ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 68. С. 75-85

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math. 2008. Vol. 68. P. 75-85

УДК 519.212

СТАЦІОНАРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОКАНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ВІДМОВАМИ ТА МОЖЛИВІСТЮ ВИХОДУ З ЛАДУ

Юрій ЖЕРНОВИЙ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Для системи масового обслуговування G/G/1/0 з можливостями виходу з ладу під час роботи і у вільному стані визначено ймовірності станів граничного стаціонарного процесу та знайдено розподіл часу перебування системи у вільному стані.

Ключові слова: система масового обслуговування з відмовами та можливістю виходу з ладу, граничний стаціонарний процес, імовірності станів.

1. Дослідження ергодичних властивостей *систем масового обслуговування* (СМО) типу M/G успішно проводили за допомогою методу вкладених ланцюгів Маркова [1, с. 96]. Для систем типу G/G доведення існування граничного стаціонарного процесу виявилось проблематичним. Відомі лише спроби визначення стаціонарних характеристик таких СМО з використанням напівмарковських процесів зі спеціально побудованим фазовим простором [2, гл. 5].

У цій праці, припускаючи, що стаціонарний граничний процес існує, ми ставимо завдання визначити стаціонарні характеристики СМО G/G/1/0 з можливостями виходу з ладу каналу під час роботи і у вільному стані.

2. Загальні формули для стаціонарних імовірностей. Вивчатимемо одноканальну СМО з відмовами, на вхід якої надходить стаціонарний ординарний потік замовлень, а випадкові величини T_λ (час між моментами надходження замовлень) і T_μ (час обслуговування одного замовлення) незалежні і довільно розподілені.

Припустимо, що працюючий канал може вийти з ладу (відмовити) через випадковий час T_ν, який відраховується від моменту початку обслуговування. У вільному стані канал також може стати недоступним для надходження замовлень через час T_{ν_0} після завершення обслуговування. В обидвох випадках відновлення (ремонт) каналу починається негайно після його виходу з ладу і триває протягом випадкового часу T_γ і T_{γ_0} відповідно. Замовлення, яке обслуговували в момент виходу каналу з ладу, покинуло систему не обслуженим.

© Жерновий Ю., 2008

Надалі вважатимемо, що випадкові величини T_λ, T_μ, T_ν, T_{ν_0}, T_γ і T_{γ_0} незалежні в сукупності, довільно розподілені і мають скінченні математичні сподівання m_λ, m_μ, m_ν, m_{ν_0}, m_γ і m_{γ_0} відповідно.

Введемо нумерацію станів системи: s_0 – канал вільний; s_1 – канал працює; s_2 – канал на ремонті (недоступний).

Спочатку розглянемо випадок, коли існує заборона повторного виходу з ладу вільного каналу. Припустимо, що після стану s_2 недоступності каналу, який настав у результаті переривання стану s_0 і тривав протягом випадкового часу T_{γ_0}, наступний перехід системи до стану s_2 можливий лише після її перебування у стані s_1, тобто ланцюжок зміни станів $s_0 \to s_2 \to s_0 \to s_2$ неможливий.

Можливими є такі чотири варіанти ланцюжків зміни станів, які описують цикл між двома послідовними потрапляннями системи до стану s_1

$$\text{Ц}_1: \ s_1 \to s_0 \to s_1; \qquad \text{Ц}_2: \ s_1 \to s_0 \to s_2 \to s_0 \to s_1;$$
$$\text{Ц}_3: \ s_1 \to s_2 \to s_0 \to s_1; \qquad \text{Ц}_4: \ s_1 \to s_2 \to s_0 \to s_2 \to s_0 \to s_1.$$

Тривалості циклів відповідно становлять

$$\tau_1 = T_{\mu\nu} + T_{0\mu\nu0}; \quad \tau_2 = T_{\mu\nu} + T_{0\mu\nu0} + T_{\gamma0} + T_{0\gamma\mu};$$
$$\tau_3 = T_{\mu\nu} + T_\gamma + T_{0\nu\nu0}; \quad \tau_4 = T_{\mu\nu} + T_\gamma + T_{0\nu\nu0} + T_{\gamma0} + T_{0\gamma\nu}.$$

Тут

$$T_{\mu\nu} = \min\{T_\mu, T_\nu\}, \quad T_{0\mu\nu0} = \min\{T_{0\mu}, T_{\nu0}\}, \quad T_{0\nu\nu0} = \min\{T_{0\nu}, T_{\nu0}\},$$

$T_{0\mu}$ – час перебування у стані s_0 у випадку ланцюжка Ц$_1$ для системи з забороною виходу з ладу у стані s_0; $T_{0\nu}$ – час перебування у стані s_0 у випадку ланцюжка Ц$_3$ для системи з забороною виходу з ладу у стані s_0; $T_{0\gamma\mu}$ – час перебування у стані s_0 після стану s_2 у випадку ланцюжка Ц$_2$; $T_{0\gamma\nu}$ – час перебування у стані s_0 другий раз у випадку ланцюжка Ц$_4$.

