

УДК 517.928:517.927

## АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ЗАДАЧІ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ НА ГЕОМЕТРИЧНОМУ ГРАФІ ЗІ ЗБУРЕННЯМ ГУСТИНИ В ОКОЛІ ВУЗЛІВ

Юрій ГОЛОВАТИЙ, Геннадій ГРАБЧАК

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Вивчено сингулярно збурену спектральну задачу для диференціального оператора другого порядку на геометричному графі. Ця задача моделює власні коливання системи натягнутих струн із збуренням густини в околах вузлів. Досліджено асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій задачі для випадків регулярного та помірно сингулярного збурень густини.

*Ключові слова:* диференціальні рівняння на графах, сингулярні збурення, приєднані маси, спектр, власні значення, асимптотика.

Диференціальні рівняння на геометричних графах – нова математична теорія на пограниччі аналізу, алгебри та геометрії. Графи та диференціальні рівняння на них виникають у фізиці при дослідженні кристалічних структур, у механіці при вивченні властивостей складних мережоподібних конструкцій, у біології при моделюванні росту рослин і т. п. З погляду класичної теорії диференціальних рівнянь, маємо справу з системою великої кількості рівнянь із складними нелокальними умовами. Однак інтерпретація таких систем як диференціальних рівнянь на графах дає змогу дослідникові використовувати широкий спектр алгебричних та геометричних методів і водночас просто формулювати отримані результати, надаючи їм прозорого фізичного чи геометричного трактування.

За три останні десятиріччя на графах активно переносили результати якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь, вивчали спектральні властивості та їхній зв'язок з геометрією графів. Варто зазначити, що у деяких аспектах результати досліджень задач на графах суттєво відрізняються від класичних, зокрема щодо кратності спектра та питання самоспряженості операторів.

Ця праця є одним з перших досліджень сингулярно збурених крайових задач на графах з використанням асимптотичного аналізу на таких геометричних об'єктах. Модель, яка тут узагальнюється на випадок графа загальної структури, запропонувала О. А. Олейнік [2]. Йдеться про коливні системи з сильно нерівномірним розподілом маси. Дослідження властивостей коливних континуумів з приєднаними та

зосередженими масами проводили механіки та математики, починаючи з XVIII ст. Нові технології, зокрема поява композитних матеріалів, призвели до виникнення нових математичних моделей з більш агресивною зміною характеристик. Наприклад, ці моделі дали змогу описати відомий з експериментів ефект локальних коливань в околі зони збурення маси (мовою механіки – ефект локалізації реакції).

Асимптотичні властивості одновимірних коливних систем із сингулярно збуреною густиною, зокрема ефект локальних коливань, досліджували в [2]-[9]. У працях [2]-[3] вивчали спектральні властивості струни з нерівномірним розподілом маси. В [4] побудовано повні асимптотичні розв'язки власних значень і власних функцій цієї задачі. В [5], [6] ці результати були перенесені на випадок диференціальних операторів четвертого порядку – модель стержня. При достатньо великому локальному збуренні густини в системі, крім ефекту локальних коливань, виникають високочастотні власні коливання. Їхнє існування для струни вперше доведено в [7], а для стержня – у [8]. Багатовимірні задачі з різними збуреннями густини маси вивчали в [10]-[17]. З доволі детальним оглядом праць, присвячених таким задачам, можна ознайомитись у [18].

**1. Графи та диференціальні рівняння.** Нехай  $\Gamma(V, E)$  – скінченний зв'язний граф з множиною  $V$  його вершин та множиною ребер  $E$ . Кожне ребро – це невпорядкована пара  $(a_i, a_j)$  елементів з  $V$  і кажуть, що воно з'єднує вершини  $a_i$  та  $a_j$ . Ребро і довільна з двох вершин, які воно з'єднує, називаються *інцидентними*. Дві вершини – *суміжні*, якщо вони інцидентні деякому ребру. Кількість ребер, інцидентних вершині  $a$ , називається *порядком* цієї вершини. Граф  $\Gamma$  є загальної структури – допускаються ребра-петлі  $(a_i, a_i)$ , а також кратні ребра, коли дві вершини можуть з'єднуватися кількома ребрами.

*Підрозбиття ребра*  $(a_i, a_j)$  – це поділ цього ребра новою вершиною  $a$  на два –  $(a_i, a)$  та  $(a, a_j)$ . Результатом скінченної кількості таких операцій є граф, який називається *підрозбиттям* вихідного графа.

Розглянемо деяку реалізацію графа  $\Gamma$  в  $\mathbb{R}^3$ , при якій кожне ребро є гладкою кривою і ребра не перетинаються. Надалі не будемо розрізняти абстрактний граф і його реалізацію – *геометричний граф*. *Функція на графі* – це відображення  $u: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ . Нехай  $u_\gamma$  – звуження  $u$  на ребро  $\gamma$ . Оскільки знак похідної функції залежить від напрямку параметризації ребра  $\gamma$ , то для граничного значення похідної функції  $u_\gamma$  на кінці ребра  $\gamma$  введемо таке позначення:

$$\frac{du}{d\gamma}(a) - \text{крайня похідна функції } u \text{ вздовж ребра } \gamma \text{ у напрямі від вершини } a.$$

*Інтеграл на графі* від функції  $u$  є сумою інтегралів по всіх його ребрах

$$\int_{\Gamma} u dx = \sum_{\gamma \in E} \int_{\gamma} u ds.$$

Введемо простори:  $C(\Gamma)$  – простір неперервних на графі  $\Gamma$  функцій;  $C[\Gamma]$  – простір функцій на  $\Gamma$ , рівномірно неперервних на кожному ребрі і загалом невизначених

---

Трактуючи граф, як систему струн чи стержнів, природно припустити, що ребра реалізуються відрізками в  $\mathbb{R}^3$ . Однак ми не будемо обмежуватися лише механічною інтерпретацією моделі.

у вершинах;  $C\{\Gamma\}$  – простір функцій на  $\Gamma$ , рівномірно неперервних на кожному ребрі і визначених у вершинах графа, значення  $u(a)$  функції  $u$  у вершині  $a$  не обов'язково збігається з її граничними значеннями  $u_\gamma(a)$  вздовж ребер;  $C^n[\Gamma]$  – простір функцій, всі похідні яких до  $n$ -го порядку належать  $C[\Gamma]$ ;  $C^n(\Gamma) = C^n[\Gamma] \cap C(\Gamma)$ , випадок  $n = \infty$  допускається;  $L_2(\Gamma)$  – простір Лебега зі скалярним добутком  $(u, v)_0 = \int_\Gamma uv \, dx$  та нормою  $\|u\|_0 = \sqrt{(u, u)_0}$ .

Нехай  $\partial\Gamma$  – деяка непорожня підмножина вершин, яку називатимемо *межею графа*. Тоді  $V = \partial\Gamma \cup J$ , де точки з  $J$  називаються *внутрішніми вершинами*. Оскільки цей поділ відбувається довільно, то множина  $\partial\Gamma$  загалом не збігається з межею в топологічному сенсі. Нехай  $C_0^\infty(\Gamma)$  – простір функцій з  $C^\infty(\Gamma)$ , що дорівнюють нулю у деякому околі  $\partial\Gamma$ . Тоді  $H_0^1(\Gamma)$  – простір Соболева, отриманий поповненням  $C_0^\infty(\Gamma)$  за нормою  $\|u\|_1 = (\int_\Gamma u'^2 \, dx)^{1/2}$ ;  $(u, v)_1$  – скалярний добуток в  $H_0^1(\Gamma)$ . Для функцій з  $H_0^1(\Gamma)$  справджуються нерівності

$$\|u\|_0 \leq C \|u\|_1, \quad \max_{x \in \Gamma} |u| \leq C \|u\|_1.$$

Лінійний диференціальний оператор  $L$  на графі  $\Gamma$  – це сукупність  $\{L_\gamma\}_{\gamma \in E}$  лінійних диференціальних операторів на ребрах. *Крайовою задачею* для рівняння другого порядку  $Lu = f$  на  $\Gamma$  є сукупність диференціальних рівнянь другого порядку  $L_\gamma u_\gamma = f_\gamma$  на ребрах та умов, заданих у вершинах. Це можуть бути умови Діріхле  $u(a) = 0$  чи умови спряження

$$u_{\gamma_1}(a) = u_{\gamma_2}(a) = \dots = u_{\gamma_r}(a), \quad \gamma_i \in I(a), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (1)$$

$$\sum_{\gamma \in I(a)} \frac{du}{d\gamma}(a) + h(a)u(a) = 0, \quad (2)$$

де  $h$  – деяка функція з  $C\{\Gamma\}$ . Тут і надалі  $I(a)$  – множина ребер, інцидентних вершині  $a$ . Ми домовимось, що ребро-петля в множину  $I(a)$  входить двічі, а тоді під знаком суми в (2) йому відповідає два доданки, оскільки обидва кінці петлі прилягають до  $a$ . Рівності (1) є умовою неперервності розв'язку у вершині  $a$ , а (2) – умова балансу сил натягу, потоків і т. п. Крайову задачу вивчають у класі  $C^2(\Gamma)$ . Позаяк розв'язок  $u \in C^2(\Gamma)$  неперервний у всіх вершинах, то надалі умови (1) у формулюванні крайових задач опускатимемо.

