ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.84-103 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.84-103*

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

Надія ГРИНЦІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

В області з вільними межами досліджено обернену задачу визначення старшого коефіцієнта в сильно виродженому повному параболічному рівнянні. Визначено умови існування та єдиності класичного розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: обернена задача, сильне степеневе виродження, вільні межі, параболічне рівняння.

Задача, яку досліджуємо, поєднує коефіцієнтну обернену задачу з виродженням та задачу з вільними межами. Кожен з цих типів задач досліджували раніше. В [1, 2] в області з відомими межами вивчали обернені задачі визначення старшого коефіцієнта в повному параболічному рівнянні в випадках слабкого і сильного степеневого виродження. Подібну обернену задачу без виродження в області з вільними межами розглядали в [3]. Випадок слабкого виродження для параболічного рівняння в області з вільною межею досліджено в [4]. Мета нашої праці – за допомогою теореми Шаудера визначити умови існування класичного розв'язку оберненої задачі визначення коефіцієнта при старшій похідній у повному параболічному рівнянні з сильним степеневим виродженням в області з вільними межами. Доведення єдиності розв'язку згаданої задачі ґрунтується на оцінках розв'язку деякого рівняння, що містить невідомі функції.

1. Формулювання задачі та основні результати. В області $\Omega_T = \{(x,t) : h_1(t) < x < h_2(t),\ 0 < t < T\}$, де $x = h_1(t)$ та $x = h_2(t)$ – невідомі функції, розглядається обернена задача визначення коефіцієнта $a(t) > 0, t \in [0,T]$ в рівнянні

$$u_t = a(t)t^{\beta}u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad h_1(0) \leqslant x \leqslant h_2(0) \tag{2}$$

та крайовими умовами

$$u(h_1(t),t) = \mu_1(t),\ u(h_2(t),t) = \mu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

де $h_1(0) = h_{10}$ та $\beta \geqslant 1$ – задані числа. Для визначення невідомого коефіцієнта та функцій, які задають межі області, задають додаткові так звані умови перевизначення вигляду

$$a(t)t^{\beta}u_x(h_1(t),t) = \mu_3(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} xu(x,t)dx = \mu_5(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{6}$$

Заміною змінних $y = \frac{x-h_1(t)}{h_2(t)-h_1(t)}$, $t = t$ задача (1)-(6) зводиться до оберненої стосовно невідомих $(a(t), h_1(t), h_3(t) = h_2(t) - h_1(t), v(y,t) = u(yh_3(t) + h_1(t),t))$ в області зі сталими межами $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(t)t^{\beta}}{h_3^2(t)}v_{yy} + \frac{b(yh_3(t) + h_1(t),t) + h_1'(t) + yh_3'(t)}{h_3(t)}v_y + c(yh_3(t) + h_1(t),t)v+$$

$$+f(yh_3(t) + h_1(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \tag{7}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh_3(0) + h_{10}), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{8}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t),\ v(1,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

$$\frac{a(t)t^{\beta}}{h_3(t)}v_y(0,t) = \mu_3(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{10}$$

$$h_3(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{11}$$

$$h_1(t)\mu_4(t) + h_3^2(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy = \mu_5(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{12}$$

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\varphi \in C^1[h_{10},+\infty)$, $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0$, $x \in [h_{10},+\infty)$, $\mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2,4,5,$ $\mu_i(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $i = 1,2,4$, $b, f \in C^{2,0}([h_{10},+\infty) \times [0,T])$, $c \in C^{1,0}([h_{10},+\infty) \times$ $\times [0,T])$, $f(x,t) \geqslant 0$, $c(x,t) \leqslant 0$, $(x,t) \in [h_{10},+\infty) \times [0,T]$;

2) $\mu_3 \in C[0,T], \mu_3(t) > 0, t \in (0,T]$, *та існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to+0}\mu_3(t)t^{-\frac{\beta+1}{2}} =$ $= A_0 > 0, -\mu_1'(t) > 0, t \in [0,T]$, $|\mu_5'(t)| \leqslant A_1 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, |\mu_4'(t)| \leqslant A_2 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $t \in [0,T]$, $|b(x,t)| \leqslant A_3 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $|b_x(x,t)| \leqslant A_4 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $|b_{xx}(x,t)| \leqslant A_5 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, |c(x,t)| \leqslant$

$\leqslant A_6 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $|c_x(x,t)| \leqslant A_7 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $|f(x,t)| \leqslant A_8 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $|f_x(x,t)| \leqslant A_9 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $(x,t) \in \in [h_{10}, +\infty) \times [0,T]$, *де* A_i, $i = \overline{0,9}$ *– деякі додатні сталі,* $\gamma > 0$ *– довільне фіксоване число;*

3) $\varphi(h_{10}) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_2(0)) = \mu_2(0)$.

Тоді можна зазначити таке число T_0, $0 < T_0 \leqslant T$, *яке визначається вихідними даними, що розв'язок* $(a, h_1, h_3, v) \in C[0,T_0] \times (C^1[0,T_0])^2 \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap (\overline{Q}_{T_0})$, $v_y(0,t) \in C(0,T_0]$, $a(t) > 0$, $h_3(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$ *задачі (7)-(12) існує і єдиний.*

2. Зведення задачі (7)-(12) до системи рівнянь. Визначимо початкове значення функції $x = h_2(t)$, яка задає невідому межу області. Згідно з умовами (2), (5) та припущеннями теореми існує єдине число $h_2(0) > h_{10}$, яке є розв'язком рівняння

$$\int_{h_{10}}^{h_2(0)} \varphi(x)dx = \mu_4(0).$$

Тому надалі різницю $h_{30} = h_2(0) - h_{10}$ вважатимемо відомою.

До розв'язку задачі (7)-(9) застосуємо принцип максимуму [5, с. 25]. Отримаємо оцінку знизу функції $v(y,t)$

$$v(y,t) \geqslant M_1 > 0, \ (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{13}$$

де стала M_1 залежить від вихідних даних задачі. Знайдена оцінка дає змогу оцінити функції $h_3(t)$, $h_1(t)$, враховуючи рівняння (11), (12)

$$h_3(t) \leqslant \frac{1}{M_1} \max_{[0,T]} \mu_4(t) \equiv H_1 < \infty, \quad t \in [0,T], \tag{14}$$

$$|\, h_1(t)| \leqslant \frac{\mu_5(t)}{\mu_4(t)} + \frac{\mu_4(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy} \equiv H_2, \quad t \in [0,T]. \tag{15}$$

Використовуючи знову принцип максимуму для розв'язку задачі (7)-(9), одержуємо

$$v(y,t) \leqslant M_2 < +\infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T \tag{16}$$

і згідно з (11)

$$h_3(t) \geqslant \frac{1}{M_2} \min_{[0,T]} \mu_4(t) \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{17}$$