Проаналізуємо роботу системи на дуже великому проміжку часу T, взявши за початок відліку часу момент надходження чергового замовлення у вільний канал.

Якщо $N(T)$ – кількість замовлень, що надійшли у систему за час T, $N_{\text{обс}}(T)$ – кількість обслужених за цей час замовлень, $N_{\text{пер}}(T)$ – кількість замовлень, обслуговування яких було перерване у зв'язку з виходом каналу з ладу, то для великих значень T виконується наближена рівність

$$\begin{aligned} T &\approx N(T)m_\lambda \approx \\ &\approx N_{\text{обс}}(T)\big(m_{\mu\nu} + m_{0\mu\nu0} + P_{\text{пер}\,0\mu}(T)(m_{\gamma0} + m_{0\gamma\mu})\big) + \\ &+ N_{\text{пер}}(T)\big(m_{\mu\nu} + m_\gamma + m_{0\nu\nu0} + P_{\text{пер}\,0\nu}(T)(m_{\gamma0} + m_{0\gamma\nu})\big), \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$m_{\mu\nu} = M(T_{\mu\nu}), \quad m_{0\mu\nu0} = M(T_{0\mu\nu0}), \quad m_{0\gamma\mu} = M(T_{0\gamma\mu}),$$
$$m_{0\nu\nu0} = M(T_{0\nu\nu0}), \quad m_{0\gamma\nu} = M(T_{0\gamma\nu}),$$
$$P_{\text{пер}\,0\mu}(T) = \frac{N_{\text{пер}\,0\mu}(T)}{N_{\text{обс}}(T)}, \qquad P_{\text{пер}\,0\nu}(T) = \frac{N_{\text{пер}\,0\nu}(T)}{N_{\text{обс}}(T)},$$

$N_{\text{пер}\,0\mu}(T)$ – кількість обслужених замовлень, після обслуговування яких канал вийшов з ладу у стані s_0, $N_{\text{пер}\,0\nu}(T)$ – кількість замовлень, після переривання обслуговування яких у результаті виходу з ладу у стані s_1, канал знову вийшов з ладу у стані s_0, не розпочавши обслуговування нового замовлення.

Введемо позначення

$$P_{\text{пер}}(T) = \frac{N_{\text{пер}}(T)}{N_{\text{обс}}(T) + N_{\text{пер}}(T)}. \tag{2}$$

Якщо граничний стаціонарний процес існує, то $P_{\text{пер}} = \lim\limits_{T\to\infty} P_{\text{пер}}(T) = P\{T_\nu < T_\mu\}$ – ймовірність переривання обслуговування у зв'язку з виходом каналу з ладу; $P_{\text{пер}\,0\mu} = \lim\limits_{T\to\infty} P_{\text{пер}\,0\mu}(T) = P\{T_{\nu 0} < T_{0\mu}\}$ – ймовірність виходу каналу з ладу у стані s_0, що йде після стану s_1, який тривав до завершення обслуговування; $P_{\text{пер}\,0\nu} = \lim\limits_{T\to\infty} P_{\text{пер}\,0\nu}(T) = P\{T_{\nu 0} < T_{0\nu}\}$ – ймовірність виходу каналу з ладу у стані s_0, що йде після стану s_2.

Рівність (1) виконується тим точніше, чим триваліший проміжок часу T розглядається. Виразивши з (2) $N_{\text{пер}}(T)$, а потім з (1) – відношення $N_{\text{обс}}(T)/N(T)$ і перейшовши у ньому до границі при $T \to \infty$, визначимо стаціонарне значення ймовірності обслуговування для замовлення, що надійшло у систему (відносну пропускну здатність СМО)

$$P_{\text{обс}} = \lim_{T\to\infty} \frac{N_{\text{обс}}(T)}{N(T)} = \frac{m_\lambda(1 - P_{\text{пер}})}{M_{\mu\nu\gamma}}, \tag{3}$$

де

$$M_{\mu\nu\gamma} = m_{\mu\nu} + (1 - P_{\text{пер}})\big(m_{0\mu\nu 0} + (m_{\gamma 0} + m_{0\gamma\mu})P_{\text{пер}\,0\mu}\big) + \\ + P_{\text{пер}}\big(m_\gamma + m_{0\nu\nu 0} + (m_{\gamma 0} + m_{0\gamma\nu})P_{\text{пер}\,0\nu}\big).$$

Вигляд правої частини (3) дає підстави стверджувати, що необхідною умовою існування граничного стаціонарного процесу є існування скінченних математичних сподівань випадкових величин T_λ, T_μ, $T_{\mu\nu}$, $T_{0\mu\nu 0}$, $T_{0\nu\nu 0}$, T_γ, T_{γ_0}, $T_{0\gamma\mu}$ і $T_{0\gamma\nu}$.