*Зауваження 1.* У фізичних моделях доданок  $h(a)u(a)$  означає наявність зосередженого фактора у вершині  $a$ , на кшталт коефіцієнта  $h(a)\delta(x)$  в диференціальному рівнянні. Тут  $\delta(x)$  – функція Дірака. Для струнних сіток величина  $h(a)$  є жорсткістю пружної опори у вершині  $a$ . У спектральних задачах умова  $\sum_\gamma \frac{du}{d\gamma}(a) + \lambda\rho(a)u(a) = 0$  зазначає приєднану масу величини  $\rho(a)$  у цій вершині.

Для крайової задачі на  $\Gamma$  ми вважатимемо, що  $\partial\Gamma$  – це множина вершин, у яких задається умова Діріхле. Тоді умови (1), (2) задаються в усіх вершинах з  $J$  – внутрішніх вершинах. Зауважимо, що вершина  $b$  кратності 1 є граничною точкою реалізації графа у топологічному сенсі. Якщо  $b \notin \partial\Gamma$ , то (1), (2) вироджуються в крайову умову третього роду  $\frac{du}{d\gamma_i}(b) + h(b)u(b) = 0$  чи умову Неймана, коли  $h(b) = 0$ . Однак зручно вважати, що вершина  $b$  є внутрішньою. Ці крайові умови трактують

як продовження диференціального оператора задачі з ребер на внутрішні вершини. Введемо диференціальний оператор [1]

$$\left(\frac{d}{d\Gamma}v'\right)(x) = \begin{cases} v''(x), & x \in E, \\ \sum_{\gamma \in I(x)} \frac{dv}{d\gamma}(x), & x \in J, \end{cases}$$

що об'єднує диференціальні оператори на ребрах і умови спряження похідних у внутрішніх вершинах. Диференціювання функцій на ребрах проводять за натуральним параметром кривої. Зауважимо, що друга похідна є інваріантною щодо напрямку параметризації ребра.

**2. Формулювання збуреної задачі та допоміжні факти.** Спектральна задача, яку ми вивчаємо, має подвійне збурення – від малого параметра залежать і диференціальне рівняння, і геометричний граф. Розпочнемо з опису збурення геометрії графа.

Нехай  $\Gamma = \Gamma(V, E)$  – граф, реалізований в  $\mathbb{R}^3$ ,  $V = \partial\Gamma \cup J$ . Через  $\Gamma_\varepsilon$  позначимо однопараметричну сім'ю реалізацій спеціального підрозбиття графа  $\Gamma$ , яке зараз опишемо. Побудуємо сфери радіуса  $\varepsilon$  з центрами у внутрішніх вершинах  $\Gamma$ . При достатньо малому  $\varepsilon$  вони не перетинаються. Кожна така сфера перетинає ребра, інцидентні її центру, в одній точці, за винятком петель, які вона перетинає в двох точках. Точки перетину побудованих сфер з ребрами графа  $\Gamma$  і центри цих сфер назвемо внутрішніми вершинами підрозбиття  $\Gamma_\varepsilon$ . Множину всіх вершин  $\Gamma_\varepsilon$  позначимо через  $V_\varepsilon$ , а множину внутрішніх вершин – через  $J_\varepsilon$ . Зрозуміло, що  $J \subset J_\varepsilon$  і  $V_\varepsilon = \partial\Gamma \cup J_\varepsilon$ . Для кожної вершини  $a \in J$  через  $s_\varepsilon(a)$  позначимо зірковий підграф, що його вирізає з  $\Gamma$  сфера радіуса  $\varepsilon$  з центром у вершині  $a$ .

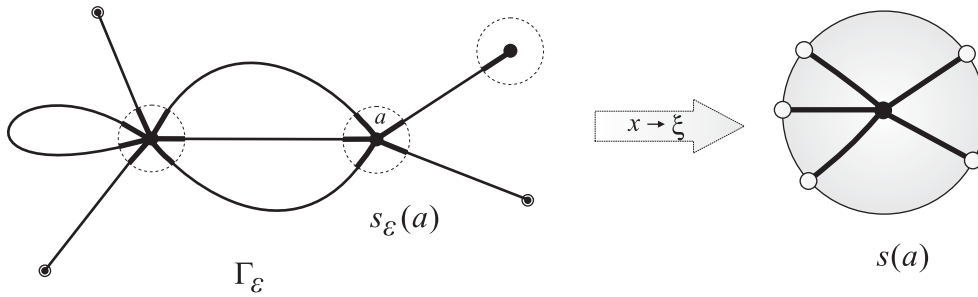


Рис. 1:

Нехай  $\rho$  – функція з  $C^\infty\{\Gamma\}$ , яка є додатною на ребрах і набуває нульового значення у всіх вершинах. Розглядаючи  $\rho$  на  $\Gamma_\varepsilon$ , ми додатково вимагатимемо, щоб вона дорівнювала нулю на  $J_\varepsilon$ , зберігаючи за нею позначення  $\rho$ . Ця функція моделює густину маси незбуреної системи. Введемо також невід'ємну функцію  $q_\varepsilon$  класу  $C_0^\infty\{\Gamma_\varepsilon\}$ , що дорівнює нулю на  $J_\varepsilon \cup J$ , а також поза всіма підграфами  $s_\varepsilon(a)$ ,  $a \in J$ . На кожній зірці  $s_\varepsilon(a)$  вона має зображення  $q_\varepsilon(x) = q_a(\varepsilon^{-1}(x - a))$ , де  $q_a = q_a(\xi)$  – додатна гладка функція на ребрах графа  $s(a)$  у допоміжному просторі  $\mathbb{R}_\xi^3$ , а  $q_a(0) = 0$ .

Граф  $s(a)$  отримуємо з  $s_\varepsilon(a)$  зсувом, при якому вершина  $a$  переходить у початок координат  $\xi = 0$ , і гомотетичним розтягом з коефіцієнтом  $\varepsilon^{-1}$ . Побудована функція  $q_\varepsilon$  буде описувати збурення густини в околі вузлів. Розглянемо функцію

$$\rho_\varepsilon(x, \sigma) = \rho(x) + \varepsilon^{-\sigma} q_\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

де  $\sigma$  – дійсний параметр, який визначає силу збурення. Ми вивчатимемо асимптотику спектра крайової задачі

$$\frac{d}{d\Gamma_\varepsilon} u'_\varepsilon + \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma, \quad (3)$$

де  $\lambda^\varepsilon$  – спектральний параметр, а  $u_\varepsilon$  – власна функція класу  $C^2(\Gamma_\varepsilon)$ .

В [4] для моделі струни показано, що є лише 5 випадків якісно різної поведінки спектра щодо сили збурення:  $\sigma < 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\sigma \in (1, 2)$ ,  $\sigma = 2$  та  $\sigma > 2$ . Це залишається правильним і для моделі на графі. В цій праці ми вивчатимемо перші три випадки.

Оскільки простори Соболева  $H_0^1(\Gamma)$  та  $H_0^1(\Gamma_\varepsilon)$ , як множини функцій, збігаються, то подамо таке варіаційне формулювання задачі (3): *знайти число  $\lambda^\varepsilon$  і функцію  $u_\varepsilon \neq 0$  з класу  $H_0^1(\Gamma)$  такі, що*

$$(u_\varepsilon, \varphi)_1 = \lambda^\varepsilon (\rho_\varepsilon u_\varepsilon, \varphi)_0 \quad (4)$$

для всіх  $\varphi \in H_0^1(\Gamma)$ . Тотожність одержуємо за допомогою формули інтегрування частинами на графі  $\Gamma$

$$\int_\Gamma \left( \frac{d}{d\Gamma} \phi' \right) \psi dx = - \sum_{x \in \partial\Gamma} \frac{d\phi}{d\gamma}(x) \psi(x) - \int_\Gamma \phi' \psi' dx. \quad (5)$$

Звернемо увагу, що ця формула не залежить від орієнтації ребер. Задачі (4) відповідає оператор  $A_\varepsilon: H_0^1(\Gamma) \rightarrow H_0^1(\Gamma)$ , породжений рівністю

$$(A_\varepsilon u, v)_1 = (\rho_\varepsilon u, v)_0 \quad (6)$$

двох білінійних форм для всіх  $v \in H_0^1(\Gamma)$ . Очевидно, він є самоспряжений компактний і додатний. Точками його спектра є величини  $(\lambda^\varepsilon)^{-1}$ , обернені до власних значень задачі (3). Отже, для будь-якого  $\varepsilon > 0$  ця задача має дискретний додатний спектр  $\lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leq \lambda_3^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_k^\varepsilon \leq \dots$ , а з власних функцій  $\{u_{\varepsilon, k}\}_{k=1}^\infty$  можна сформувати ортонормовану базу в  $H_0^1(\Gamma)$ . Оскільки на ребрах коефіцієнти рівнянь є гладкими, то згідно з теоремами регулярності варіаційне формулювання дає нам власні функції класу  $C^2(\Gamma_\varepsilon)$ .