Позначимо $q(t) = \frac{a(t)}{h_3^2(t)}$, $p(t) = h_1'(t)$, $r(t) = h_3'(t)$, $\omega(y,t) = v_y(y,t)$. Припустивши тимчасово, що функції $a(t), h_1(t), h_3(t)$ – відомі, пряму задачу (7)-(9) замінимо еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Big(\frac{b(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+p(\tau)+\eta r(\tau)}{h_3(\tau)}\omega(\eta,\tau)+$$

$$+c(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau, \qquad (y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{18}$$

$$\omega(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Big(\frac{b(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+p(\tau)+\eta r(\tau)}{h_3(\tau)}\omega(\eta,\tau)+$$

$$+c(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau, \qquad (y,t)\in Q_T, \tag{19}$$

де через $G_k(y,t,\eta,\tau), k=1,2$ позначено функції Гріна k-ї крайової задачі для рівняння

$$v_t = q(t)t^\beta v_{yy} + f(yh_3(t)+h_1(t),t). \tag{20}$$

Їх визначають формулою

$$G_k(y,t,\eta,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\exp\Big(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)+$$

$$+(-1)^k\exp\Big(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\Bigg), \quad k=1,2,$$

де $\theta(t) = \int_0^t q(\tau)\tau^\beta d\tau$. Розв'язок рівняння (20) з умовами (8), (9) позначено через $v_0(y,t)$ і він має вигляд

$$v_0(y,t) = \int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h_{30}+h_{10})d\eta + \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\,\tau^\beta q(\tau)\mu_1(\tau)\,d\tau -$$

$$-\int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\,\tau^\beta q(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)d\eta d\tau. \tag{21}$$

Продиференціюємо рівність (21) по y. Використовуючи властивості функції Гріна $G_{1y} = -G_{2\eta}$, $G_{2\tau} = -\tau^\beta q(\tau)G_{2\eta\eta}$ та інтегруючи частинами, знаходимо

$$\omega_0(y,t) = h_{30}\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_{30}+h_{10})d\eta + \int_0^t G_2(y,t,0,\tau)(f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau))\,d\tau+$$

$$+\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau))d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)\,h_3(\tau)f_x(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau. \tag{22}$$

З умов (10)-(12) отримуємо

$$q(t)t^{\beta}\omega(0,t)=\frac{\mu_3(t)}{h_3(t)},\quad t\in[0,T], \tag{23}$$

$$h_3(t)=\frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy},\quad t\in[0,T], \tag{24}$$

$$h_1(t)\mu_4(t)=\mu_5(t)-h_3^2(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy,\quad t\in[0,T]. \tag{25}$$

Продиференціюємо рівності (11), (12). Враховуючи рівняння (7), умови (8), (9) та використовуючи інтегрування частинами, одержуємо

$$p(t)\mu_1(t)=\frac{\mu_5'(t)}{h_3(t)}-\mu_4'(t)\left(\frac{h_1(t)}{h_3(t)}+1\right)-b(h_1(t),t)\mu_1(t)-h_3(t)q(t)t^{\beta}(\omega(0,t)+\mu_1(t)-$$
$$-\mu_2(t))+\int\limits_0^1 b(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)dy-h_3(t)\int\limits_0^1(1-y)\big((b_x(yh_3(t)+h_1(t),t)-$$
$$-c(yh_3(t)+h_1(t),t))v(y,t)-f(yh_3(t)+h_1(t),t)\big)dy,\ t\in[0,T], \tag{26}$$

$$p(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))+r(t)\mu_2(t)=\mu_4'(t)-h_3(t)q(t)t^{\beta}(\omega(1,t)-\omega(0,t))+b(h_1(t),t)\mu_1(t)-$$
$$-b(h_3(t)+h_1(t),t)\mu_2(t)+h_3(t)\int\limits_0^1\big((b_x(yh_3(t)+h_1(t),t)-c(yh_3(t)+h_1(t),t))v(y,t)-$$
$$-f(yh_3(t)+h_1(t),t)\big)dy,\quad t\in[0,T]. \tag{27}$$

Отже, задачу (7)-(12) зведено до системи рівнянь (18), (19), (23)-(27). Задача (7)-(12) та згадана система еквівалентні в такому сенсі: якщо $(a(t),\, h_1(t),\, h_3(t),\, v(y,t))$ є розв'язком задачі (7)-(12), то $q(t)=\frac{a(t)}{h_3^2(t)}$, $h_1(t), h_3(t), p(t)=h_1'(t), r(t)=h_3'(t), v(y,t),$ $\omega(y,t)=v_y(y,t))$ – неперервний розв'язок системи (18), (19), (23)-(27), і навпаки, якщо $(q(t),h_1(t),h_3(t),p(t),r(t),v(y,t),\omega(y,t))$ – неперервний розв'язок системи (18), (19), (23)-(27), то $a\in C[0,T]$, $h_1,h_3\in C^1[0,T]$, $v\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$, $v_y(0,t)\in C(0,T]$ є розв'язком задачі (7)-(12).

Справді, нехай $(q(t),h_1(t),h_3(t),p(t),r(t),v(y,t),\omega(y,t))$ – неперервний розв'язок системи рівнянь (18), (19), (23)-(27). Припущення теореми дають змогу продиференціювати рівність (18) по y. Порівнюючи праві частини отриманої рівності і рівності (19), одержуємо $\omega(y,t)=v_y(y,t)$, $(y,t)\in Q_T$. Крім того, $v_y(0,\cdot)\in C(0,T]$. Підставляючи в (18) замість $\omega(y,t)$ функцію $v_y(y,t)$, матимемо, що $v\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$, задовольняє рівняння

$$v_t=q(t)t^{\beta}v_{yy}+\frac{b(yh_3(t)+h_1(t),t)+p(t)+yr(t)}{h_3(t)}v_y+c(yh_3(t)+h_1(t),t)v+$$
$$+f(yh_3(t)+h_1(t),t) \tag{28}$$

та умови (8), (9).

Продиференціюємо рівності (24), (25), використовуючи рівняння (28) та умови (8), (9)

$$\frac{h_1'(t)\mu_4(t)}{h_3(t)} - h_3'(t)\left(\frac{\mu_4(t)}{h_3(t)} - 2\int_0^1 yv(y,t)dy\right) + p(t)\left(\mu_1(t) - \frac{\mu_4(t)}{h_3(t)}\right) + r(t)\left(\frac{\mu_4(t)}{h_3(t)} - \right.$$

$$\left. -2\int_0^1 yv(y,t)dy\right) = \frac{\mu_5'(t)}{h_3(t)} - \mu_4'(t)\left(\frac{h_1(t)}{h_3(t)} + 1\right) - b(h_1(t),t)\mu_1(t) - h_3(t)q(t)t^\beta(\omega(0,t) +$$

$$+\mu_1(t) - \mu_2(t)) + \int_0^1 b(yh_3(t) + h_1(t),t)v(y,t)dy - h_3(t)\int_0^1 (1-y)\big((b_x(yh_3(t) + h_1(t),t) -$$

$$-c(yh_3(t) + h_1(t),t))v(y,t) - f(yh_3(t) + h_1(t),t)\big), \quad t \in [0,T], \tag{29}$$

$$\frac{h_3'(t)\mu_4(t)}{h_3(t)} + p(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + r(t)\left(\mu_2(t) - \frac{\mu_4(t)}{h_3(t)}\right) = \mu_4'(t) - h_3(t)q(t)t^\beta(\omega(1,t) -$$

$$-\omega(0,t)) + b(h_1(t),t)\mu_1(t) - b(h_3(t) + h_1(t),t)\mu_2(t) + h_3(t)\int_0^1 \big((b_x(yh_3(t) + h_1(t),t) -$$

$$-c(yh_3(t) + h_1(t),t))v(y,t) - f(yh_3(t) + h_1(t),t)\big)dy, \quad t \in [0,T]. \tag{30}$$