Повертаючись до рівності (1), бачимо, що проміжок часу T складається з суми довжин проміжків T_0 (часу простою каналу), T_1 (часу зайнятості каналу) і T_2 (часу ремонту каналу), тобто $T \approx \sum T_0 + \sum T_1 + \sum T_2$, де

$$\sum T_0 \approx N_{\text{обс}}(T)\big(m_{0\mu\nu 0} + P_{\text{пер}\,0\mu}(T) m_{0\gamma\mu}\big) + \\ + N_{\text{пер}}(T)\big(m_{0\nu\nu 0} + P_{\text{пер}\,0\nu}(T) m_{0\gamma\nu}\big); \quad \sum T_1 \approx \big(N_{\text{обс}}(T) + N_{\text{пер}}(T)\big) m_{\mu\nu}; \\ \sum T_2 \approx N_{\text{обс}}(T) P_{\text{пер}\,0\mu}(T) m_{\gamma 0} + N_{\text{пер}}(T)\big(m_\gamma + P_{\text{пер}\,0\nu}(T) m_{\gamma 0}\big).$$

Після переходу до границі при $T \to \infty$ у відношеннях $\sum T_i / T$ $(i = \overline{1,3})$ отримаємо формули для ймовірностей станів граничного стаціонарного процесу

$$
\begin{gathered}
p_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum T_0}{T} = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda(1-P_{\text{пер}})}\times \\
\times\big((1-P_{\text{пер}})(m_{0\mu\nu 0}+P_{\text{пер}\,0\mu}m_{0\gamma\mu})+P_{\text{пер}}(m_{0\nu\nu 0}+P_{\text{пер}\,0\nu}m_{0\gamma\nu})\big) = \\
= \frac{(1-P_{\text{пер}})(m_{0\mu\nu 0}+P_{\text{пер}\,0\mu}m_{0\gamma\mu})+P_{\text{пер}}(m_{0\nu\nu 0}+P_{\text{пер}\,0\nu}m_{0\gamma\nu})}{M_{\mu\nu\gamma}}; \\
p_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum T_1}{T} = \frac{P_{\text{обс}}\,m_{\mu\nu}}{m_\lambda(1-P_{\text{пер}})} = \frac{m_{\mu\nu}}{M_{\mu\nu\gamma}}; \\
p_2 = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum T_2}{T} = \frac{(1-P_{\text{пер}})P_{\text{пер}\,0\mu}m_{\gamma 0}+P_{\text{пер}}(m_\gamma+P_{\text{пер}\,0\nu}m_{\gamma 0})}{M_{\mu\nu\gamma}}.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Якщо потік замовлень найпростіший, тобто випадкова величина T_λ розподілена за показниковим законом з параметром λ, то внаслідок відсутності післядії випадкові величини $T_{0\mu}$, $T_{0\nu}$, $T_{0\gamma\mu}$ і $T_{0\gamma\nu}$ також розподілені за показниковим законом з параметром λ. Отже,

$$
\begin{gathered}
m_{0\gamma\mu} = m_{0\gamma\nu} = 1/\lambda, \quad T_{0\mu\nu 0} = T_{0\nu\nu 0} = T_{\lambda\nu 0} = \min\{\,T_\lambda, T_{\nu 0}\,\}, \\
m_{0\mu\nu 0} = m_{0\nu\nu 0} = m_{\,\lambda\nu 0} = M(T_{\lambda\nu 0}); \\
P_{\text{пер}\,0\mu} = P_{\text{пер}\,0\nu} = P_{\text{пер}\,0} = P\{\,T_{\nu 0} < T_\lambda\,\},
\end{gathered}
$$

і зі співвідношень (3), (4) отримаємо узагальнення формул Севастьянова [3] для системи M/G/1/0 з можливістю виходу з ладу

$$
\begin{gathered}
P_{\text{обс}} = \frac{1-P_{\text{пер}}}{M_\lambda}; \qquad p_0 = \frac{P_{\text{обс}}(P_{\text{пер}\,0}+\lambda m_{\,\lambda\nu 0})}{1-P_{\text{пер}}} = \frac{P_{\text{пер}\,0}+\lambda m_{\,\lambda\nu 0}}{M_\lambda}; \\
p_1 = \frac{\lambda P_{\text{обс}} m_{\,\mu\nu}}{1-P_{\text{пер}}} = \frac{\lambda m_{\,\mu\nu}}{M_\lambda}; \qquad p_2 = 1-p_0-p_1,
\end{gathered}
$$

де $M_\lambda = (\lambda m_{\gamma 0}+1)P_{\text{пер}\,0}+\lambda(m_{\,\mu\nu}+m_{\lambda\nu 0}+P_{\text{пер}}m_\gamma)$.