Зрозуміло, що оператор  $A_\varepsilon$  залежить також від  $\sigma$ , і правильніше було б писати  $A(\varepsilon, \sigma)$ . Зберігаючи коротше позначення, ми надалі завжди зазначатимемо, для яких значень  $\sigma$  вивчається асимптотична поведінка сім'ї  $A_\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Введемо позначення  $m_a = \int_{s(a)} q_a(\xi) d\xi$  для всіх  $a \in J$ . У випадку, коли в моделі  $\sigma = 1$ , величина  $m_a$  є масою, що концентрується поблизу вузла  $a$ .

**Лема 1.** Для кожної вершини  $a \in J$  та довільних функцій  $u, v$  з простору  $H_0^1(\Gamma)$  виконуються оцінки

$$\max_{x \in s_\varepsilon(a)} |u(x) - u(a)| \leq c\sqrt{\varepsilon} \|u\|_1, \quad (7)$$

$$\left| \varepsilon^{-1} \int_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon uv \, dx - m_a u(a)v(a) \right| \leq C\sqrt{\varepsilon} \|u\|_1 \|v\|_1, \quad (8)$$

з незалежними від  $\varepsilon$  сталими  $c$  та  $C$ .

*Доведення.* Нехай  $\gamma_\varepsilon$  – ребро графа  $s_\varepsilon(a)$  довжини  $\ell_\varepsilon$ . Очевидно, що  $\ell_\varepsilon = O(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тоді для  $x \in \gamma_\varepsilon$  матимемо

$$|u(x) - u(a)| \leq \int_{\gamma_\varepsilon} |u'(s)| \, ds \leq \left( \int_0^{\ell_\varepsilon} ds \right)^{1/2} \left( \int_{\gamma_\varepsilon} u'^2 \, ds \right)^{1/2} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|u\|_1.$$

Доведемо оцінку (8). Враховуючи (7), маємо

$$\begin{aligned} |u(x)v(x) - u(a)v(a)| &\leq |u(x)(v(x) - v(a))| + |v(a)(u(x) - u(a))| \leq \\ &\leq |(v(x) - v(a))| \max_{\Gamma} u + |(u(x) - u(a))| \max_{\Gamma} v \leq \sqrt{\varepsilon} C \|u\|_1 \|v\|_1. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon^{-1} \int_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon uv \, dx - m_a u(a)v(a) \right| &\leq \varepsilon^{-1} \int_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon(x) |u(x)v(x) - u(a)v(a)| \, dx \leq \\ &\leq c\sqrt{\varepsilon} \left( \int_{s(a)} q_a(\xi) \, d\xi \right) \|u\|_1 \|v\|_1 \leq c m_a \sqrt{\varepsilon} \|u\|_1 \|v\|_1. \end{aligned}$$

Як наслідок маємо також нерівності для  $u, v \in H_0^1(\Gamma)$

$$|(q_\varepsilon u, v)_0| \leq c\varepsilon \|u\|_1 \|v\|_1, \quad (9)$$

$$\left| \varepsilon^{-1} (q_\varepsilon u, v)_0 - \sum_{a \in J} m_a u(a)v(a) \right| \leq C\sqrt{\varepsilon} \|u\|_1 \|v\|_1. \quad (10)$$

Нам знадобляться деякі факти з теорії збурень операторів, які сформулюємо в зручному для наших потреб вигляді. У більш загальному формулюванні їх можна знайти в [19]–[22]. Нехай  $T$  – компактний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі  $H$  з нормою  $\|\cdot\|$ .

**Означення 1.** Квазімодою з нев'язкою  $\delta$  для оператора  $T$  будемо називати таку пару  $(\mu, v) \in \mathbb{R} \times H$ , що  $\|Tv - \mu v\| \leq \delta$  і  $\|v\| = 1$ .

**Лема 2.** (i) Якщо  $(\mu, v)$  – квазімода з нев'язкою  $\delta$  для оператора  $T$ , то інтервал  $[\mu - \delta, \mu + \delta]$  містить принаймні одне власне значення оператора  $T$ .

(ii) Нехай  $E_T(\Delta)$  – спектральний проектор оператора  $T$ , що відповідає інтервалу  $\Delta = [\mu - \alpha, \mu + \alpha]$ , де  $\alpha > 0$ . Тоді

$$\|E_T(\Delta)v - v\| \leq \delta\alpha^{-1}.$$

Зокрема, коли в  $\Delta$  лежить лише одне просте власне значення оператора  $T$ , то йому відповідає така нормована власна функція  $u$ , що  $\|u - v\| \leq 2\delta\alpha^{-1}$ .

(iii) Нехай  $(\mu, v_1), \dots, (\mu, v_r)$  – ортогональна сім'я квазімод для оператора  $T$  з нев'язкою  $\delta$ , тобто  $(v_i, v_j)_H = 0$  при  $i \neq j$ . Якщо  $r\delta < \alpha$ , то сумарна кратність частини спектра оператора  $T$ , що лежить в інтервалі  $\Delta$ , дорівнює  $r$ .

Нехай  $S$  ще один компактний самоспряжений оператор в  $H$ . Тоді, як відомо,

$$|\lambda_k(T) - \lambda_k(S)| \leq \|T - S\|, \quad (11)$$

де  $\lambda_k(T)$  і  $\lambda_k(S)$  –  $k$ -ті власні значення операторів  $T$  і  $S$ . Якщо  $Sv = \mu v$ , то  $(\mu, v)$  є квазімодом для оператора  $T$  з нев'язкою  $\|T - S\|$ . Нехай  $E_S(\mu)$  – ортопроектор на власний підпростір для  $\mu$ , а інтервал  $\Delta$  не містить інших точок спектра  $S$ , окрім  $\mu$ . Тоді

$$\|E_T(\Delta) - E_S(\mu)\| \leq c_\mu \|T - S\|, \quad (12)$$

що безпосередньо впливає з частин (ii), (iii) леми 2.

**3. Регулярні збурення: випадки  $\sigma < 1$  та  $\sigma = 1$ .** Регулярними називаємо такі збурення, за яких сім'я операторів  $A_\varepsilon = A(\varepsilon, \sigma)$  є рівномірно збіжною. Як ми доведемо, для випадку  $\sigma < 1$  граничною є задача

$$\frac{d}{d\Gamma} u' + \lambda \rho u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma, \quad u \in C^2(\Gamma) \quad (13)$$

із незбуреною густиною  $\rho$ . З нею асоційований самоспряжений, компактний, додатний оператор  $B_0: H_0^1(\Gamma) \rightarrow H_0^1(\Gamma)$ , який задається рівністю  $(B_0 u, \varphi)_1 = (\rho u, \varphi)_0$  для всіх  $\varphi \in H_0^1(\Gamma)$ . Нехай  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  – власні значення задачі (13), перенумеровані з врахуванням кратності, а  $\{u_k\}_{k=1}^\infty$  – відповідні власні функції. Тоді спектр оператора  $B_0$  складається з точок  $(\lambda_k)^{-1}$ .

Нехай  $P_\lambda$  – ортопроектор в  $H_0^1(\Gamma)$  на власний підпростір, що відповідає власному значенню  $\lambda$  задачі (13), а  $P_\lambda^\varepsilon$  – ортопроектор на підпростір, породжений власними функціями задачі (3), для яких власні значення  $\lambda^\varepsilon$  прямують до  $\lambda$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Теорема 1.** Нехай  $\sigma < 1$ . Власні значення задачі (3) збігаються при  $\varepsilon \rightarrow 0$  до власних значень задачі (13), ця збіжність є пономерною і  $|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k| \leq c_k \varepsilon^{1-\sigma}$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$ . Крім того, якщо  $\lambda$  – власне значення задачі (13), то  $\|P_\lambda^\varepsilon - P_\lambda\| \leq C_\lambda \varepsilon^{1-\sigma}$ . Тут сталі  $c_k, C_\lambda$  не залежать від  $\varepsilon$ .

*Доведення.* Покажемо, що сім'я операторів  $A_\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  рівномірно збігається до оператора  $B_0$ . Справді, для функцій  $u, \varphi \in H_0^1(\Gamma)$ , враховуючи (9), маємо

$$|((A_\varepsilon - B_0)u, \varphi)_1| = |(\rho_\varepsilon u, \varphi)_0 - (\rho u, \varphi)_0| = |\varepsilon^{-\sigma} (q_\varepsilon u, \varphi)_0| \leq c \varepsilon^{1-\sigma} \|u\|_1 \|\varphi\|_1,$$

тобто  $\|A_\varepsilon - B_0\| \leq c \varepsilon^{1-\sigma}$ . Тоді  $|(\lambda_k^\varepsilon)^{-1} - (\lambda_k)^{-1}| \leq c \varepsilon^{1-\sigma}$  згідно з (11). Звідси маємо  $|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k| \leq c |\lambda_k^\varepsilon| |\lambda_k| \varepsilon^{1-\sigma} \leq c_k \varepsilon^{1-\sigma}$ , оскільки  $\lambda_k^\varepsilon \rightarrow \lambda_k$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Нехай  $\Delta$  – окіл власного значення  $\lambda$ , що не містить інших точок спектра  $B_0$ . Тоді при малому  $\varepsilon$  всі власні значення  $A_\varepsilon$ , що прямують до  $\lambda$ , і лише вони, належатимуть інтервалу  $\Delta$ . Отже, оцінка для різниці проекторів  $P_\lambda^\varepsilon, P_\lambda$  впливає з (12).