Звідси, враховуючи припущення теореми, робимо висновок, що $h_1, h_3 \in C^1[0,T]$. Віднімемо від (30) рівність (27). Враховуючи, що $\omega(y,t) = v_y(y,t)$, отримуємо

$$\frac{\mu_4(t)}{h_3(t)}(r(t) - h_3'(t)) = 0,$$

звідки, використовуючи умови теореми, маємо $r(t) = h_3'(t)$. Віднявши тепер від (29) рівність (26), знаходимо $p(t) = h_1'(t)$. Підставляючи в (28) замість $r(t), p(t)$ знайдені значення, а замість $q(t)$ – дріб $\frac{a(t)}{h_3^2(t)}$, приходимо до рівняння (7). Після цього умови (23)-(25) еквівалентні відповідно (10)-(12), що й завершує доведення еквівалентності.

3. Доведення існування розв'язку задачі (7)-(12). Доведемо, що існує розв'язок системи рівнянь (18), (19), (23)-(27). Для цього використаємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Знайдемо апріорні оцінки розв'язків системи. З еквівалентності задачі (7)-(12) та системи рівнянь (18), (19), (23)-(27) випливає, що для функцій $h_1(t), h_3(t), v(y,t)$ правильні оцінки (13)-(17). Тому залишилось оцінити функції $p(t), r(t), q(t), \omega(y,t)$. Визначимо поведінку функції $\omega(y,t)$ при $t \to +0$. Позначимо $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} |\omega(y,t)|$, $h_{3min}(t) = \min\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} h_3(\tau)$, $h_{3max}(t) = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} h_3(\tau)$, $q_{min}(t) = \min\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} q(\tau)$, $q_{max}(t) = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} q(\tau)$. Враховуючи рівність

$$\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)d\eta = 1, \tag{31}$$

одержуємо, що перший і четвертий інтеграли з (22) обмежені сталими, які залежать від вихідних даних задачі (7)-(12)

$$\left|\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta\right| \leqslant C_1, \quad \left|\int\limits_0^1\int\limits_0^t G_2(y,t,\eta,\tau)h(\tau)f_\eta(\eta h(\tau),\tau)d\eta d\tau\right| \leqslant C_2. \quad (32)$$

Для оцінки двох інших доданків використаємо таку оцінку функції Гріна

$$G_2(y,t,\eta,\tau) \leqslant C_3 + \frac{C_4}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \quad (33)$$

Отримаємо

$$|\,\omega_0(y,t)\,| \leqslant C_5 + C_6\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \quad (34)$$

Враховуючи нерівність

$$\int\limits_0^1 |\,G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\,|\,d\eta \leqslant \frac{C_7}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \quad (35)$$

та припущення теореми, з рівняння (19) знаходимо

$$\begin{aligned} W(t) \quad &\leqslant \quad C_5 + C_6\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_8\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + \\ &+C_9\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} + |\,p(\tau)| + |\,r(\tau)|}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}W(\tau)d\tau, \quad (y,t)\in Q_T. \end{aligned} \quad (36)$$

Функції $p(t), r(t)$ оцінимо, використовуючи (26), (27). Враховуючи умови теореми, маємо

$$|\,p(t)\,| \leqslant C_{10}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} + C_{11}q(t)t^\beta + C_{12}q(t)t^\beta W(t), \quad t\in[0,T], \quad (37)$$

$$|\,r(t)\,| \leqslant C_{13}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} + C_{14}q(t)t^\beta + C_{15}q(t)t^\beta W(t), \quad t\in[0,T]. \quad (38)$$

Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leqslant \frac{C_{16}}{\sqrt{q_{min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \leqslant \frac{C_{17}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}}. \quad (39)$$

Підставляючи (37)–(39) у (36), одержимо

$$\begin{aligned} W(t) \quad &\leqslant \quad C_5 + \frac{C_{18}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}} + \frac{C_{19}t^\gamma}{\sqrt{q_{min}(t)}} + \frac{C_{20}}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau + \\ &+\frac{C_{21}q_{max}(t)}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{\tau^\beta W(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau + \frac{C_{22}q_{max}(t)}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{\tau^\beta W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau, \end{aligned} \quad (40)$$

звідки робимо висновок, що $\omega(y,t)$ поводить себе як $\dfrac{C_{23}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}$ при $t \to +0$.

Для того, щоб оцінити $q(t)$ зверху, оцінимо $\omega(0,t)$ знизу, враховуючи (19), (22). Оскільки $G_2(0,t,1,\tau) \leqslant C_{24}$, то, враховуючи (32), (35), знаходимо

$$\omega(0,t) \geqslant \int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(p_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau - C_{25} - C_{26}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau -$$

$$-C_{27}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} + |\,p(\tau)| + |\,r(t)|}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}W(\tau)d\tau, \quad t\in(0,T]. \tag{41}$$

Оцінимо перший інтеграл з останньої нерівності, використовуючи зображення функції Гріна

$$\int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\right)d\tau \geqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau.$$

Використовуючи нерівності (37), (38) та поведінку функції $\omega(y,t)$ при $t\to+0$, робимо висновок, що особливості двох інших інтегралів з (41) є меншими за особливість першого. Тому для довільного фіксованого r: $0<r<1$ існує таке число t_1: $0<t_1\leqslant T$, що

$$C_{25} + C_{26}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{27}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} + |\,p(\tau)| + |\,r(\tau)|}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}W(\tau)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau, \quad t\in[0,t_1].$$

Тоді з (41) отримуємо

$$\omega(0,t) \geqslant \frac{1-r}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau, \quad t\in(0,t_1]. \tag{42}$$

Підставивши (42) в (23), одержимо

$$q(t) \leqslant \frac{\mu_3(t)}{\dfrac{1-r}{\sqrt{\pi}}\; t^\beta h_3(t) \displaystyle\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)\sqrt{q_{max}(t)}}{(1-r)\sqrt{1+\beta}\; t^\beta h_{3min}(t) \displaystyle\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau}, \quad t\in[0,t_1]. \quad (43)$$

Введемо позначення

$$K(t) \equiv \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{\sqrt{1+\beta}\; t^\beta \displaystyle\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau}. \quad (44)$$

Згідно з умовами теореми $K(t)$ неперервна та додатна на $(0,T]$. Використовуючи теорему про середнє та заміну змінних $z=\tau/t$, доведемо існування границі

$$\lim_{t\to+0} K(t) = \lim_{t\to+0} \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{\sqrt{1+\beta}t^\beta(f(h_1(\widetilde{t}),\widetilde{t})-\mu_1'(\widetilde{t})) \displaystyle\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{1+\beta}-\tau^{1+\beta}}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{1+\beta}}\frac{A_0}{(f(h_{10},0)-\mu_1'(0))I_1} > 0,$$

де $\widetilde{t}\in[0,T]$, $I_1 = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}}$.

