ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.104-106 *Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.104-106*

УДК УДК 512.552.12

ПРАВІ КІЛЬЦЯ БЕЗУ, В ЯКИХ РАДИКАЛ ДЖЕКОБСОНА Є ЦІЛКОМ ПРОСТИМ

Богдан ЗАБАВСЬКИЙ[1], **Тетяна КИСІЛЬ**[2]

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
[1] *e-mail: b_zabava@franko.lviv.ua*
[2] *e-mail: kysil_tanya@mail.ru*

Доведено, що праве кільце Безу, в якому радикал Джекобсона є цілком простим, є правим ермітовим кільцем.

Ключові слова: кільце Безу, ермітове кільце, радикал Джекобсона, цілком простий ідеал.

В [1] доводиться, що комутативне кільце Безу, в якому радикал Джекобсона є простим ідеалом, є кільцем Ерміта. В цій праці аналогічний результат поширюється на випадок некомутативних кілець, зокрема показано, що праве кільце Безу, в якому радикал Джекобсона цілком простий, є правим кільцем Ерміта.

Наведемо необхідні означення та факти. Під кільцем R розуміємо асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Скажемо, що кільце R є правим кільцем Ерміта, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують елемент $d \in R$ та зворотна матриця P такі, що $(a, b)P = (d, 0)$. Праве кільце Безу – це кільце R, в якому довільний скінченнопороджений правий ідеал є головним правим ідеалом [2]. Ідеал I кільця R називається цілком простим, якщо R/I – кільце без дільників нуля. Рядок $(a_1, \dots, a_n)$ називається унімодулярним, якщо $a_1R + \ldots + a_nR = R$. Позначимо через $J(R)$ радикал Джекобсона, а через $GL_n(R)$ повну лінійну групу кільця R.

Теорема 1. *Нехай R – праве кільце Безу. Якщо в кільці R радикал Джекобсона $J(R)$ є цілком простим, тоді R – праве кільце Ерміта.*

Доведення. Зауважимо, якщо $J(R) = \{0\}$, то з умови теореми випливає, що кільце R є кільцем без дільників нуля, тому згідно з [4], є правим кільцем Ерміта. Якщо ж $J(R) \neq \{0\}$, то з обмежень, накладених на кільце R, фактор-кільце $R/J(R)$ є кільцем без дільників нуля, а отже – правим кільцем Ерміта [4].

Спочатку покажемо, що довільний унімодулярний рядок над кільцем R може бути доповнений до зворотної матриці.

Нехай $\overline{R} = R/J(R)$ і $aR + bR = R$. Тоді $\overline{a}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}$. Оскільки $\overline{R}$ праве кільце Ерміта, то згідно з [3], [5] рядок $(\overline{a}, \overline{b})$ над кільцем $\overline{R}$ можна доповнити до зворотної матриці

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{u} & \overline{v} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\overline{AC} = \overline{CA} = \overline{I}, \tag{1}$$

де $\overline{I}$ – одинична матриця над кільцем $\overline{R}$, а $\overline{C} = \begin{pmatrix} \overline{c} & \overline{x} \\ \overline{d} & \overline{y} \end{pmatrix}$ – деяка матриця.

Тоді згідно з (1) маємо $ac + bd = 1 + j_1$, $ax + by = j_2$, $uc + zd = j_3$, $ux + zy = 1 + j_4$, для деяких елементів $j_1, j_2, j_3, j_4 \in J(R)$.

Приймемо $A = \begin{pmatrix} a & b \\ u & z \end{pmatrix}$ та $C = \begin{pmatrix} c & x \\ d & y \end{pmatrix}$. Тоді

$$AC = \begin{pmatrix} 1 + j_1 & j_2 \\ j_3 & 1 + j_4 \end{pmatrix} = J,$$

де $1 + j_1 = u_1, 1 + j_4 = u_4$ – зворотні елементи кільця R, згідно з властивостями радикала Джекобсона. Доведемо, що для матриці $J = AC$ існує така матриця W, що $JW = WJ = I$ – одинична матриця над R.