*Зауваження 2.* Отримані в теоремі оцінки  $\|P_\lambda^\varepsilon - P_\lambda\| \leq C_\lambda \varepsilon^{1-\sigma}$  для кожного з власних значень  $\lambda$  задачі (13) рівносильні пономерній збіжності власних функцій  $u_{\varepsilon,k} \rightarrow u_k$  в  $H_0^1(\Gamma)$  при відповідному виборі  $u_k$ . Зрештою,  $\|u_{\varepsilon,k} - u_k\|_1 \leq C_k \varepsilon^{1-\sigma}$ , а з причини гладкості коефіцієнтів власні функції  $u_{\varepsilon,k}$  збігаються і в просторі  $C^2(\Gamma)$ . Це стосується і випадку, описаного в теоремі 2.

Тепер вивчимо випадок  $\sigma = 1$ . Нехай функція  $\rho_0 \in C^\infty\{\Gamma\}$  збігається з незбуреною густиною  $\rho$  на ребрах графа, але у внутрішніх вершинах  $\rho_0(a) = m_a$ ,  $a \in J$ . В зауваженні 1 зазначено, що така густина описує приєднані маси величиною  $m_a$  у вершинах  $a \in J$ . Розглянемо спектральну задачу

$$\frac{d}{d\Gamma} v' + \lambda \rho_0 v = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad v = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma, \quad v \in C^2(\Gamma), \quad (14)$$

якій відповідає самоспряжений компактний оператор  $B_1$  в  $H_0^1(\Gamma)$ , визначений так:  $(B_1 v, \varphi)_1 = (\rho v, \varphi)_0 + \sum_{a \in J} m_a v(a) \varphi(a)$  для всіх  $\varphi \in H_0^1(\Gamma)$ . Занумеруємо власні значення задачі (14) з врахуванням їхніх кратностей:  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ . Через  $P_\lambda$  позначимо ортопроектор в  $H_0^1(\Gamma)$  на власний підпростір, що відповідає власному значенню  $\lambda$  задачі (14).

**Теорема 2.** *Нехай  $\sigma = 1$ . Власні значення задачі (3) збігаються при  $\varepsilon \rightarrow 0$  до власних значень задачі (14), ця збіжність є пономерною і  $|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k| \leq c_k \sqrt{\varepsilon}$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$ . Крім того, для кожного власного значення  $\lambda$  задачі (14) справджується оцінка  $\|P_\lambda^\varepsilon - P_\lambda\| \leq C_\lambda \sqrt{\varepsilon}$ , де сталі  $c_k, C_\lambda$  не залежать від  $\varepsilon$ .*

*Доведення.* Як і в доведенні теореми 1, достатньо перевірити, що сім'я операторів  $A_\varepsilon$  рівномірно збігається до оператора  $B_1$ . Скориставшись нерівністю (10), матимемо

$$\begin{aligned} |((A_\varepsilon - B_1)v, \varphi)_1| &= |(\rho_\varepsilon v, \varphi)_0 - (\rho v, \varphi)_0 - \sum_{a \in J} m_a v(a) \varphi(a)| = \\ &= \left| \varepsilon^{-1} (q_\varepsilon v, \varphi)_0 - \sum_{a \in J} m_a v(a) \varphi(a) \right| \leq C \sqrt{\varepsilon} \|v\|_1 \|\varphi\|_1 \end{aligned}$$

для довільних функцій  $u, \varphi \in H_0^1(\Gamma)$ . Звідси  $\|A_\varepsilon - B_1\| \leq C \sqrt{\varepsilon}$ .

Отже, для  $\sigma < 1$  спектр задачі (3) прямує до спектра задачі з незбуреною густиною, оскільки загальна маса, що концентрується в околах внутрішніх вершин, безмежно мала при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . У випадку  $\sigma = 1$  збурення густини в околах внутрішніх вершин  $\delta$ -подібні, тому в границі отримуємо задачу (14) з приєднаними масами.

**4. Сингулярні збурення: випадок  $1 < \sigma < 2$ .** У цьому випадку сім'я операторів  $A_\varepsilon$  вже не є рівномірно обмеженою при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Позаяк  $\|A_\varepsilon\|$  є точкою спектра  $A_\varepsilon$ , тоді  $\|A_\varepsilon\|^{-1}$  є власним значенням задачі (3), то принаймні одне власне значення прямує до нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Насправді, спектр задачі (3) ділиться на дві частини. Одна з них складається зі скінченної кількості власних значень, збіжних до нуля (*нижня частина спектра*), а до іншої належать власні значення, які мають додатні границі (*верхня частина спектра*).

#### 4.1. "Невагомі" графи з важкими вузлами.

Ми доведемо, що нижня частина спектра складається з  $n$  власних значень із врахуванням їхньої кратності, де  $n$  – потужність множини  $J$ . Розглянемо спектральну



задачу

$$\frac{d}{d\Gamma} w' + \nu q_0 w = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad w = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma \quad (15)$$

з густиною  $q_0 \in C^\infty\{\Gamma\}$ , яка є відмінною від нуля лише на множині  $J$ , а саме  $q_0(a) = m_a$  для  $a \in J$ . Така задача моделює надлегку сітку струн з важкими вузлами, коли масою ребер можна знехтувати порівняно з масою вузлів.

**Означення 2.** Функція  $u$  називається лінійною на графі  $\Gamma$ , якщо вона неперервна на  $\Gamma$  і є лінійною на кожному ребрі в його параметризації натуральним параметром.

Тут і надалі позначатимемо через  $b_1, b_2, \dots, b_N$  вершини графа  $\Gamma$ , а внутрішні вершини нам буде зручно позначати іншими літерами  $- a_1, \dots, a_n$ . Тут  $n < N$ , бо  $J \subset V$ . Домовимося також, що  $b_i = a_i$  для  $i = 1, \dots, n$ .

**Лема 3.** Лінійні функції на графі  $\Gamma$  утворюють лінійний простір  $\mathcal{L}(\Gamma)$ , вимірність якого дорівнює кількості вершин графа:  $\dim \mathcal{L}(\Gamma) = N$ .

*Доведення.* Оскільки лінійна функція  $\ell$  на  $\Gamma$  однозначно визначається своїми значеннями  $\ell(b_1), \dots, \ell(b_N)$  у вершинах графа, то  $\mathcal{L}(\Gamma)$  ізоморфний простору  $\mathbb{R}^N$ .

Через  $\mathcal{L}_0(\Gamma)$  позначимо підпростір лінійних функцій на  $\Gamma$ , які обертаються в нуль на  $\partial\Gamma$ . Зрозуміло, що  $\dim \mathcal{L}_0(\Gamma) = n$ . Виберемо в  $\mathcal{L}_0(\Gamma)$  базу з таких лінійних функцій  $\ell_1, \dots, \ell_n$ , що  $\ell_i(a_i) = 1$  та  $\ell_i(a_j) = 0$ , коли  $i \neq j$ .

**Теорема 3.** Задача (15) має  $n = |J|$  додатних власних значень із врахуванням кратностей, а власні функції є лінійними на  $\Gamma$  і утворюють базу в просторі  $\mathcal{L}_0(\Gamma)$ .

*Доведення.* Рівняння (15) на ребрах графа має вигляд  $w''_\gamma = 0$ , тому будь-який неперервний його розв'язок є лінійною функцією на  $\Gamma$ . Задача (15) має операторне зображення  $\nu T_0 w - w = 0$  з оператором  $T_0$  в  $H_0^1(\Gamma)$

$$(T_0 w, \varphi)_1 = \sum_{a \in J} m_a w(a) \varphi(a) \quad \text{для всіх } \varphi \in H_0^1(\Gamma). \quad (16)$$

Це оператор скінченного рангу. Справді,  $\text{Ker } T_0 = \{w \in H_0^1(\Gamma) : w = 0 \text{ на } J\}$ . Функція  $f \in H_0^1(\Gamma)$  має однозначне зображення  $f = f(a_1)\ell_1 + \dots + f(a_n)\ell_n + f_0$ , де  $f_0 \in \text{Ker } T_0$ . Звідси  $\text{Im } T_0 = \mathcal{L}_0(\Gamma)$ , тобто ранг  $T_0$  дорівнює  $n$ . Тепер твердження про базу в  $\mathcal{L}_0(\Gamma)$  стає очевидним.