Враховуючи (44), з (43) матимемо

$$q(t) \leqslant \frac{K(t)}{(1-r)h_{3min}(t)}\sqrt{q_{max}(t)}, \quad \text{або} \quad q_{max}(t) \leqslant \frac{K^2_{max}(t)}{(1-r)^2 h^2_{3min}(t)}, \quad (45)$$

де $K_{max}(t) = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} K(\tau)$. Остаточно отримуємо

$$q(t) \leqslant B_1, \quad \text{де} \quad B_1 = \frac{K^2_{max}(T)}{(1-r)^2 h^2_{3min}(T)}, \quad t\in[0,t_1]. \quad (46)$$

Оцінимо $\omega(0,t)$ зверху. Згідно з (19), (22) маємо

$$\omega(0,t) \leqslant C_{28} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{29}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau +$$

$$+C_{30}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+|\,p(\tau)|+|\,r(\tau)|}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}W(\tau)d\tau.$$

Підставимо останню нерівність в (23). Використовуючи (37)-(38), (46), одержимо

$$q(t)\geqslant\frac{K(t)\sqrt{q_{min}(t)}}{h_{3max}(t)}\Bigg(C_{31}t^{\frac{\beta-1}{2}}+1+C_{32}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+C_{33}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau+C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}}\times$$

$$\times\int\limits_0^t\frac{\tau^{\beta}W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau+C_{35}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\frac{\tau^{\beta}W^2(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau\Bigg)^{-1}\geqslant\frac{K(t)\sqrt{q_{min}(t)}}{(1+r)h_{3max}(t)},\qquad(47)$$

$t\in[0,t_2]$, де число $t_2:0<t_2\leqslant T$ таке, що правильна нерівність

$$C_{31}t^{\frac{\beta-1}{2}}+C_{32}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+C_{33}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau+C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\frac{\tau^{\beta}W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau+$$

$$+C_{35}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\frac{\tau^{\beta}W^2(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau\leqslant C_{31}t^{\frac{\beta-1}{2}}+C_{32}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+C_{36}t^{\gamma}+C_{37}t^{\frac{\beta+1}{2}}+C_{38}t\leqslant r,$$

при $t\in[0,t_2]$. Тоді

$$q_{min}(t)\geqslant\frac{K^2_{min}(t)}{(1+r)^2h^2_{3max}(t)},\quad \text{або}\quad q(t)\geqslant B_0,\quad t\in[0,t_2],\qquad(48)$$

де $K_{min}(t)=\min\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}K(\tau)$, $B_0=\dfrac{K^2_{min}(T)}{(1+r)^2h^2_{3max}(T)}>0$.

Враховуючи (46), (48), з (40) знаходимо

$$W(t)\leqslant C_5+\frac{C_{39}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}+C_{40}t^{\gamma}+\frac{C_{41}}{t^{\frac{\beta}{2}}}\int\limits_0^t\frac{(\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+\tau^{\beta})W(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+\frac{C_{42}}{t^{\frac{\beta}{2}}}\int\limits_0^t\frac{\tau^{\beta}W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.\quad(49)$$

Домножимо обидві частини нерівності (49) на $t^{\frac{\beta-1}{2}}$ і приймемо $W_1(t)=W(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}$. Отримаємо

$$W_1(t)=C_{43}t^{\frac{\beta-1}{2}}+C_{44}+C_{45}t^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^t\frac{(\tau^{\gamma}+\tau^{\frac{\beta+1}{2}})W_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+C_{46}t^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^t\frac{\tau W_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.\quad(50)$$

Нехай $\gamma\leqslant 1$. Тоді з (50) матимемо

$$W_1(t)=C_{47}+C_{48}t^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^t\frac{\tau^{\gamma}(W_1(\tau)+1)^2}{\sqrt{t-\tau}}d\tau,$$

або, позначивши $W_2(t) = W_1(t) + 1$,

$$W_2(t) \leqslant C_{49} + \frac{C_{48}}{\sqrt{t}} \int\limits_0^t \frac{\tau^\gamma W_2^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \qquad (51)$$

Піднесемо обидві частини (51) до квадрата, використовуючи нерівності Коші та Коші – Буняковського

$$W_2^2(t) \leqslant 2C_{49}^2 + 2C_{48}^2 t^{\gamma+\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma-1} W_2^4(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

В останній нерівності змінимо t на σ і, домноживши на $\frac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$, проінтегруємо її по σ від 0 до t

$$\int\limits_0^t \frac{W_2^2(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}} d\sigma \leqslant C_{50}\sqrt{t} + C_{51} t^{\gamma+\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \tau^{\gamma-1} W_2^4(\tau) d\tau.$$

Використовуючи останню нерівність в (51), одержимо

$$W_2(t) \leqslant C_{52} + C_{53} \int\limits_0^t \frac{W_2^4(\tau)}{\tau^{1-\gamma}} d\tau. \qquad (52)$$

Позначимо

$$\chi(t) = C_{52} + C_{53} \int\limits_0^t \frac{W_2^4(\tau)}{\tau^{1-\gamma}} d\tau. \qquad (53)$$

Тоді з (52) отримаємо $W_2(t) \leqslant \chi(t)$. Продиференціювавши (53) і використавши останню нерівність, знаходимо

$$\chi'(t) \leqslant \frac{C_{53}}{t^{1-\gamma}} \chi^4(t),$$

звідки

$$\chi(t) \leqslant \frac{C_{52}\sqrt[3]{\gamma}}{\sqrt[3]{\gamma - 3C_{52}^3 C_{53} t^\gamma}}.$$

Вибираючи число $t_3, 0 < t_3 \leqslant T$ так, щоб $\gamma - 3C_{52}^3 C_{53} t_3^\gamma > 0$, матимемо $\chi(t) \leqslant M_3$, або $W_2(t) \leqslant M_3$, $t \in [0, t_3]$. У випадку $\gamma > 1$ нерівність (50) зводиться до вигляду

$$W_2(t) \leqslant C_{54} + C_{55} \int\limits_0^t \frac{W_2^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau,$$