3. Аналіз випадкових величин $\mathbf{T_{0\mu}}$, $\mathbf{T_{0\nu}}$, $\mathbf{T_{0\gamma\mu}}$ і $\mathbf{T_{0\gamma\nu}}$. Випадкові величини $T_{0\mu}$, $T_{0\nu}$, $T_{0\gamma\mu}$ і $T_{0\gamma\nu}$ об'єднує те, що вони задають інтервал часу, протягом якого система вільна, і цей проміжок часу починається після інтервалу тривалістю T_β зайнятості або недоступності каналу. Для спрощення аналізу цих випадкових величин введемо для них спільне позначення

$$
T_0 = \begin{cases} T_{0\mu}, & \text{якщо } T_\beta = T_{\,\mu\nu}; \\ T_{0\nu}, & \text{якщо } T_\beta = T_{\,\mu\nu}+T_\gamma; \\ T_{0\gamma\mu}, & \text{якщо } T_\beta = T_{\,\mu\nu}+T_{\,0\mu\nu 0}+T_{\gamma 0}; \\ T_{0\gamma\nu}, & \text{якщо } T_\beta = T_{\,\mu\nu}+T_\gamma+T_{\,0\nu\nu 0}+T_{\gamma 0}. \end{cases} \tag{5}
$$

Тривалість часу T_0 залежить від кількості замовлень, які надходять у систему за час T_β. Нехай $T_\lambda^{(k)}$ – k-разова композиція випадкових величин T_λ, $T_\lambda^{(0)} = 0$,

$T_\lambda^{(1)} = T_\lambda$, а $\quad q_k = P(A_k) = P\{\, T_\lambda^{(k-1)} \le T_\beta < T_\lambda^{(k)} \}\quad (k = 1, 2, \dots)$. Тоді

$$T_0 = \begin{cases} T_\lambda - T_\beta, & \text{з імовірністю } q_1; \\ T_\lambda^{(2)} - T_\beta, & \text{з імовірністю } q_2; \\ \dots\dots\dots \\ T_\lambda^{(k)} - T_\beta, & \text{з імовірністю } q_k; \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Отже, випадкова величина T_0 залежить від появи однієї і лише однієї з попарно несумісних подій A_k, $(k = 1, 2, \dots)$, які утворюють повну групу. Тому математичне сподівання $m_0 = M(T_0)$ можна обчислити за формулою повного математичного сподівання

$$m_0 = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) M(T_0|A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k (k m_\lambda - m_\beta) = m_\lambda S_q - m_\beta; \qquad S_q = \sum_{k=1}^{\infty} k q_k, \quad m_\beta = M(T_\beta). \tag{6}$$

Тут враховано, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k = 1$, оскільки події A_k $(k = 1, 2, \dots)$ утворюють повну групу попарно несумісних подій.

Якщо збігається числовий ряд S_q, то математичне сподівання m_0 існує. Оскільки $S_q = M(X) + 1$, де X – стаціонарне значення кількості замовлень, які надходять у систему за час T_β, то збіжність ряду S_q означає, що середня кількість замовлень, які надходять у систему за час недоступності каналу T_β, є скінченною. У монографії [2, с. 238] для випадку, коли вхідний потік є рекурентним, а випадкові величини T_λ і T_β мають абсолютно неперервні функції розподілу, то $M(X)$ визначено через $h_\lambda(t)$ – щільність функції відновлення для випадкової величини T_λ

$$M(X) = \int_0^{\infty} h_\lambda(t) \big(1 - F_\beta(t)\big)\, dt,$$

де $F_\beta(t)$ – функція розподілу випадкової величини T_β.