До речі, існує простий і конструктивний алгоритм знаходження власних значень і власних функцій задачі (15). Введемо такі позначення:  $I^*(a)$  – множина ребер, які є інцидентними вершині  $a$ , але не є петлями;  $R_{ij}$  – множина ребер, що з'єднують вершини  $a_i$  та  $a_j$ . Якщо  $w$  – власна функція задачі (15) з власним значенням  $\nu$ , то на ребрі  $\gamma = (b_i, b_j)$  вона має зображення  $w_\gamma(\tau) = (w(b_j) - w(b_i))d_\gamma^{-1}\tau + w(b_i)$ , де  $d_\gamma$  – довжина ребра, а  $\tau$  – натуральний параметр,  $\tau \in (0, d_\gamma)$ . Якщо  $\gamma$  є петлею, то  $w_\gamma(\tau) = w_\gamma(b_i)$ , тобто  $w$  є сталою на петлях. Отже, пошук функції  $w$  зводиться до знаходження вектора  $\mathbf{w} = (w(a_1), \dots, w(a_n))$  її значень у внутрішніх вершинах, оскільки  $w(b_i) = 0$  для  $i \in \{n+1, \dots, N\}$  в силу крайових умов. Але диференціальне

рівняння (15) для  $w$  на множині  $J$  рівносильне лінійній алгебричній системі

$$(C - \nu M) w = 0. \quad (17)$$

Тут  $M = \text{diag}(m_{a_1}, \dots, m_{a_n})$  – діагональна матриця, складена з мас вузлів, а елементи  $c_{ij}$  квадратної матриці  $C$  порядку  $n$  будують за такими правилами:

$$c_{ii} = \sum_{\gamma \in I^*(a_i)} \frac{1}{d_\gamma}, \quad c_{ij} = - \sum_{\gamma \in R_{ij}} \frac{1}{d_\gamma}, \quad \text{коли } a_i \text{ та } a_j \text{ суміжні,}$$

і  $c_{ij} = 0$ , коли вершини  $a_i$  та  $a_j$  суміжними не є. Рівняння (17) є так званою *узагальненою задачею на власні значення* для знаходження  $\nu$  та  $w$  [24]. Власні значення  $\nu_1, \dots, \nu_n$  задачі (15) є коренями характеристичного рівняння  $\det(C - \nu M) = 0$ , а за відповідними власними векторами  $w_1, \dots, w_n$  будують лінійні власні функції.

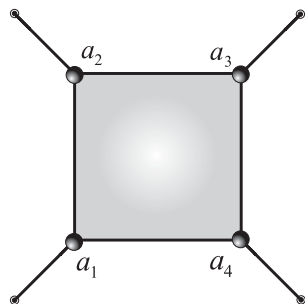


Рис. 2:

**Приклад 1.** Розглянемо модель невагомому графу, зображеного на рис. 2. Він складається з одиничного квадрата на чотирьох розтяжках довжини  $1/2$ . У вершинах квадрата  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , які вважають внутрішніми, зосереджено маси величини  $m$ . Для такого графа матриця  $C$  має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

а  $M = tI$ , де  $I$  – одинична матриця четвертого порядку. Тоді задача (17) має чотири власні значення – два прості, а одне двократне

$$\begin{aligned} \nu_1 = 2 &\longrightarrow w_1 = (1, 1, 1, 1), \\ \nu_2 = \nu_3 = 4 &\longrightarrow \begin{cases} w_2 = (-1, -1, 1, 1), \\ w_3 = (-1, 1, 1, -1), \end{cases} \\ \nu_4 = 6 &\longrightarrow w_4 = (-1, 1, -1, 1). \end{aligned}$$

---

Рівняння на  $J$  є сукупністю умов спряження перших похідних у внутрішніх вершинах графа.

Нагадаємо, що координати власних векторів  $w_k$  – це значення у внутрішніх вершинах відповідних лінійних власних функцій для невагомго графа. Ці функції зображено на рис. 3.

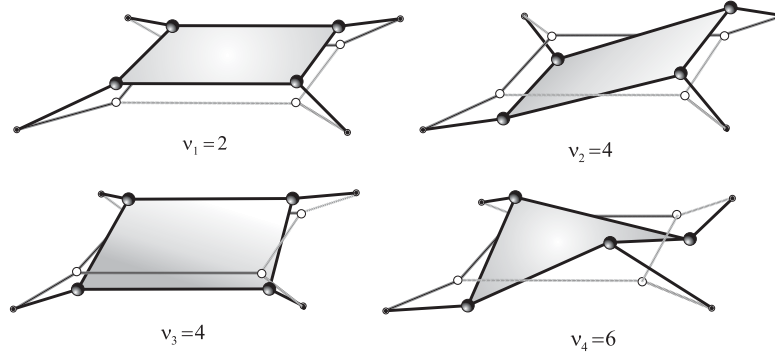


Рис. 3:

4.2. Асимптотика нижньої частини спектра. Вивчимо поведінку при  $\varepsilon \rightarrow 0$  перших  $n$  власних значень  $\lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_n^\varepsilon$  задачі (3) та відповідних власних функцій  $u_{\varepsilon,k}$ , які вважатимемо нормованими в  $H_0^1(\Gamma)$ .

Введемо позначення:  $P_\nu$  – ортопроектор в  $H_0^1(\Gamma)$  на власний підпростір задачі (15), що відповідає власному значенню  $\nu$ ;  $\mathcal{P}_\nu^\varepsilon$  – ортопроектор в  $H_0^1(\Gamma)$  на підпростір, породжений власними функціями збуреної задачі (3) з такими власними значеннями  $\lambda^\varepsilon$ , що  $\varepsilon^{1-\sigma}\lambda^\varepsilon \rightarrow \nu$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Нехай  $\nu_1, \dots, \nu_n$  – власні значення задачі (15), занумеровані з врахуванням кратності.

**Теорема 4.** Нехай  $\sigma > 1$ . Для всіх  $k = 1, 2, \dots, n$  власні значення  $\lambda_k^\varepsilon$  задачі (3) прямують до нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  і виконуються оцінки

$$|\varepsilon^{1-\sigma}\lambda_k^\varepsilon - \nu_k| \leq c_k \varepsilon^\theta, \quad \theta = \min\{1/2, \sigma - 1\}.$$

Крім того, для кожного власного значення  $\nu$  задачі (15)

$$\|\mathcal{P}_\nu^\varepsilon - P_\nu\| \leq C_\nu \varepsilon^\theta,$$

а лінійні власні функції  $w_1, \dots, w_n$  цієї задачі можна вибрати так, що

$$\|u_{\varepsilon,k} - w_k\|_1 \leq L_k \varepsilon^\theta \quad (18)$$

для всіх  $k = 1, \dots, n$ . Тут сталі  $c_k, C_\nu, L_k$  не залежать від  $\varepsilon$ .

*Доведення.* Перенормуємо сім'ю операторів  $A_\varepsilon$ , ввівши позначення  $T_\varepsilon = \varepsilon^{\sigma-1}A_\varepsilon$ . Сім'я  $T_\varepsilon$  вже є рівномірно обмеженою і при  $\varepsilon \rightarrow 0$  збігається в операторній нормі до оператора  $T_0$ . Справді, використавши рівності (6) і (16), матимемо

$$\begin{aligned} |((T_\varepsilon - T_0)v, v)_1| &= |\varepsilon^{\sigma-1}(A_\varepsilon v, v)_1 - (T_0 v, v)_1| \leq \\ &\leq \varepsilon^{\sigma-1}|(\rho v, v)_0| + \left| \varepsilon^{-1}(q_\varepsilon v, v)_0 - \sum_{a \in J} m_a v(a)^2 \right| \leq c(\varepsilon^{\sigma-1} + \sqrt{\varepsilon}) \|v\|_1^2 \end{aligned}$$

для всіх  $v \in H_0^1(\Gamma)$ . Тут ми застосували нерівність (10). Отже,

$$\|T_\varepsilon - T_0\| \leq c\varepsilon^\theta. \quad (19)$$

Позаяк величини  $\varepsilon^{\sigma-1}(\lambda_k^\varepsilon)^{-1}$  є власними значеннями оператора  $T_\varepsilon$ , а його власні вектори такі самі як у оператора  $A_\varepsilon$ , то всі твердження теореми випливають із оцінки норм (19) та нерівностей (11), (12).

Хоча в цій статті ми обмежилися дослідженням моделі при  $\sigma < 2$ , однак результат про поведінку нижньої частини спектра залишається правильним для всіх  $\sigma > 1$ . Коли маса, що концентрується в околі вузлів, необмежено зростає при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то перші  $n$  власних значень збуреної задачі (3), де  $n$  – кількість внутрішніх вершин графа  $\Gamma$ , завжди прямують до нуля, а відповідні власні функції є асимптотично близькими до лінійних функцій на  $\Gamma$ . Ці лінійні функції, тобто базу  $w_1, \dots, w_n$  з теореми, можна знайти конструктивно, побудувавши асимптотичні розвинення власних значень  $\lambda_k^\varepsilon$  і відповідних власних функцій  $u_{\varepsilon,k}$  в околі кратного власного значення  $\nu$ .