звідки, застосовуючи ті самі міркування, що й при розв'язанні (51), знаходимо $W_2(t) \leqslant M_4$, $t \in [0, t_4]$, де число $t_4, 0 < t_4 \leqslant T$ визначається сталими C_{54}, C_{55}. Отже,

$$|\,\omega(y,t)| \leqslant \frac{M_5}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}, \quad (y,t) \in [0,1] \times (0, t_5], \qquad (54)$$

де $M_5 = \max\{M_3, M_4\}$, $t_5 = \min\{t_3, t_4\}$. Підставляючи (46), (54) в (37), (38), одержимо

$$|\,p(t)| \leqslant M_6 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, \quad |\,r(t)| \leqslant M_7 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, \quad t \in [0, t_5]. \tag{55}$$

Зауважимо, що згідно з (42) і (48)

$$\omega(0,t) \geqslant \frac{M_8}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}, \quad t \in (0, t_5]. \tag{56}$$

Отже, знайдено апріорні оцінки розв'язків системи (18), (19), (23)-(27). Введемо нову функцію $\widetilde{\omega}(y,t) = \omega(y,t)t^{\frac{\beta-1}{2}}$ і подамо систему (18), (19), (23)-(27) у вигляді

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Big(c(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau) v(\eta,\tau) + $$
$$+ \frac{b(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau) + p(\tau) + \eta r(\tau)}{h_3(\tau)} \frac{\widetilde{\omega}(\eta,\tau)}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}}\Big) d\eta d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{57}$$

$$\widetilde{\omega}(y,t) = \omega_0(y,t)t^{\frac{\beta-1}{2}} + t^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Big(c(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau) v(\eta,\tau) +$$
$$+ \frac{b(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau) + p(\tau) + \eta r(\tau)}{h_3(\tau)} \frac{\widetilde{\omega}(\eta,\tau)}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}}\Big) d\eta d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{58}$$

$$q(t) = \frac{\mu_3(t)}{t^{\frac{\beta+1}{2}} \widetilde{\omega}(0,t) h_3(t)}, \quad t \in [0, t_0], \tag{59}$$

$$h_3(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}, \quad t \in [0, t_0], \tag{60}$$

$$h_1(t)=\left(\mu_5(t)-h_3^2(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy\right)\mu_4^{-1}(t),\quad t\in[0,t_0],\tag{61}$$

$$p(t)=\left(\frac{\mu_5'(t)}{h_3(t)}-\mu_4'(t)\left(\frac{h_1(t)}{h_3(t)}+1\right)-b(h_1(t),t)\mu_1(t)-h_3(t)q(t)(\widetilde{\omega}(0,t)t^{\frac{\beta+1}{2}}+t^{\beta}(\mu_1(t)-\right.$$
$$-\mu_2(t)))+\int\limits_0^1 b(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)dy-h_3(t)\int\limits_0^1(1-y)\big((b_x(yh_3(t)+h_1(t),t)-$$
$$\left.-c(yh_3(t)+h_1(t),t))v(y,t)-f(yh_3(t)+h_1(t),t)\big)dy\right)\mu_1^{-1}(t),\quad t\in[0,t_0],\tag{62}$$

$$r(t)=\left(\mu_4'(t)-p(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))-h_3(t)q(t)t^{\frac{\beta+1}{2}}(\widetilde{\omega}(1,t)-\widetilde{\omega}(0,t))+b(h_1(t),t)\mu_1(t)-\right.$$
$$-b(h_3(t)+h_1(t),t)\mu_2(t)+h_3(t)\int\limits_0^1\big((b_x(yh_3(t)+h_1(t),t)-c(yh_3(t)+h_1(t),t))v(y,t)-$$
$$\left.-f(yh_3(t)+h_1(t),t)\big)dy\right)\mu_2^{-1}(t),\quad t\in[0,t_0],\tag{63}$$

де $v_0(y,t),\omega_0(y,t)$ визначаються формулами (21), (22), а $t_0=\min\{t_i,\, i=\overline{1,5}\}$. Систему (57)-(63) подамо у вигляді операторного рівняння

$$w=Pw,$$

де $w=(q,h_1,h_3,p,r,v,\widetilde{\omega})$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (57)-(63). Через N позначимо множину $N=\{(q,h_1,h_3,p,r,v,\widetilde{\omega})\in(C[0,t_0])^3\times\times(C(\overline{Q}_{t_0}))^2 : B_0\leqslant q(t)\leqslant B_1,\ |h_1(t)|\leqslant H_2,\ H_0\leqslant h_3(t)\leqslant H_1,\ |p(t)|\leqslant M_6t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma},\ |r(t)|\leqslant M_7t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma},\ M_1\leqslant v(y,t)\leqslant M_2,\ |\widetilde{\omega}(y,t)|\leqslant M_5,\ \widetilde{\omega}(0,t)\geqslant M_8>0\}$. Згадані оцінки дають право стверджувати, що множина N – замкнена й опукла, а оператор P переводить її в себе. Те, що оператор P цілком неперервний, доводиться як в [2], [6]. Тоді згідно з теоремою Шаудера існує розв'язок системи рівнянь (18), (19), (23)-(27), а отже, і розв'язок задачі (7)-(12) при $(y,t)\in[0,1]\times[0,t_0]$.

4. Доведення єдиності розв'язку задачі (7)-(12). На підставі еквівалентності задачі (7)-(12) та системи рівнянь (18), (19), (23)-(27), доведемо єдиність розв'язку згаданої системи. Припустимо, що існує два розв'язки ($q_i(t)$, $h_{1i}(t)$, $h_{3i}(t)$, $p_i(t)$, $r_i(t)$, $v_i(y,t)$, $\omega_i(y,t)$), $i=1,2$, системи рівнянь (18), (19), (23)-(27). Позначимо $q(t)=q_1(t)-q_2(t)$, $h_1(t)=h_{11}(t)-h_{12}(t)$, $h_3(t)=h_{31}(t)-h_{32}(t)$, $p(t)=p_1(t)-p_2(t)$, $r(t)=r_1(t)-r_2(t)$, $v(y,t)=v_1(y,t)-v_2(y,t)$,

