ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 68. С. 97-103 *Ser.Mech-Math. 2008. Vol. 68. P. 97-103*

УДК 512.552.12

РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД 3-ПРОСТОЮ ОБЛАСТЮ БЕЗУ

Богдан ЗАБАВСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, Львів, вул. Університетська, 1

Побудовано можливу діагональну редукцію матриць над 3-простою областю Безу.

Ключові слова: n-проста область Безу, редукція матриць, кільця Ерміта.

У праці [1] автор показав, що проста область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки, коли вона є 2-простою. У [2] описано результати, які показують можливу діагональну редукцію матриць над n-простою областю Безу. Мета нашої праці – показати можливу діагональну редукцію матриць над 3-простою областю Безу.

Введемо необхідні позначення і відомі факти. Під кільцем будемо розуміти асоціативне кільце $1 \neq 0$. Позначимо через R_n кільце $n \times n$ - матриць з елементами з кільця R, а через $GL_n(R)$ групу одиниць кільця R_n. Матриці A та B над кільцем R назвемо *еквівалентними*, якщо над R існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів такі, що $B = PAQ$. Нагадаємо, що кільце R є *правим (лівим) ермітовим*, якщо довільна $1 \times 2(2 \times 1)$ матриця над R еквівалентна діагональній матриці. *Кільце Ерміта* – це кільце, яке є правим і лівим ермітовим кільцем. *Кільце Безу* – це кільце, в якому довільний односторонній скінченнопороджений ідеал є головним. Зауважимо, що згідно з [3] область Безу є кільцем Ерміта і всяке кільце Ерміта є кільцем Безу.

Нехай R - просте кільце, тоді $RaR = R$ для довільного ненульового елемента $a \in R$. Звідси, оскільки $1 \in R$, то існують такі елементи $u_1, \dots u_n, v_1, \dots v_n \in R$, що $u_1av_1 + \dots + u_nav_n = 1$. Якщо знайдеться таке натуральне число n, що для всіх ненульових елементів $a \in R$ виконується $u_1av_1 + \dots + u_nav_n = 1$, для деяких елементів $u_1, \dots u_n, v_1, \dots v_n \in R$, і n є найменшим зі всіх можливих, тоді кільце R називається *n - простим* [2]. В [4] наведено різноманітні приклади n-простих кілець, які не є $n-1$-простими. В праці [1] наведено цікавий результат, який стосується n-простих кілець.

Твердження 1. *Якщо R – n-проста область, тоді для довільних ненульових елементів $a_1, \ldots, a_n \in R$ існують такі елементи $u_1, \ldots u_n, v_1, \ldots v_n \in R$, що $u_1 a_1 v_1 + u_2 a_2 v_2 + \ldots + u_n a_n v_n = 1$.*

Сформулюємо наш головний результат, що стосується 3-простих областей Безу.

Теорема 1. *Довільна матриця $A \in R_n$ $n > 3$ над 3-простою областю Безу еквівалентна матриці*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & 0 & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & & & & \\ & & & & A_1 & & & \\ & 0 & & & & \ddots & & \\ & & & & & & A_k & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

де $A_1, \ldots, A_k$ - деякі трикутні матриці порядку 2.

Доведення. Доведення проведемо за числом n. Нехай A – довільна матриця порядку 3. Оскільки область Безу є ермітовим кільцем [3], то з точністю до еквівалентності матриць можна вважати, що матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Можливі випадки.

1. Нехай $a_{11} = 0$, тобто матриця A з точністю до еквівалентності матриць має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю

$$A' = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Оскільки R – кільце Ерміта [3], тоді для матриці A' існує матриця $Q' \in GL_2(R)$ така, що

$$A'Q' = \begin{pmatrix} a'_{21} & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} \end{pmatrix}$$

для деяких елементів $a'_{21}, a'_{31}, a'_{32} \in R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що

$$\begin{pmatrix} Q' & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(R).$$

Тобто з точністю до еквівалентності матриць ми можемо вважати, що матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Згідно з ермітовістю кільця R для рядка $\begin{pmatrix} a'_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ існує матриця $Q'' \in GL_2(R)$ така, що з

$$\begin{pmatrix} a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} Q'' = \begin{pmatrix} a''_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

для деякого елемента $a''_{32} \in R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & Q'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a''_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & Q'' \end{pmatrix} \in GL_3(R).$$

Тобто з точністю до еквівалентності матриць ми можемо вважати, що матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a''_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

що й доводить наше твердження.

2. Нехай $a_{22} = 0$, тобто матриця A з точністю до еквівалентності матриць має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Оскільки R – кільце Ерміта, тоді для рядка $\begin{pmatrix} a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ існує матриця $Q' \in GL_2(R)$ така, що

$$\begin{pmatrix} a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} Q' = \begin{pmatrix} a'_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

для деякого елемента $a'_{32} \in R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & Q' \end{pmatrix} \in GL_3(R),$$

тобто з точністю до еквівалентності матриць, можемо вважати, що матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки R ермітове кільце, то для стовпчика $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ існує така оборотна матриця $P' \in GL_2(R)$, що

$$P' \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a'_{21} \end{pmatrix}$$

для деякого елемента $a'_{21} \in R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} P' & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що

$$\begin{pmatrix} P' & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(R),$$

тобто з точністю до еквівалентності матриць можемо вважати, що матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a'_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

що й доводить твердження.