Перенормуванням сім'ї  $A_\varepsilon$  ми досягли її обмеженості в операторній нормі, але втратили в результаті граничного переходу всю інформацію про форми власних коливань, що відповідають верхній частині спектра. Ці власні функції “зникли” в ядрі оператора  $T_0$ .

*4.3. Асимптотика верхньої частини спектра.* Покажемо, що для  $1 < \sigma < 2$  решти власних значень відокремлені від нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Лема 4.** *Для кожної вершини  $a_i \in J$  графа  $\Gamma_\varepsilon$  існує лінійна комбінація  $v_{\varepsilon,i}$  перших  $n$  власних функцій задачі (3), така що*

$$|v_{\varepsilon,i}(a_i)| \geq c \quad \text{та} \quad v_{\varepsilon,i}(a_j) \rightarrow 0 \quad \text{для } j \neq i$$

з деякою додатною сталою  $c$ . При  $j \neq i$

$$|v_{\varepsilon,i}(a_j)| \leq C\varepsilon^\theta, \quad \theta = \min\{1/2, \sigma - 1\}. \quad (20)$$

*Доведення.* Раіше ми використовували дві різні бази в просторі  $\mathcal{L}_0(\Gamma)$ , який є образом оператора  $T_0$ . Першу з них побудовано в теоремі 3, а другу – в теоремі 4. Лінійна функція  $\ell_i$  з першої бази є відмінною від нуля лише в одній внутрішній вершині  $a_i$ . Нехай  $\ell_i = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$  – її зображення у базі з теореми 4. Приймемо  $v_{\varepsilon,i} = \alpha_1 u_{\varepsilon,1} + \dots + \alpha_n u_{\varepsilon,n}$ . Тоді згідно з (1) та (18) маємо

$$\max_{x \in \Gamma} |v_{\varepsilon,i}(x) - \ell_i(x)| \leq \|v_{\varepsilon,i} - \ell_i\|_1 \leq C\varepsilon^\theta.$$

Отже, лінійна комбінація  $v_{\varepsilon,i}$  задовольняє всі умови леми.

**Лема 5.** *Нехай  $\sigma \in (1, 2]$ . Тоді існує така додатна стала  $\varkappa$ , що  $\lambda_{n+1}^\varepsilon \geq \varkappa$  для всіх додатних  $\varepsilon$ .*

*Доведення.* Нехай  $u_\varepsilon = u_{\varepsilon,n+1}$  – власна функція задачі (3), яка відповідає власному значенню  $\lambda_{n+1}^\varepsilon$ ,  $\|u_\varepsilon\|_1 = 1$ . Тоді вона ортогональна в  $H_0^1(\Gamma)$  до функції  $v_{\varepsilon,i}$  з попередньої леми, що на підставі тотожності (4) можна записати так:  $(\rho u_\varepsilon, v_{\varepsilon,i})_0 + \varepsilon^{-\sigma}(q_\varepsilon u_\varepsilon, v_{\varepsilon,i})_0 = 0$ . Отже,

$$\varepsilon^{-\sigma} |(q_\varepsilon u_\varepsilon, v_{\varepsilon,i})_0| \leq |(\rho u_\varepsilon, v_{\varepsilon,i})_0| \leq C.$$

Перепишемо цю нерівність у такому вигляді:

$$\varepsilon^{-1} \left| \int_{s_\varepsilon(a_i)} q_\varepsilon u_\varepsilon v_{\varepsilon,i} dx + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon, v_{\varepsilon,i}) \right| \leq C \varepsilon^{\sigma-1}, \quad (21)$$

де  $\beta_\varepsilon(u_\varepsilon, v_{\varepsilon,i}) = \sum_j \int_{s_\varepsilon(a_j)} q_\varepsilon u_\varepsilon v_{\varepsilon,i} dx$ . Тут сума береться за всіма внутрішніми вершинами, крім  $a_i$ . Врахувавши (9) і (20), матимемо  $|\beta_\varepsilon(u_\varepsilon, v_{\varepsilon,i})| \leq C \varepsilon^{1+\theta}$ . Комбінуючи цю нерівність з оцінками (8), (21), легко отримати, що  $|u_\varepsilon(a_i) v_{\varepsilon,i}(a_i)| \leq C \varepsilon^\theta$ . Згідно з лемою 4 величина  $|v_{\varepsilon,i}(a_i)|$  рівномірно відокремлена від нуля. Тому  $|u_\varepsilon(a_i)| \leq C \varepsilon^\theta$ , і остаточно

$$\max_{x \in s_\varepsilon(a_i)} |u_\varepsilon(x)| \leq C \varepsilon^\theta \quad (22)$$

на підставі нерівності (9). Зауважимо, що ця нерівність виконується для кожної внутрішньої вершини  $a_i \in J$ , бо у попередніх міркуваннях вершина була довільна.

Тепер з тотожності (4) маємо  $1 = \lambda_{n+1}^\varepsilon (\rho_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_0$ . Отже,

$$\begin{aligned} (\lambda_{n+1}^\varepsilon)^{-1} &\leq |(\rho u_\varepsilon, u_\varepsilon)_0| + \varepsilon^{-\sigma} |(q_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_0| \leq \\ &\leq C \|u_\varepsilon\|_0^2 + \varepsilon^{1-\sigma} \sum_{a \in J} m_a \max_{s_\varepsilon(a)} |u_\varepsilon|^2 \leq C_1 + C_2 \varepsilon^{1-\sigma+2\theta} \end{aligned}$$

згідно з оцінками (22). Для завершення доведення достатньо зауважити, що  $1 - \sigma + 2\theta \geq 0$  при  $\sigma \in (1, 2]$ , тобто величина  $(\lambda_{n+1}^\varepsilon)^{-1}$  є обмеженою при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Отже, всі власні значення  $\lambda_k^\varepsilon$  збуреної задачі (3), починаючи з номера  $n+1$ , рівномірно відокремлені від нуля. Саме вони становлять верхню частину спектра. Далі вивчимо поведінку власних функцій, які відповідають цій частині спектра. Характерною ознакою таких коливань є те, що великі маси, які концентруються у вузлах, роблять ці вузли асимптотично нерухомими.

**Лема 6.** *Нехай  $\sigma \in (1, 2]$  і  $k > n$ . Значення кожної власної функції  $u_{\varepsilon,k}$  у всіх внутрішніх вершинах прямує до нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . А саме,  $|u_{\varepsilon,k}(a)| \leq C_k \varepsilon^\theta$  для всіх  $a \in J$ .*

*Доведення.* Насправді все вже доведено в попередній лемі. Оцінки, які нам потрібні, отримано для функції  $u_{\varepsilon,n+1}$  (див. нерівності (22)). При доведенні ми використали лише факт, що ця власна функція ортогональна до перших  $n$  власних функцій. Тому його без жодних змін можна повторити для кожної  $u_{\varepsilon,k}$  з номером, більшим за  $n$ .

Отож, природно очікувати, що в граничній задачі, яка описуватиме асимптотику власних функцій верхньої частини спектра, виникнуть умови Діріхле у кожному вузлі, де збурюється густина маси. Розглянемо задачу на власні значення

$$\frac{d}{d\Gamma} u' + \mu \rho u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad u = 0 \quad \text{на } V, \quad (23)$$

де нагадаємо, що  $V$  – множина усіх вершин графа. В цій задачі треба вважати, що  $\partial\Gamma = V$ , тоді вона фактично стає сукупністю класичних задач Штурма-Ліувілля на ребрах графа  $\Gamma$

$$u''_\gamma(\tau) + \mu \rho_\gamma(\tau) u_\gamma(\tau) = 0, \quad \tau \in (0, d_\gamma), \quad u_\gamma(0) = u_\gamma(d_\gamma) = 0. \quad (24)$$

Хоча всі власні значення будь-якої із задач (24) є простими, спектр задачі (23) як диз'юнктне об'єднання спектрів задач (24) може бути кратним. Максимальна кратність власного значення не перевищує кількості ребер графа  $\Gamma$ .

Нехай  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots$  – власні значення задачі (23), занумеровані з врахуванням кратності. Введемо підпростір  $\mathcal{H} = \{u \in H^1(\Gamma) : u(a) = 0 \text{ для всіх } a \in V\}$  простору  $H_0^1(\Gamma)$ . Варіаційне формулювання задачі (23) є таким: знайти число  $\mu$  і функцію  $u \neq 0$  з класу  $\mathcal{H}$  такі, що

$$(u, \varphi)_1 = \mu(\rho u, \varphi)_0, \quad \varphi \in \mathcal{H}. \quad (25)$$

З нею асоційований самоспряжений компактний додатний оператор  $T_1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , дія якого визначається рівністю  $(T_1 u, \varphi)_1 = (\rho u, \varphi)_0$  для всіх  $\varphi \in \mathcal{H}$ .

Для функції  $u \in C^1(\Gamma)$  введемо такі позначення  $g_a(u) = \sum_{\gamma \in I(a)} \frac{du}{d\gamma}(a)$ ,  $a \in J$ . Доведемо одну технічну лему.