Розглянемо

$$\begin{pmatrix} u_1 & j_2 \\ j_3 & u_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{-1} & 0 \\ 0 & u_4^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j_2' \\ j_3' & 1 \end{pmatrix},$$

де, очевидно, $j_2', j_3' \in J(R)$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & j_2' \\ j_3' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j_3' & 1 + j \end{pmatrix},$$

для деякого елемента $j \in J(R)$. Звідси

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j_3' & 1 + j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 + j)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j_3' & 1 \end{pmatrix}$$

та $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j_3' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -j_3' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тобто, для матриці J ми знайшли матрицю $W \in GL_2(R)$ таку, що $JW = I$ – одинична матриця.

Аналогічно доводиться, що $SJ = I$ для деякої матриці $S \in GL_2(R)$. Отож, ми довели, що $AC = J$ – зворотна матриця. Звідси $ACJ^{-1} = I$. Аналогічно доводиться, що і матриця $CA = V$ – зворотна. Тоді $V^{-1}CA = I$. Отже, матриця A – зворотна.

Доведемо, що R – праве кільце Ерміта. Нехай a, b – довільні елементи кільця R. Оскільки R – праве кільце Безу, то

$$aR + bR = R$$

для деякого елемента $d \in R$. Нехай $a = da_0$, $b = db_0$ та $d = au + bv$ для деяких елементів $a_0, b_0, u, v \in R$. Звідси $d(a_0u + b_0v - 1) = 0$ та $a_0R + b_0R + c_0R = R$, для деякого елемента $c_0 \in R$ такого, що $dc_0 = 0$. Оскільки $\overline{R}$ праве кільце Ерміта, то згідно з [3], [5] стабільний ранг $\overline{R}$ не перевищує 2. З [5] стабільний ранг R не перевищує 2 також. Тоді $(a_0+c_0x)R+(b_0+c_0y)R=R$ для деяких елементів $x,y \in R$. Враховуючи доведене вище, існує зворотна матриця P вигляду

$$P=\begin{pmatrix} a_0+c_0x & b_0+c_0y \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $(d,0)P=(a,b)$, а звідси $(a,b)P^{-1}=(d,0)$, тобто R є правим ермітовим кільцем. Теорему доведено.

Як наслідок, для випадку комутативних кілець отримуємо відомий результат праці [1].

Теорема 2. *Комутативне кільце Безу, в якому радикал Джекобсона є простим ідеалом, є кільцем Ерміта.*

1. *Larsen M.* Elementary divisors rings and finitely presented modules / *Larsen M., Lewis W., Shores T.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 187. – P. 231-248.
2. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules / *Kaplansky I.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 66. – P. 464-491.
3. *Zabavsky B.V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank / *Zabavsky B.V.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 206-211.
4. *Amitsur S.A.* Remarks of principal ideal rings / *Amitsur S.A.* // Osaka Math. Journ. – 1963. – Vol. 15. – P. 59-69.
5. *Zabavsky B.V.* Diagonalizability theorems for matrices over rings with finite stable range / *Zabavsky B.V.* // Alg. and Discr. Math. – 2005. – №1. – P.134-148.

THE RIGHT BEZOUT RING WITH COMPLETELY PRIME JAKOBSON RADICAL

Bohdan ZABAVSKY[1], **Tetyana KISIL**[2]

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska str., 1
[1] *e-mail: b_zabava@franko.lviv.ua*
[2] *e-mail: kysil_tanya@mail.ru*

It is proved, that the right Bezout ring with completely prime Jakobson radical is the right Hermit ring.

Key words: Bezout ring, Hermit ring, Jakobson radical, completely prime ideal.

Стаття надійшла до редколегії 27.04.2007

Прийнята до друку 22.10.2008