$\omega(y,t) = \omega_1(y,t) - \omega_2(y,t)$. Зазначені різниці задовольняють таку систему рівнянь

$$v(y,t) = v_0^*(y,t) + \int_0^t \int_0^1 (G_1^{(1)}(y,t,\eta,\tau) - G_1^{(2)}(y,t,\eta,\tau)) \Big(c(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) v_1(\eta,\tau) +$$
$$+ \frac{b(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) + p_1(\tau) + \eta r_1(\tau)}{h_{31}(\tau)} \omega_1(\eta,\tau) \Big) d\eta d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_1^{(2)}(y,t,\eta,\tau) \times$$
$$\times \Bigg(\Bigg(\frac{p(\tau)}{h_{31}(\tau)} + \frac{\eta r(\tau)}{h_{31}(\tau)} + \frac{b(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) - b(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)}{h_{31}(\tau)} \Bigg) \omega_1(\eta,\tau) -$$
$$- \frac{h_3(\tau)}{h_{31}(\tau) h_{32}(\tau)} b(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau) \omega_1(\eta,\tau) + \frac{b(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau) + p_2(\tau) + \eta r_2(\tau)}{h_{32}(\tau)} \times$$
$$\times \omega(\eta,\tau) + (c(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) - c(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)) v_1(\eta,\tau) +$$
$$+ c(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau) v(\eta,\tau) \Bigg) d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{64}$$

$$\omega(y,t) = \omega_0^*(y,t) + \int_0^t \int_0^1 (G_{1y}^{(1)}(y,t,\eta,\tau) - G_{1y}^{(2)}(y,t,\eta,\tau)) \Big(c(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) \times$$
$$\times v_1(\eta,\tau) + \frac{b(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) + p_1(\tau) + \eta r_1(\tau)}{h_{31}(\tau)} \omega_1(\eta,\tau) \Big) d\eta d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 G_{1y}^{(2)}(y,t,\eta,\tau) \Bigg(\Bigg(\frac{\eta r(\tau)}{h_{31}(\tau)} + \frac{b(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) - b(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)}{h_{31}(\tau)} +$$
$$+ \frac{p(\tau)}{h_{31}(\tau)} \Bigg) \omega_1(\eta,\tau) - \frac{h_3(\tau)}{h_{31}(\tau) h_{32}(\tau)} b(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau) \omega_1(\eta,\tau) +$$
$$+ \frac{b(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau) + p_2(\tau) + \eta r_2(\tau)}{h_{32}(\tau)} \omega(\eta,\tau) + (c(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) -$$
$$- c(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)) v_1(\eta,\tau) + c(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau) v(\eta,\tau) \Bigg) d\eta d\tau, (y,t) \in Q_T, \tag{65}$$

$$q(t) = -\frac{h_3(t) q_1(t)}{h_{32}(t)} - \frac{t^\beta q_1(t) q_2(t) h_{31}(t)}{\mu_3(t)} \omega(0,t), \quad t \in [0,T], \tag{66}$$

$$h_3(t) = \frac{h_{31}(t) h_{32}(t)}{\mu_4(t)} \int_0^1 v(y,t) dy, \quad t \in [0,T], \tag{67}$$

$$h_1(t)\mu_4(t) = h_3(t)(h_{31}(t) + h_{32}(t)) \int_0^1 y v_1(y,t) dy + h_{32}^2(t) \int_0^1 y v(y,t) dy, \quad t \in [0,T], \tag{68}$$

$$p(t)\mu_1(t) = -\frac{\mu_5'(t)h_3(t)}{h_{31}(t)h_{32}(t)} - \mu_4'(t)\left(\frac{h_1(t)}{h_{31}(t)} + \frac{h_{12}(t)h_3(t)}{h_{31}(t)h_{32}(t)}\right) - t^\beta\big((h_3(t)q_1(t)+$$
$$+h_{32}(t)q(t))\omega_1(0,t) + h_{32}(t)q_2(t)\omega(0,t) + (h_3(t)q_1(t) + h_{32}(t)q(t))(\mu_1(t) - \mu_2(t))\big)-$$
$$-(b(h_{11}(t),t) - b(h_{12}(t),t))\mu_1(t) + \int\limits_0^1 \big((b(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - b(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))\times$$
$$\times v_1(y,t) + v(y,t)b(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)\big)dy - h_3(t)\int\limits_0^1 (1-y)\big((b_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)-$$
$$-c(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t))v_1(y,t) - f(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)\big)dy - h_{32}(t)\int\limits_0^1 (1-y)\times$$
$$\times\Big(\big((b_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - b_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)) - (c(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)-$$
$$-c(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))\big)v_1(y,t) + (b_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t) - c(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))\times$$
$$\times v(y,t) - (f(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))\Big)dy, \quad t \in [0,T], \tag{69}$$

$$p(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + r(t)\mu_2(t) = -(h_3(t)q_1(t) + h_{32}(t)q(t))t^\beta(\omega_1(1,t) - \omega_1(0,t))-$$
$$-h_{32}(t)q_2(t)t^\beta(\omega(1,t) - \omega(0,t)) + (b(h_{11}(t),t) - b(h_{12}(t),t))\mu_1(t)-$$
$$-(b(h_{31}(t) + h_{11}(t),t) - b(h_{32}(t) + h_{12}(t),t))\mu_2(t) + h_3(t)\int\limits_0^1 \big((b_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)-$$
$$-c(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t))v_1(y,t) - f(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)\big)dy + h_{32}(t)\int\limits_0^1 \Big(v_1(y,t)\times$$
$$\times\big((b_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - b_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)) - (c(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)-$$
$$-c(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))\big) + (b_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t) - c(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))v(y,t)-$$
$$-(f(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))\Big)dy, \quad t \in [0,T], \tag{70}$$

де $v_0^*(y,t) = v_{01}(y,t) - v_{02}(y,t)$, $\omega_0^*(y,t) = \omega_{01}(y,t) - \omega_{02}(y,t)$, $v_{0i}(y,t)$, $\omega_{0i}(y,t)$, $i = 1,2$, визначаються рівностями (21), (22), $G_i^{(j)}(y,t,\eta,\tau)$, $i,j = 1,2$, – функції Гріна i-ї крайової задачі для рівняння

$$v_{jt} = q_j(t)t^\beta v_{jyy} + f(yh_{3j}(t) + h_{1j}(t),t).$$

Припущення теореми забезпечують правильність рівності

$$b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)=(y(h_{31}(t)-h_{32}(t))+(h_{11}(t)-h_{12}(t)))\times$$
$$\times\int\limits_0^1 b_x(y(h_{32}(t)+\sigma(h_{31}(t)-h_{32}(t))+h_{12}(t)+\sigma(h_{11}(t)-h_{12}(t))),t)d\sigma, \qquad (71)$$

що правильна для функцій $b_x(yh_3(t)+h_1(t),t), c(yh_3(t)+h_1(t),t), f(yh_3(t)+h_1(t),t)$.

Оцінимо функцію $q(t)$, використовуючи рівняння (66). Позначимо $V(t) = \max\limits_{y\in[0,1]}|v(y,t)|$, $W(t)=\max\limits_{y\in[0,1]}|\omega(y,t)|$; $\widetilde{q}_{max}(t)=\max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}|\,q(\tau)|$, $\widetilde{h}_{3max}(t)=\max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}|\,h_3(\tau)|$.