**Лема 7.** *Нехай  $\mu$  і  $v$  – власне значення і власна функція задачі (23), а  $\varphi$  – довільна функція з  $H_0^1(\Gamma)$ . Тоді*

$$(v, \varphi)_1 - \mu(\rho v, \varphi)_0 = \sum_{a \in J} g_a(v) \varphi(a), \quad (26)$$

$$\left| \varepsilon^{-2} \int_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon v \varphi dx \right| \leq C \|\varphi\|_1. \quad (27)$$

*Доведення.* Зауважимо таке: хоча ми трактуємо  $v$  як елемент  $H_0^1(\Gamma)$ , ця функція як розв'язок рівняння (24) є гладкою на кожному ребрі. Тому її похідні  $\frac{dv}{d\gamma}(a)$ , а тоді і величини  $g_a(v)$ , коректно визначені. Щоб отримати (26), треба помножити рівняння (23) на  $\varphi$  і проінтегрувати частинами за допомогою формули (5). Зрозуміло таке: коли  $\varphi$  належить підпростору  $\mathcal{H}$ , то (26) збігається з тотожністю (25).

Оскільки  $v(a) = 0$ , то виконується оцінка  $\max_{x \in s_\varepsilon(a)} |v(x)| \leq c\varepsilon$ . Тоді

$$\left| \varepsilon^{-2} \int_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon v \varphi dx \right| \leq \left( \varepsilon^{-1} \max_{x \in s_\varepsilon(a)} |v(x)| \right) \left( \varepsilon^{-1} \int_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon |\varphi| dx \right) \leq C \|\varphi\|_1$$

відповідно до (8).

**Лема 8.** *Нехай  $1 < \sigma < 2$ . Кожне власне значення  $\lambda_k^\varepsilon$ ,  $k > n$ , верхньої частини спектра має скінченну додатну границю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  і ця границя є власним значенням задачі (23).*

*Доведення.* Нехай  $\lambda^\varepsilon$  – власне значення верхньої частини спектра і  $\lambda^\varepsilon \rightarrow \mu$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Спочатку доведемо такий факт: якщо  $u_\varepsilon$  – відповідна послідовність нормованих власних функцій і  $u_\varepsilon \rightarrow u$  слабо в  $H_0^1(\Gamma)$ , то  $u$  є власною функцією задачі (23) з власним значенням  $\mu$ . Наразі покажемо, що гранична функція  $u$  відмінна від нуля. Використаємо тотожність (4)

$$(\rho u_\varepsilon, u_\varepsilon)_0 + \varepsilon^{-\sigma} (q_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_0 = \frac{1}{\lambda^\varepsilon}. \quad (28)$$

Для власних функцій верхньої частини спектра виконуються оцінки (22), тому

$$\varepsilon^{-\sigma}(q_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_0 \leq c\varepsilon^{1-\sigma} \sum_{a \in J} \max_{x \in s_\varepsilon(a)} |u_\varepsilon(x)|^2 \left( \varepsilon^{-1} \int_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon dx \right) \leq c\varepsilon^{1-\sigma+2\theta} \sum_{a \in J} m_a.$$

Крім того,  $1 - \sigma + 2\theta > 0$  для  $\sigma \in (1, 2)$ . Оскільки послідовність  $u_\varepsilon$  є збіжною в  $L_2(\Gamma)$ , то граничний перехід в (28) дає  $(\rho u, u)_0 = (\mu)^{-1} > 0$ . Отже, функція  $u$  є ненульовою.

Аналогічно можна довести, що  $\varepsilon^{-\sigma}(q_\varepsilon u_\varepsilon, \varphi) \rightarrow 0$  для довільної функції  $\varphi$  з підпростору  $\mathcal{H}$  і  $\sigma \in (1, 2)$ . Тому ще раз перейшовши до границі в (28), тепер вже для  $\varphi \in \mathcal{H}$ , отримуємо, що  $u$  задовольняє тотожність (25). Згідно з лемою 6 функція  $u$  належить  $\mathcal{H}$ , тому є власною функцією задачі (23) з власним значенням  $\mu$ .

Тепер припустимо, що деяке власне значення  $\lambda_k^\varepsilon$  не має границі при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\alpha = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k^\varepsilon < \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k^\varepsilon = \beta.$$

Оскільки  $\lambda_k^\varepsilon$  є неперервною функцією малого параметра, то для кожної точки  $\lambda$  з інтервалу  $[\alpha, \beta]$  знайдеться підпослідовність  $\{\lambda_{\varepsilon'}\} \subset \{\lambda_k^\varepsilon\}$  власних значень та відповідних власних функцій  $\{u_{\varepsilon'}\}$  таких, що  $\lambda_{\varepsilon'} \rightarrow \lambda$  та  $u_{\varepsilon'} \rightarrow u$ , де  $u \neq 0$ . Тоді згідно з доведеним, число  $\lambda$  є точкою спектра задачі (23). Отже, весь інтервал  $[\alpha, \beta]$  повинен міститися в цьому спектрі, що неможливо.

Нехай  $P_\mu$  – ортопроектор в  $H_0^1(\Gamma)$  на власний підпростір, що відповідає власному значенню  $\mu$  задачі (23), а  $P_\mu^\varepsilon$  – ортопроектор на підпростір, породжений власними функціями задачі (3), для яких власні значення  $\lambda^\varepsilon$  прямують до  $\mu$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Теорема 5.** *Нехай  $1 < \sigma < 2$ . Власні значення верхньої частини спектра задачі (3) збігаються при  $\varepsilon \rightarrow 0$  до власних значень задачі (23), ця збіжність є пономерною в тому сенсі, що*

$$|\lambda_k^\varepsilon - \mu_{k-n}| \leq c_k \varepsilon^\omega, \quad \omega = \min\{\sigma - 1, 2 - \sigma\} \quad (29)$$

для всіх  $k = n + 1, n + 2, \dots$ . Крім того, якщо  $\mu$  – власне значення задачі (23), то

$$\|P_\mu^\varepsilon - P_\mu\| \leq C_\mu \varepsilon^\omega, \quad (30)$$

а власні функції  $u_1, u_2, \dots$  цієї задачі можна вибрати так, що

$$\|u_{\varepsilon,k} - u_{k-n}\|_1 \leq L_k \varepsilon^\omega \quad (31)$$

для всіх  $k > n$ . Тут сталі  $c_k, C_\mu, L_k$  не залежать від  $\varepsilon$ .

*Доведення.* Для кожної вершини  $a \in J$  введемо функцію-зрізку  $\zeta_a \in C_0^\infty(\Gamma)$  таку, що при достатньо малому  $\varepsilon$  вона дорівнює одиниці на зірковому підграфі  $s_\varepsilon(a)$  і нулю поза деяким його оточенням. Причому цей оточення не містить жодної іншої вершини графа  $\Gamma$ , окрім  $a$ . Нехай  $\mu$  – власне значення задачі (23) з власною функцією  $v$ ,  $\|v\|_1 = 1$ . Для цієї пари побудуємо функцію на  $\Gamma$   $\psi(x) = \sum_{a \in J} \frac{g_a(v)}{\mu m_a} \zeta_a(x)$ , призначенням якої є відкоригувати власну функцію  $v$  так, щоб вона стала квазімодом для оператора  $A_\varepsilon$ . Розглянемо функцію  $w_\varepsilon = v + \varepsilon^{\sigma-1} \psi$  і покажемо, що пара  $(\mu^{-1}, w_\varepsilon)$  є квазімодом для

оператора  $A_\varepsilon$  з нев'язкою  $c\varepsilon^\omega$ . Зауважимо, що  $\|w_\varepsilon\|_1 = 1 + O(\varepsilon^{\sigma-1})$ . Для довільної функції  $\varphi \in H_0^1(\Gamma)$  маємо

$$(A_\varepsilon w_\varepsilon - \mu^{-1} w_\varepsilon, \varphi)_1 = (\rho w_\varepsilon, \varphi)_0 + \varepsilon^{-\sigma} (q_\varepsilon w_\varepsilon, \varphi)_0 - \mu^{-1} (w_\varepsilon, \varphi)_1 = [(\rho v, \varphi)_0 - \mu^{-1} (v, \varphi)_1 + \varepsilon^{-1} (q_\varepsilon \psi, \varphi)_0] + \varepsilon^{-\sigma} (q_\varepsilon v, \varphi)_0 + \varepsilon^{\sigma-1} [(\rho \psi, \varphi)_0 - \mu^{-1} (\psi, \varphi)_1]. \quad (32)$$

Далі скористаємося виглядом функцій  $\psi$  та  $\zeta_a$ . Тоді згідно з (10)  $\varepsilon^{-1} (q_\varepsilon \psi, \varphi)_0 = \frac{1}{\mu} \sum_{a \in J} g_a(v) \varphi(a) + \alpha_\varepsilon(\varphi)$ , де  $|\alpha_\varepsilon(\varphi)| \leq c_0 \sqrt{\varepsilon}$ . Врахувавши (26), отримаємо  $|\mu^{-1} (v, \varphi)_1 - (\rho v, \varphi)_0 - \varepsilon^{-1} (q_\varepsilon \psi, \varphi)_0| \leq c_1 \sqrt{\varepsilon} \|\varphi\|_1$ . Крім того, згідно з (27)  $|\varepsilon^{-\sigma} (q_\varepsilon v, \varphi)_0| \leq \varepsilon^{2-\sigma} \sum_{a \in J} |\varepsilon^{-2} \int_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon v \varphi dx| \leq c_2 \varepsilon^{2-\sigma} \|\varphi\|_1$ . Отже, остаточно з рівності (32) маємо

$$|(A_\varepsilon w_\varepsilon - \mu^{-1} w_\varepsilon, \varphi)_1| \leq (c_1 \sqrt{\varepsilon} + c_2 \varepsilon^{2-\sigma} + c_3 \varepsilon^{\sigma-1}) \|\varphi\|_1 \leq c \varepsilon^\omega \|\varphi\|_1,$$

тобто  $\|A_\varepsilon w_\varepsilon - \mu^{-1} w_\varepsilon\|_1 \leq c \varepsilon^\omega$ , а пара  $(\mu^{-1}, w_\varepsilon) \in$  квазімодулю для оператора  $A_\varepsilon$ .