Отже, якщо функції розподілу випадкових величин T_λ і T_β абсолютно неперервні, то

$$S_q = 1 + \int_0^{\infty} h_\lambda(t) \big(1 - F_\beta(t)\big)\, dt. \tag{7}$$

Розглянемо випадок, коли вхідний потік регулярний, тобто $T_\lambda = T = const$, і формула (7) непридатна для знаходження S_q. Безпосередньо обчислюючи суму ряду

S_q, можемо записати

$$S_q = \sum_{k=1}^{\infty} kq_k = 1 + q_2 + q_3 + \cdots =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(q_{k+1} + q_{k+2} + \cdots) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(1 - S_k),$$

де $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i$. Оскільки

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} P\{\, T_\lambda^{(i-1)} \le T_\beta < T_\lambda^{(i)} \} = \sum_{i=1}^{k} P\{\, (i-1)T \le T_\beta < iT\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\big(F_\beta(iT) - F_\beta((i-1)T)\big) = F_\beta(kT),$$

то для регулярного вхідного потоку

$$S_q = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\big(1 - F_\beta(kT)\big).$$

Для обчислення математичних сподівань $m_{0\mu\nu0}$, $m_{0\nu\nu0}$, $m_{0\gamma\mu}$ і $m_{0\gamma\nu}$, які входять у співвідношення (3), (4) для стаціонарних характеристик системи, треба знати закони розподілу випадкових величин $T_{0\mu}$ і $T_{0\nu}$. Згідно з (5) для цього достатньо знайти закон розподілу випадкової величини T_0 – часу перебування у вільному стані для звичайної системи G/G/1/0.

Нехай T_β – час, протягом якого система недоступна для надходження замовлень (у випадку системи G/G/1/0 без можливості виходу з ладу $T_\beta = T_\mu$ – часу обслуговування одного замовлення). Якщо функції розподілу випадкових величин T_λ і T_β абсолютно неперервні, то згідно з [2, с. 238] щільність розподілу випадкової величини $T_{\beta+0} = T_\beta + T_0$ – інтервалу часу між потраплянням замовлень у вільну систему можна визначити за формулою

$$p_{\beta+0}(t) = p_\lambda(t)F_\beta(t) + \int_0^t \int_0^\tau h_\lambda(y)p_\beta(\tau)p_\lambda(t-y)\,dy\,d\tau,$$

де $p_\lambda(t)$, $p_\beta(t)$ – щільності розподілу випадкових величин T_λ і T_β відповідно.

Припустимо, що $p_\lambda(t) \ne 0$, $p_\beta(t) \ne 0 \ \forall\ t \in [0, \infty)$, а $p_0(t)$ – щільність розподілу випадкової величини T_0. Тоді за формулою згортки для щільностей розподілу випадкових величин T_β і T_0 отримаємо

$$\int_0^t p_0(\tau)p_\beta(t-\tau)\,d\tau = p_{\beta+0}(t). \tag{8}$$

Нехай функції $q_\beta(t) = dp_\beta(t)/dt$, $q_{\beta+0}(t) = dp_{\beta+0}(t)/dt$ – кусково неперервні $\forall\ t \in [0, \infty)$, і $p_\beta(0) \neq 0$. Тоді, продиференціювавши обидві частини рівності (8) за змінною t, одержимо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду стосовно функції $p_0(t)$

$$p_\beta(0)p_0(t) + \int\limits_0^t q_\beta(t-\tau)p_0(\tau)\,d\tau = q_{\beta+0}(t). \tag{9}$$

Розв'язок цього рівняння згідно з [4, с. 96] має вигляд

$$p_0(t) = \frac{q_{\beta+0}(t)}{p_\beta(0)} - \frac{1}{p_\beta(0)}\int\limits_0^t R_\beta(t-\tau)q_{\beta+0}(\tau)\,d\tau. \tag{10}$$

Тут $R_\beta(t)$ – резольвента ядра $q_\beta(t-\tau)$ рівняння (9), яку можна знайти або за допомогою перетворення Лапласа, застосувавши його до рівняння (9), або методом ітерованих ядер

$$R_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_\beta^{(k)}(t),$$

де $q_\beta^{(k)}(t)$ – k-разова згортка функції $q_\beta(t)$, $q_\beta^{(1)}(t) = q_\beta(t)$.

Якщо випадкова величина T_β розподілена за показниковим законом з параметром β, то рівняння (9) набуває вигляду

$$p_0(t) - \int\limits_0^t \beta e^{-\beta(t-\tau)}p_0(\tau)\,d\tau = \frac{q_{\beta+0}(t)}{\beta}.$$

У цьому випадку $R_\beta(t) = \beta$, і з (10) отримаємо

$$p_0(t) = \frac{q_{\beta+0}(t)}{\beta} + p_{\beta+0}(t) - p_{\beta+0}(0).$$

Зокрема, якщо випадкова величина T_λ розподілена за законом Ерланга другого порядку з параметром λ, то

$$p_0(t) = \left(\frac{\lambda^2(2\lambda+\beta)}{(\lambda+\beta)^2} + \frac{\lambda^2\beta t}{(\lambda+\beta)}\right)e^{-\lambda t} - \frac{\lambda^2(2\lambda+\beta)}{(\lambda+\beta)^2}e^{-(2\lambda+\beta)t}, \quad t > 0.$$