Оскільки $q_i(t), i=1,2$ розв'язки системи (18), (19), (23)-(27), то для них справджуються оцінки (45). Тоді з (66) отримуємо

$$\widetilde{q}_{max}(t)\leqslant\frac{t^\beta K^4_{max}(t)h_{32max}(t)}{(1-r)^4h^2_{31min}(t)h^2_{32min}(t)\mu_3(t)}|\omega(0,t)|+C_{56}\widetilde{h}_{3max}(t). \qquad (72)$$

Спочатку оцінимо величини $|v(y,t)|$, $|\omega(y,t)|$, $|p(t)|$, $|r(t)|$, $|h_1(t)|$, від яких залежать оцінки $|\omega(0,t)|$ та $h_{3max}(t)$. Розглянемо деякі з доданків, які входять до $v_0^*(y,t)$, $\omega_0^*(y,t)$. Використовуючи припущення теореми та оцінки (31), (33), знаходимо

$$|Q_1|=\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^1(G_1^{(1)}(y,t,\eta,\tau)-G_1^{(2)}(y,t,\eta,\tau))f(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)d\eta d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{57}t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma}\widetilde{q}_{max}(t), \qquad (73)$$

$$|Q_2|=\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^1(G_1^{(2)}(y,t,0,\tau)(f(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-f(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau))d\eta d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{58}t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma}(\widetilde{h}_{3max}(t)+|h_1(t)|),$$

$$|R_1|=\left|\int\limits_0^t(G_2^{(2)}(y,t,0,\tau)(f(h_{11}(\tau),\tau)-f(h_{12}(\tau),\tau))d\tau\right|\leqslant C_{59}t^\gamma|h_1(t)|,$$

$$|R_2|=\left|\int\limits_0^t(G_2^{(2)}(y,t,0,\tau)(f(h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-f(h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau))d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{60}t^\gamma(\widetilde{h}_{3max}(t)+|h_1(t)|),$$

$$|R_3|=\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^1(G_2^{(2)}(y,t,\eta,\tau)h_{32}(\tau)(f_x(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-f_x(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau))d\eta d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{61}t(\widetilde{h}_{3max}(t)+|h_1(t)|).$$

Всі інші доданки оцінюють як в [2]. У результаті отримаємо

$$|v_0^*(y,t)| \leqslant C_{62}\widetilde{q}_{max}(t) + C_{63}t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma}(\widetilde{h}_{3max}(t) + |h_1(t)|), \quad t\in[0,T], \tag{74}$$

$$|\omega_0^*(y,t)| \leqslant \frac{C_{64}\widetilde{q}_{max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + C_{65}t^{\gamma}(\widetilde{h}_{3max}(t) + |h_1(t)|), \quad t\in(0,T]. \tag{75}$$

Для оцінки $h_3(t)$ підставимо (64) в (67).

Розглянемо доданок $S_1 = \int_0^1 dy \int_0^1 (G_1^{(1)}(y,t,\eta,0) - G_1^{(2)}(y,t,\eta,0))\varphi(\eta h_{30} + h_{10})d\eta$. Змінивши порядок інтегрування та використавши рівність

$$\int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)d\eta = 1 - \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\tau^\beta q(\tau)d\tau + \int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\tau^\beta q(\tau)d\tau,$$

одержимо

$$S_1 = \int_0^1 \varphi(\eta h_{30}+h_{10})\Big(-\int_0^t \big(G_{1y}^{(1)}(\eta,t,0,\tau) - G_{1y}^{(2)}(\eta,t,0,\tau)\big)\tau^\beta q_1(\tau)d\tau -$$
$$-\int_0^t G_{1y}^{(2)}(\eta,t,0,\tau)\tau^\beta q(\tau)d\tau + \int_0^t \big(G_{1y}^{(1)}(\eta,t,1,\tau) - G_{1y}^{(2)}(\eta,t,1,\tau)\big)\tau^\beta q_1(\tau)d\tau +$$
$$+\int_0^t G_{1y}^{(2)}(\eta,t,1,\tau)\tau^\beta q(\tau)d\tau\Big)d\eta = \sum_{i=1}^4 S_{1,i}.$$

Оскільки $G_{1y}(\eta,t,y,\tau) = -G_{2\eta}(\eta,t,y,\tau)$, то для $S_{1,1}$ маємо

$$S_{1,1} = \int_0^t \tau^\beta q_1(\tau)d\tau \int_0^1 \big(G_{2\eta}^{(1)}(\eta,t,0,\tau) - G_{2\eta}^{(2)}(\eta,t,0,\tau)\big)\varphi(\eta h_{30}+h_{10})d\eta =$$
$$= \int_0^t \tau^\beta q_1(\tau)\Big((G_2^{(1)}(1,t,0,\tau) - G_2^{(2)}(1,t,0,\tau))\varphi(h_{30}+h_{10}) - (G_2^{(1)}(0,t,0,\tau) - G_2^{(2)}(0,t,0,\tau))\times$$
$$\times\varphi(h_{10}) - h_{30}\int_0^1 (G_2^{(1)}(\eta,t,0,\tau) - G_2^{(2)}(\eta,t,0,\tau))\varphi'(\eta h_{30}+h_{10})d\eta\Big)d\tau,$$

звідки знаходимо $|S_{1,1}| \leqslant C_{66}t^{\frac{\beta+1}{2}}\widetilde{q}_{max}(t)$. Оцінюючи всі інші доданки подібно, з (67) отримуємо

$$\widetilde{h}_{3max}(t) \leqslant C_{67}t^\gamma \widetilde{q}_{max}(t) + C_{68}t^{\gamma+1}(\widetilde{h}_{3max}(t) + |h_1(t)|) + \frac{C_{69}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}(|p(t)| + |r(t)|) +$$
$$+C_{70}t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma}W(t) + C_{71}t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma}V(t). \tag{76}$$

З рівностей (68)-(70) знаходимо

$$|h_1(t)| \leqslant C_{72}\widetilde{h}_{3max}(t) + C_{73}V(t), \tag{77}$$

$$|p(t)| \leqslant C_{74}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}\widetilde{q}_{max}(t) + C_{75}t^{\gamma}(|p(t)|+|r(t)|) + C_{76}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}V(t) + C_{77}t^{\beta}W(t), \tag{78}$$

$$|r(t)| \leqslant C_{78}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}\widetilde{q}_{max}(t) + C_{79}t^{\gamma}(|p(t)|+|r(t)|) + C_{80}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}V(t) + C_{81}t^{\beta}W(t). \tag{79}$$

Враховуючи (74), (75), із (64), (65) одержуємо

$$V(t) \leqslant C_{82}\widetilde{q}_{max}(t) + C_{83}t^{\gamma}(\widetilde{h}_{3max}(t) + |h_1(t)|)+$$
$$+C_{84}\int\limits_0^t \left(\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}(V(\tau)+W(\tau)) + \frac{|p(\tau)|+|r(\tau)|}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}}\right)d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{80}$$

$$W(t) \leqslant \frac{C_{85}\widetilde{q}_{max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + \frac{C_{86}(\widetilde{h}_{3max}(t)+|h_1(t)|)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}+$$
$$+\frac{C_{87}}{t^{\frac{\beta}{2}}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}V(\tau) + \tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau) + \dfrac{|p(\tau)|+|r(\tau)|}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau, \quad t \in (0,T]. \tag{81}$$

Розв'язуючи систему нерівностей (76)-(81), знаходимо

$$V(t) \leqslant C_{88}\widetilde{q}_{max}(t),\ t \in [0,t_4],\ W(t) \leqslant \frac{C_{89}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}\widetilde{q}_{max}(t), \quad t \in (0,t_6], \tag{82}$$

$$|p(t)| \leqslant C_{90}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}\widetilde{q}_{max}(t), \quad |r(t)| \leqslant C_{91}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}\widetilde{q}_{max}(t), \quad t \in [0,t_6], \tag{83}$$

$$|h_1(t)| \leqslant C_{92}\widetilde{q}_{max}(t), \widetilde{h}_{3max}(t) \leqslant C_{93}t\widetilde{q}_{max}(t), \quad t \in [0,t_6], \tag{84}$$

де число t_6, $0 < t_6 \leqslant T$ залежить від сталих згаданої системи.