Нехай тепер  $\mu \in$  власним значенням кратності  $r$ . Виберемо ортонормовану базу  $v_1, \dots, v_r$  в його власному підпросторі. Доведене стосується довільної власної функції  $v$ , тому  $(\nu^{-1}, v_1 + \varepsilon^{\sigma-1} \psi_1), \dots, (\nu^{-1}, v_r + \varepsilon^{\sigma-1} \psi_r)$  – ортогональна сім'я квазімодулю для оператора  $A_\varepsilon$  з нев'язкою  $c\varepsilon^\omega$ . Виберемо додатне число  $\alpha$  так, щоб інтервал  $\Delta = [\nu^{-1} - \alpha, \nu^{-1} + \alpha]$  не містив відмінних від  $\nu^{-1}$  точок спектра оператора  $T_1$ . Тепер звернувшись до леми 2, можна зробити два висновки. По-перше, для значень  $\varepsilon$  таких, що  $r c \varepsilon^\omega < \alpha$ , існує саме  $r$  (із врахуванням кратності) власних значень  $(\lambda_k^\varepsilon)^{-1}$  оператора  $A_\varepsilon$ , що лежать в інтервалі  $\Delta$ , а також  $|(\lambda_k^\varepsilon)^{-1} - \nu^{-1}| \leq c \varepsilon^\omega$ . Звідси, а також з леми 8 випливає пономерна збіжність  $\lambda_k^\varepsilon \rightarrow \nu_{k-n}$  та оцінки (29) для всіх  $k > n$ . По-друге,  $\|E_{A_\varepsilon}(\Delta) v_j - v_j\| \leq c \alpha^{-1} \varepsilon^\omega$  для  $j = 1, \dots, r$ , звідки випливає (30), а при належному виборі бази в просторі  $\mathcal{L}_0(\Gamma)$  також і пономерна збіжність власних функцій (31).

Отримані результати для нижньої та верхньої частин спектра можна поєднати так. Оскільки  $H_0^1(\Gamma) = \mathcal{L}_0(\Gamma) \oplus \mathcal{H}$ , то оператору  $A_\varepsilon$  можна поставити у відповідність матричний оператор  $\mathcal{A}_\varepsilon$ , який діє на цій прямій сумі

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11}^\varepsilon & A_{12}^\varepsilon \\ A_{21}^\varepsilon & A_{22}^\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Ми фактично довели, що  $\mathcal{A}_\varepsilon$  асимптотично близький до діагонального оператора

$$\mathcal{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^{1-\sigma} T_0 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix},$$

який хоча і залежить від  $\varepsilon$ , але ця залежність є конструктивною. Наприклад, для  $\sigma \in (1, 3/2]$  цю асимптотичну близькість треба розуміти так. Хоча обидві сім'ї операторів  $\mathcal{A}_\varepsilon$  та  $\mathcal{T}_\varepsilon$  не є рівномірно обмежені при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , проте це правильно для їхньої різниці, а саме  $\|\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{T}_\varepsilon\| \leq M$ . Для більших  $\sigma$  норма  $\|\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{T}_\varepsilon\|$  необмежено зростає при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , але порядок її росту дорівнює  $3/2 - \sigma$ , що менше від  $1 - \sigma$  – степеня зростання норм операторів  $\mathcal{A}_\varepsilon$  та  $\mathcal{T}_\varepsilon$ .



1. *Пожорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М., 2004.
2. *Oleinik O. A.* Homogenization problems in elasticity. Spectrum of singularly perturbed operators // Non-classical continuum mechanics. – 1987. – Lecture Notes series, 122. – Cambridge University Press. – P. 188-205.
3. *Олейник О. А.* О собственных колебаниях тел с концентрированными массами // Современные проблемы прикладной математики и математической физики. – М., 1988. – С. 101-128.
4. *Головатый Ю. Д., Назаров С. А., Олейник О. А., Соболева Т. С.* О собственных колебаниях струны с присоединенной массой // Сиб. мат. журн. – 1988. – Т. 29, №5. – С. 71-91.
5. *Головатый Ю. Д.* Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами // Труды Моск. мат. об-ва. – 1992. – Т. 54. – С. 29-72.
6. *Бабич Н. О., Головатый Ю. Д.* Спектральная задача Неймана для сингулярно збуреного дифференциального оператора четвертого порядка // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 51. – С. 118-127.
7. *Головатый Ю. Д., Головач І. А.* Про асимптотику глобальних власних коливань сильно неоднорідної струни // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 49. – С. 88-99.
8. *Бабич Н. О.* Коротковильова асимптотика глобальних коливань у задачі із локально збуреною густиною // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, №3. – С. 36-44.
9. *Mercier D., Régnier V.* Spectrum of a network of beams with interior point masses // Prepublications. Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications. – 2006. – 24p. ([www.univ-valenciennes.fr/lamav/preprints/lamav-06.13.pdf](http://www.univ-valenciennes.fr/lamav/preprints/lamav-06.13.pdf))
10. *Головатый Ю. Д., Назаров С. А., Олейник О. А.* Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. – 1990. – Т. 192. – С. 42-60.
11. *Nazarov S. A.* Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions // Math. Model. Numer. Anal. – 1993. – Vol. 27, №6. – P. 777-799.
12. *Mel'nyk T. A.* Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses // Math. Models Meth. Appl. Sci. – Vol. 11, №6. – 2001. – P. 1001-1029.
13. *Грабчак Г. Є.* Спектральна задача Неймана для системи рівнянь лінійної теорії пружності із сингулярним збуренням густини // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 45. – С. 124-140.
14. *Gómez D., Lobo M., Pérez M. E.* On a vibrating plate with concentrated mass // C. R. Acad. Sci. Paris. – 2000. – Vol. 328, Série II b. – P. 494-500.
15. *Golovaty Yu. D., Gomez D., Lobo M. and Perez E.* Asymptotics for the eigenelements of vibrating membranes with very heavy thin inclusions // C.R. Mecanique, 330 (11). – 2002. – P. 777-782.
16. *Golovaty Yu. D., Gomez D., Lobo M. and Perez E.* On vibrating membranes with very heavy thin inclusions, // Math. Models Meth. Appl. Sci. – Vol. 14, №7. – 2004. – P. 987-1034.
17. *Чечкин Г. А.* Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе “лёгких” концентрированных масс. Двумерный случай. // Известия РАН. – 2005. – Т. 69, №4. – С. 161-204.
18. *Lobo M., Pérez M. E.* Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review // C. R. Mecanique. – 2003. – Vol. 331 – P. 303-317.

19. Лазуткин В. Ф. Квазиклассическая асимптотика собственных функций. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)". – М., 1988. – С. 135-174.
20. Лазуткин В. Ф. Выпуклый бильярд и собственные функции оператора Лапласа. – Ленинград, 1981.
21. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М., 1990.
22. Вишик М. И., Люстерник А. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12, №5. – С. 3-122.
23. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М., 1986.
24. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. – М., 1984.

## ASYMPTOTICS OF SPECTRUM OF STURM-LIOUVILLE OPERATOR ON NETWORKS WITH PERTURBED DENSITY

Yurij GOLOVATY, Hennadij HRABCHAK

*Ivan Franko National University of L'viv,  
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1*

We study a singular perturbed boundary value problem for second order differential operator on a geometrical graph. A network of flexible strings connecting by heavy nodes is considered. We investigate the asymptotic behavior of eigenvalues and eigenspaces of the problem with perturbed mass density. The spectral properties of networks with very light, light and heavy bindings are described.

*Key words:* differential equations on graphs, singular perturbations, adjoint masses, spectrum, eigenvalues, asymptotic expansions

Стаття надійшла до редколегії 27.06.2007

Прийнята до друку 24.10.2007