Знайдемо закон розподілу випадкової величини T_0 для випадку регулярного вхідного потоку, коли формула (10) стає непридатною для визначення $p_0(t)$. Якщо $T_\lambda = T = const$, то можливі значення випадкової величини T_0 зосереджені на відрізку $[0, T]$ і

$$T_0 = \begin{cases} T - T_\beta, & \text{з імовірністю } q_1; \\ 2T - T_\beta, & \text{з імовірністю } q_2; \\ \dots\dots\dots & \\ kT - T_\beta, & \text{з імовірністю } q_k; \\ \dots\dots\dots & \end{cases}$$

де $q_k = P(A_k) = P\{\,(k-1)T \le T_\beta < kT\}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Визначимо умовні щільності розподілу T_0 за умови, що $T_\beta \in [(k-1)T,\, kT)$, припускаючи, що випадкова величина T_β неперервна, а її щільність розподілу $p_\beta(t) \ne 0 \;\forall\; t \in (0, \infty)$.

Функції розподілу випадкових величин $Y_k = kT - T_\beta$ визначають як

$$F_{Y_k}(t) = 1 - F_\beta(kT - t), \quad 0 \le t \le kT \quad (k = 1, 2, \dots),$$

а їхні щільності розподілу відповідно становлять

$$p_{Y_k}(t) = p_\beta(kT - t), \quad 0 < t < kT \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тому умовні щільності розподілу випадкової величини T_0 за умови, що $T_\beta \in [(k-\ 1)T,\ kT)$ можемо визначити у вигляді

$$p_{0k}(t) = \frac{p_{Y_k}(t)}{N_k} = \frac{p_\beta(kT - t)}{N_k}, \quad 0 < t < T \quad (k = 1, 2, \dots),$$

де $N_k = \int\limits_0^T p_\beta(kT - t)\,dt$.

За формулою повної ймовірності

$$F_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{0k}(t) q_k, \qquad 0 \le t \le T.$$

Тут $F_0(t)$ – функція розподілу випадкової величини T_0, а $F_{0k}(t) = \int\limits_0^t p_{0k}(\tau)\,d\tau$. Звідси отримаємо формулу для визначення щільності розподілу випадкової величини T_0

$$p_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{0k}(t) q_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_\beta(kT - t)}{N_k} q_k, \quad 0 < t < T. \tag{11}$$

Перейшовши до змінної інтегрування $\tau = kT - t$ в інтегралі, який визначає нормувальну сталу N_k, одержимо, що

$$N_k = \int\limits_0^T p_\beta(kT - t)\,dt = \int\limits_{(k-1)T}^{kT} p_\beta(\tau)\,d\tau = q_k.$$

Отже, з (11) матимемо

$$p_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_\beta(kT - t), \qquad 0 < t < T. \tag{12}$$

Якщо функція $p_\beta(t) \ne 0$ лише для $t \in (a, \infty)$, де $a > 0$, але відношення $p_\beta(kT - t)/N_k$ не залежить від k, то з (11) одержимо

$$p_0(t) = \frac{p_\beta(kT - t)}{N_k}, \qquad 0 < t < T. \tag{13}$$

Наприклад, якщо щільність розподілу випадкової величини T_β має вигляд $p_\beta(t) = \beta e^{-\beta(t-a)}$, $t > a \geq 0$, то

$$N_k = \int_0^T \beta e^{-\beta(kT-t-a)}\,dt = e^{-\beta((k-1)T-a)} - e^{-\beta(kT-a)},$$

і за допомогою (13) отримаємо

$$p_0(t) = \frac{\beta e^{-\beta(T-t)}}{1-e^{-\beta T}}, \qquad 0 < t < T.$$

Такий самий результат матимемо, якщо випадкова величина T_β розподілена за показниковим законом з параметром β.

Формулою (12) зручно користуватись, зокрема, якщо випадкова величина T_β розподілена за узагальненим законом Ерланга довільного порядку. Наприклад, у випадку узагальненого закону Ерланга другого порядку з параметрами β_1 і β_2

$$p_0(t) = \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\left(\frac{e^{-\beta_1(T-t)}}{1-e^{-\beta_1 T}} - \frac{e^{-\beta_2(T-t)}}{1-e^{-\beta_2 T}}\right), \qquad 0 < t < T.$$

4. Приклад обчислення стаціонарних характеристик системи. Нехай вхідний потік – регулярний ($T_\lambda = T = const$), випадкові величини T_μ, T_ν, $T_{\nu 0}$ розподілені за показниковими законами з параметрами μ, ν, ν_0 відповідно, а інтервали часу ремонту детерміновані $T_\gamma = const$, $T_{\gamma 0} = const$. Опишемо на цьому прикладі послідовність визначення величин, які входять у формули (3), (4) для стаціонарних характеристик системи.