3. Нехай $a_{33} = 0$, тобто з точністю до еквівалентності матриць матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки R – ермітове кільце, то для стовпчика $\begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ існує оборотна матриця $P' \in GL_2(R)$ така, що

$$P' \begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a'_{32} \end{pmatrix}$$

для деякого елемента $a'_{32} \in R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

для деяких елементів $a'_{21}, a'_{31}, a'_{32} \in R$. Зауважимо, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & P' \end{pmatrix} \in GL_3(R),$$

тобто з точністю до еквівалентності матриць можемо вважати, що матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Завдяки міркуванням з пункту 2 отримаємо, що матриця A еквівалентна шуканій матриці.

4. Нехай (з точністю до еквівалентності) матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

де $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0$. Покажемо, що тоді існує матриця $T \in R_3$ така, що

$$AT = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

для деяких ненульових елементів $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in R$. Нехай $a_{21} \neq 0$, тоді згідно з тим, що область Безу є областю Оре [5], для елементів $a_{21}, a_{22} \in R$ існують ненульові елементи $x, y \in R$ такі, що $a_{21}x = -a_{22}y$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

де $a'_{31} = a_{31}x + a_{32}y$.

Очевидно, що $a_{11}x \neq 0$. Отже, випадок $a'_{21} \neq 0$ зводиться до випадку, коли $a_{21} = 0$. Тобто, ми можемо вважати, що для матриці A існує матриця $T_1 \in R_3$ така, що

$$AT_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

де $b_{11} \neq 0, b_{22} \neq 0, b_{33} \neq 0$. Якщо $b_{31} \neq 0$, тоді, аналогічно, існують ненульові елементи $r, s \in R$ такі, що $b_{31}r = -b_{33}s$. Тоді

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}r & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $b_{11}r \neq 0$. Отож, ми можемо вважати, що для матриці AT_1 існує матриця $T_2 \in R_3$ така, що

$$AT_1T_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

де $c_{11} \neq 0, c_{22} \neq 0, c_{33} \neq 0$. Якщо $c_{32} \neq 0$, то аналогічно існують ненульові елементи $k, t \in R$, що $c_{32}k = -c_{33}t$. Тоді

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}k & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $c_{22}k \neq 0$. Тобто, ми довели, що для матриці A існує матриця $T \in R_3$ така, що

$$AT = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

для деяких ненульових елементів $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in R$. Позаяк область R є 3-простою, то згідно з твердженням 1, існують елементи $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in R$ такі, що

$$u_1\varepsilon_1v_1 + u_2\varepsilon_2v_2 + u_3\varepsilon_3v_3 = 1.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 1. \tag{1}$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} AT \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Нехай $T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ для деяких елементів $w_1, w_2, w_3 \in R$. З рівності 1 випливає, що

$$u_1R + u_2R + u_3R = R,$$

$$Rw_1 + Rw_2 + Rw_3 = R.$$

Оскільки R – кільце Ерміта, то згідно з [6] рядок $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$ і стовпчик $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ можна доповнити до оборотних матриць $U, W \in GL_3(R)$ відповідно. Тоді

$$UAW = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матрицю UAW елементарними перетвореннями можна привести до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & A' \end{pmatrix}.$$

Оскільки R – кільце Ерміта, то A' з точністю до еквівалентності матриць можна вважати верхньою трикутною матрицею.

Індукція по числу n завершує доведення.

---

1. *Забавський Б.В.* Простые кольца элементарных делителей. / *Забавський Б.В.* // Математичні студії. – 2004. – Т. 22, №2. – С. 219-221.
2. *Zabavsky B.V.* Almost diagonal matrices over n-simple Bezout domains / *Zabavsky B.V.* // Groups and group rings XI, Bedlewo, Poland, June 4-11, 2005. – P. 22.
3. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules / *Kaplansky I.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 66. – P. 464-491.
4. *Olszenski J.* On ideals of products of rings / *Olszenski J.* // Demonstrativ mathematica. – 1994. – Vol. 1 – P. 1-7.
5. *Stenstrom Bo.* Rings of quotients / *Stenstrom Bo.* // Berlin; New-York: Springer-Verlag, 1971. – 309 p.
6. *Zabavsky B.V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank / *Zabavsky B.V.* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 206-210.

REDUCTION OF MATRICES OVER 3-SIMPLE BEZOUT DOMAIN

Bohdan ZABAVSKY

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

It is proved the possibility of an almost diagonal reduction of matrices over 3-simple Bezout domain.

Key words: n-simple Bezout domain, Hermite ring, reduction of matrices.

Стаття надійшла до редколегії 04.10.2006

Прийнята до друку 22.10.2008