – **475**. – С. 105-112.

HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF FINITE λ-TYPE IN A HALF-STRIP

Andriy BRYDUN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1
e-mail: a_ brydun@franko.lviv.ua, a_ brydun@yahoo.com

A criterion of λ-type finiteness of holomorphic functions in a half-strip is proved.

Key words: holomorphic function, meromorphic function, Nevanlinna characteristic, function of finite λ-type.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2006

Прийнята до друку 24.10.2007