Спочатку, враховуючи співвідношення (5), за формулою (13) знайдемо розподіл випадкових величин $T_{0\mu}$ і $T_{0\nu}$

$$p_{0\mu}(t) = p_{0\nu}(t) = \frac{\alpha e^{-\alpha(T-t)}}{1-e^{-\alpha T}}, \quad \alpha = \mu + \nu; \qquad 0 < t < T.$$

Тепер обчислимо математичні сподівання випадкових величин $T_{0\mu\nu 0}$ і $T_{0\nu\nu 0}$

$$m_{0\mu\nu 0} = m_{0\nu\nu 0} = \int_0^\infty t p_{0\mu}(t)\bigl(1 - F_{\nu 0}(t)\bigr)\,dt + \int_0^\infty t p_{\nu 0}(t)\bigl(1 - F_{0\mu}(t)\bigr)\,dt =$$
$$= \frac{1}{1-e^{-\alpha T}}\left(\frac{e^{-\alpha T} + (\alpha T - \nu_0 T - 1)e^{-\nu_0 T}}{\alpha - \nu_0} + \frac{1-(\nu_0 T + 1)e^{-\nu_0 T}}{\nu_0}\right).$$

Наступний крок – визначення математичних сподівань $m_{0\gamma\mu}$ і $m_{0\gamma\nu}$. Знову враховуючи (5), з (6) одержимо

$$m_{0\gamma\mu} = m_\lambda S_{q\gamma\mu} - (m_{\mu\nu} + m_{0\mu\nu 0} + m_{\gamma 0}),$$
$$m_{0\gamma\nu} = m_\lambda S_{q\gamma\nu} - (m_{\mu\nu} + m_\gamma + m_{0\nu\nu 0} + m_{\gamma 0}),$$

де

$$S_{q\gamma\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} kq_{\gamma\mu k}, \qquad S_{q\gamma\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} kq_{\gamma\nu k},$$
$$q_{\gamma\mu k} = P\{(k-1)T \le T_{\mu\nu} + T_{0\mu\nu 0} + T_{\gamma 0} < kT\},$$
$$q_{\gamma\nu k} = P\{(k-1)T \le T_{\mu\nu} + T_{\gamma} + T_{0\nu\nu 0} + T_{\gamma 0} < kT\}.$$

Для розподілів, які розглядають у цьому прикладі,

$$m_{\lambda} = T, \quad m_{\gamma} = T_{\gamma}, \quad m_{\gamma 0} = T_{\gamma 0},$$
$$S_{q\gamma\mu} = s + e^{-\alpha(sT - T_{\gamma 0})} + \frac{\alpha e^{-\alpha T}\big(e^{-\alpha(sT-T_{\gamma 0})} - e^{(\alpha-\nu_0)(sT-T_{\gamma 0})}\big)}{(2\alpha-\nu_0)(1-e^{-\alpha T})} +$$
$$+\frac{\alpha\big(e^{-\nu_0(sT-T_{\gamma 0})} - e^{-\alpha(sT-T_{\gamma 0})}\big)}{(\alpha-\nu_0)(1-e^{-\alpha T})} + \frac{e^{-\alpha\big((s+1)T-T_{\gamma 0}\big)}}{1-e^{-\alpha T}} +$$
$$+\frac{\alpha e^{-\alpha\big((s+1)T-T_{\gamma 0}\big)}}{(1-e^{-\alpha T})^2}\left(\frac{e^{-\alpha T} - e^{-(\nu_0-\alpha)T}}{2\alpha-\nu_0} - \frac{1-e^{-(\nu_0-\alpha)T}}{\alpha-\nu_0}\right),$$
$$(s-1)T \le T_{\gamma 0} \le sT \qquad (s = 1,\, 2, \ldots).$$

Формулу для $S_{q\gamma\nu}$ отримаємо з виразу для $S_{q\gamma\mu}$, замінивши у ньому $T_{\gamma 0}$ на $T_{\gamma} + T_{\gamma 0}$.

Залишається зауважити, що $m_{\mu\nu} = 1/(\mu+\nu)$, $P_{\text{пер}} = \nu/(\mu+\nu)$,

$$P_{\text{пер}\,0\mu} = P_{\text{пер}\,0\nu} = \frac{\alpha - \nu_0 + \nu_0 e^{-\alpha T} - \alpha e^{-\nu_0 T}}{(\alpha-\nu_0)(1-e^{-\alpha T})},$$

і стаціонарні характеристики системи за формулами (3), (4) цілковито визначені.