Оцінимо точніше один з доданків, який входить до $\omega(0,t)$, а саме:

$$R_4 = \int\limits_0^t |G_2^{(1)}(0,t,0,\tau) - G_2^{(2)}(0,t,0,\tau)|(f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\right|(f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \left|\frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} \times \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\right) - \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\right)\right|d\tau = \sum_{i=1}^{2}R_{4,i}.$$

Доданок $R_{4,2}$ подамо у вигляді

$$R_{4,2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau))\left|\int\limits_{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}^{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{z}\right)\right)dz\right|d\tau,$$

звідки, враховуючи обмеженість підінтегрального виразу та нерівність

$$|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)-\theta_2(t)+\theta_2(\tau)|\leqslant\int\limits_\tau^t|q(\sigma)|\sigma^\beta d\sigma\leqslant\frac{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}{\beta+1}\widetilde{q}_{max}(t),\qquad(85)$$

маємо $R_{4,2}\leqslant C_{94}t^{\beta+2}\widetilde{q}_{max}(t)$. Для оцінки $R_{4,1}$ використаємо (44), (85) та нерівності

$$\theta_i(t)-\theta_i(\tau)=\int\limits_\tau^t|q(\sigma)|\sigma^\beta d\sigma\geqslant\frac{K^2_{min}(t)}{h^2_{3imax}(t)(1+r)^2}\frac{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}{\beta+1},\quad i=1,2,$$

$$R_{4,1}\leqslant\frac{\sqrt{\beta+1}(1+r)^3\widetilde{q}_{max}(t)h_{31max}(t)h_{32max}(t)}{K^3_{min}(t)\left(\dfrac{1}{h_{31max}(t)}+\dfrac{1}{h_{32max}(t)}\right)}\int\limits_0^t\frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(1+r)^3h^2_{31max}(t)h^2_{32max}(t)\mu_3(t)}{t^\beta K^4_{min}(t)(h_{31max}(t)+h_{32max}(t))}\widetilde{q}_{max}(t).$$

Для оцінки всіх інших доданків $\omega(0,t)$ врахуємо нерівності (82)-(84). Отримаємо

$$|\,\omega(0,t)|\leqslant\left(C_{95}+\frac{(1+r)^3h^2_{31max}(t)h^2_{32max}(t)\mu_3(t)}{t^\beta K^4_{min}(t)(h_{31max}(t)+h_{32max}(t))}+C_{96}t^{\gamma-\frac{\beta-1}{2}}\right)\widetilde{q}_{max}(t).\qquad(86)$$

Підставивши (84), (86) в (72), одержимо

$$\widetilde{q}_{max}(t)\leqslant\left(C_{97}t^{\frac{\beta-1}{2}}+\frac{(1+r)^4K^4_{max}(t)h^2_{31max}(t)h^3_{32max}(t)}{(1-r)^4K^4_{min}(t)h^2_{31min}(t)h^2_{32min}(t)(h_{31max}(t)+h_{32max}(t))}+\right.$$

$$\left.+C_{98}t^\gamma+C_{99}t\right)\widetilde{q}_{max}(t),\quad t\in[0,t_6].\qquad(87)$$

Оскільки $\lim\limits_{t\to+0}K_{max}(t)=\lim\limits_{t\to+0}K_{min}(t)$, $\lim\limits_{t\to+0}h_{3imax}(t)=\lim\limits_{t\to+0}h_{3imin}(t)=h_{30}$, $i=1,2$, то для заданого $r:0<r<1$ існує таке число $t_7:0<t_7\leqslant T$, що

$$\frac{K^4_{max}(t)h^2_{31max}(t)h^3_{32max}(t)}{K^4_{min}(t)h^2_{31min}(t)h^2_{32min}(t)(h_{31max}(t)+h_{32max}(t))}\leqslant\frac{1+r}{2},\quad t\in[0,t_7],$$

$$C_{97}t^{\frac{\beta-1}{2}}+C_{98}t^\gamma+C_{99}t\leqslant r,\quad t\in[0,t_7].$$

Зафіксуємо число r так, щоб $0<r<\dfrac{\sqrt[5]{2}-1}{\sqrt[5]{2}+1}$. Тоді

$$C_{97}t^{\frac{\beta-1}{2}}+\frac{(1+r)^4K^4_{max}(t)h^2_{31max}(t)h^3_{32max}(t)}{(1-r)^4K^4_{min}(t)h^2_{31min}(t)h^2_{32min}(t)(h_{31max}(t)+h_{32max}(t))}+C_{98}t^\gamma+C_{99}t\leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1+r)^5}{2(1-r)^4} + r < 1.$$

У результаті з (87) матимемо $\widetilde{q}_{max}(t) \leqslant 0$, $t \in [0, t_7]$, що неможливо. Отже, $\widetilde{q}_{max}(t) \equiv 0$, $t \in [0, T_0]$, де $T_0 = \min\{t_0, t_6, t_7\}$, звідси $q(t) \equiv 0$, $h(t) \equiv 0$, $p(t) \equiv 0$, $t \in [0, T_0]$, $v(y,t) \equiv 0$, $\omega(y,t) \equiv 0$, $(y,t) \in [0,1] \times [0, T_0]$, що й завершує доведення теореми.

1. *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 245-257.
2. *Іванчов М. І., Салдіна Н. В.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, №11. – С. 1487-1500.
3. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20-38.
4. *Гринців Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 45-59.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.
6. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv, 2003.

AN INVERSE PROBLEM FOR A STRONGLY DEGENERATE PARABOLIC EQUATION IN A DOMAIN WITH FREE BOUNDARIES

Nadiya HRYNTSIV

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

In the domain with free boundaries there is investigated an inverse problem of determination the coefficient at the higher - order derivative in a strongly degenerate complete parabolic equation. Conditions of existence and uniqueness of the classical solution to this problem are established.

Key words: inverse problem, strong power degeneration, free boundaries, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 31.08.2007

Прийнята до друку 24.10.2007