5. Випадок відсутності обмеження на кількість виходів з ладу вільного каналу. Розглянемо лише випадок найпростішого вхідного потоку, коли випадкова величина T_{λ} розподілена за показниковим законом з параметром λ. Тоді

$$m_{\lambda} = m_{0\gamma\mu} = m_{0\gamma\nu} = 1/\lambda, \quad T_{0\mu\nu 0} = T_{0\nu\nu 0} = T_{\lambda\nu 0} = \min\{T_{\lambda}, T_{\nu 0}\},$$
$$m_{0\mu\nu 0} = m_{0\nu\nu 0} = m_{\lambda\nu 0} = M(T_{\lambda\nu 0});$$
$$P_{\text{пер}\,0\mu} = P_{\text{пер}\,0\nu} = P_{\text{пер}\,0} = P\{T_{\nu 0} < T_{\lambda}\},$$

і наближена рівність (1) набуває вигляду

$$T \approx N(T)m_{\lambda} \approx N_{\text{обс}}(T)\big(m_{\mu\nu} + m_{\lambda\nu 0} + \pi_{\text{пер}\,0}(T)\big)+$$
$$+N_{\text{пер}}(T)\big(m_{\mu\nu} + m_{\gamma} + m_{\lambda\nu 0} + \pi_{\text{пер}\,0}(T)\big),$$

де

$$\pi_{\text{пер}\,0}(T) = P_{\text{пер}\,0}(T)\big(m_{\gamma 0} + m_{\lambda\nu 0} + P_{\text{пер}\,0}(T)\big(m_{\gamma 0} + m_{\lambda\nu 0}+$$
$$+P_{\text{пер}\,0}(T)(m_{\gamma 0} + m_{\lambda\nu 0} + \cdots)\big)\big) = (m_{\gamma 0} + m_{\lambda\nu 0})\sum_{k=1}^{\infty}\big(P_{\text{пер}\,0}(T)\big)^k =$$
$$= (m_{\gamma 0} + m_{\lambda\nu 0})\frac{P_{\text{пер}\,0}(T)}{1 - P_{\text{пер}\,0}(T)}.$$

Для $T \to \infty$ одержимо

$$
\begin{aligned}
P_{\text{обс}} = \frac{1 - P_{\text{пер}}}{\lambda M_\infty}; \qquad p_0 = \frac{m_{\lambda\nu 0}}{M_\infty (1 - P_{\text{пер}\,0})}; \\
p_1 = \frac{m_{\mu\nu}}{M_\infty}; \qquad p_2 = \frac{m_{\gamma 0} P_{\text{пер}\,0} + m_\gamma P_{\text{пер}} (1 - P_{\text{пер}\,0})}{M_\infty (1 - P_{\text{пер}\,0})},
\end{aligned}
\tag{14}
$$

де $M_\infty = m_{\mu\nu} + m_{\lambda\nu 0} + m_\gamma P_{\text{пер}} + (m_{\gamma 0} + m_{\lambda\nu 0}) \frac{P_{\text{пер}\,0}}{1 - P_{\text{пер}\,0}}$, $P_{\text{пер}} = P\{T_\nu < T_\mu\}$.

У випадку показниково розподілених випадкових величин T_μ, T_ν, $T_{\nu 0}$, T_γ і $T_{\gamma 0}$ формули (14) переходять у співвідношення, отримані в [5, с. 362].

1. *Ивченко Г.И.* Теория массового обслуживания. / *Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.* – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.
2. *Корлат А.Н.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. / *Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.М., Турбин А.Ф.* – Кишинев, 1991.
3. *Севастьянов Б.А.* Эргодическая теорема для марковских процессов и ее применение к телефонным системам с отказами / *Севастьянов Б.А.* // Теория вероятн. и ее применения. – 1957. – Т. 2, №2. – С. 106-116.
4. *Верлань А.Ф.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. / *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* – К.: Наук. думка, 1986. – 542 с.
5. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории вероятностей / *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.

STATIONARY CHARACTERISTICS OF THE SINGLE-SERVER QUEUEING LOSS SYSTEM WITH FALLING OUT POSSIBILITY

Yuriy ZHERNOVYI

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska Str., 1

The statistical-equilibrium state probabilities distribution and distribution of time of stay in a free state for the G/G/1/0 queueing system with falling out possibilities of the working and free server are obtained.

Key words: queueing loss system with falling out possibility, statistical-equilibrium state, probabilities distribution.

Стаття надійшла до редколегії 04.04.2007

Прийнята до друку 22.10.2008