ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.107-114 *Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.107-114*

УДК 515.553

СКІНЧЕННІ ЗА ДЕДЕКІНДОМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ КІЛЬЦЯ І МОДУЛІ ТА ЇХНІЙ ПЕРВИННИЙ РАДИКАЛ

Григорій КАШУБА, Микола КОМАРНИЦЬКИЙ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Досліджено скінченні за Дедекіндом диференціальні кільця та модулі. Отримано характеризації скінченності за Дедекіндом диференціальних модулів аналогічні до тих, які відомі для звичайних модулів.

Ключові слова: диференціальний модуль, диференціальне кільце, дедекіндово-скінченна множина, первинний диференціальний модуль.

1. Поняття скінченної за Дедекіндом множини є цікавим об'єктом дослідження в теорії множин [6]. Природно, що властивість скінченності за Дедекіндом привертає увагу дослідників, які працюють з іншими категоріями. Скінченні за Дедекіндом кільця систематично вивчав Лері в [1]. Він визначив необхідні та достатні умови скінченності за Дедекіндом асоціативних кілець з одиницею, розглянув також напівпрості модулі, які є скінченними за Дедекіндом. Окремий пункт цієї праці присвячено абелевим групам, які є скінченними за Дедекіндом. Скінченні за Дедекіндом та ультраскінченні об'єкти в елементарних топосах досліджували Стут [2], Окуна-Ортега [3] та ін. Скінченним за Дедекіндом регулярним та одинично регулярним кільцям присвячено окремий розділ відомої монографії Гудерла "Регулярні кільця" [4]. Скінченні за Дедекіндом кільця фігурують під назвою прямоскінченних. Гудерл розглядав умови скінченності за Дедекіндом регулярних і одинично-регулярних кілець та досліджував скінченно-породжені проективні модулі над ними. Зокрема виявлено, що в цій ситуації такі модулі поводять себе не зовсім традиційно.

Ми започатковуємо дослідження скінченних за Дедекіндом диференціальних кілець і диференціальних модулів над ними. Зазначимо, що задача описання скінченних за Дедекіндом диференціальних кілець еквівалентна задачі описання тих диференціальних кілець, кільця лінійних диференціальних операторів над якими є скінченними за Дедекіндом як звичайні кільця. Взаємозв'язки між властивостями диференціального кільця коефіцієнтів і його кільця лінійних диференціальних операторів далеко не очевидні та зрозумілі лише в дуже примітивних випадках, тому отримати результати про диференціальні скінченні за Дедекіндом кільця з результатів Лері (як наслідки) набагато важче, ніж застосувати відомі міркування до випадку диференціальних кілець. У зв'язку з цим ці розгляди, на нашу думку, мають право на існування. Водночас враховуватимемо відомий факт природної ізоморфності категорії лівих диференціальних модулів над диференціальним кільцем і категорії лівих модулів над кільцем лінійних диференціальних операторів з коефіцієнтами з цього диференціального кільця. Завдяки цьому ізоморфізмові деякі твердження про диференціальні модулі є тривіальними наслідками властивостей звичайних модулів і у таких випадках, коли ця ситуація є, ми не будемо проводити ніяких міркувань, що імітують доведення такого типу.

2. Попередні відомості. Всі розглядувані кільця припускатимемо асоціативними з одиницею, а всі модулі лівими й унітарними. Диференціальні кільця і модулі здебільшого будуть одинарними. Домовимось, що символ $\mathbb{N}$ позначає невід'ємні цілі числа.

Нехай R – диференціальне кільце з диференціюванням $\delta : R \longrightarrow R$ (скорочено δ-кільце). Тоді лівий R-модуль M називається диференціальним модулем (скорочено d-модулем), якщо на ньому задано деяке d-диференціювання. Тут під δ-диференціюванням розуміємо таке відображення $d : M \longrightarrow M$, що для довільних елементів $m, m_1, m_2 \in M$, $r \in R$ виконуються рівності $d(m_1 + m_2) = d(m_1) + d(m_2)$ і $d(r \cdot m) = \delta(r) \cdot m + r \cdot d(m)$. Елементи $\delta(a), \delta^2(a), ..., \delta^n(a), ...$ кільця R скорочено позначатимемо через $a', a'', ..., a^{(n)}, ...$ Домовимось також позначати через $(\delta(a))^{(0)}$ тотожний оператор на кільці R. Зокрема $(\delta)^{(0)}(a) = a$ і $(a)^{(0)} = a$. Аналогічні позначення вживатимемо також і у випадку елемента m модуля M. Елемент m модуля M називається константою, якщо $d(m) = 0$. Диференціальним гомоморфізмом між диференціальними модулями M_1 і M_2 зі структурними диференціюваннями d_1 і d_2 відповідно називаємо таке відображення $f : M_1 \longrightarrow M_2$, для якого виконуються умови: $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$, $f(d_1(m)) = d_2(f(m))$, де $m_1, m_2 \in M_1, f(m_1), f(m_2) \in M_2$. Диференціальним ендоморфізмом модуля M називається дифереціальний гомоморфізм $f : M \longrightarrow M$. Категорію всіх лівих диференціальних R-модулів і всіх диференціальних гомоморфізмів позначатимемо через $R - Dmod$.

Об'єкт A деякої категорії називається скінченним за Дедекіндом, якщо в ній кожний мономорфізм $f : A \longrightarrow A$ є автоморфізмом. Називатимемо кільце R скінченним за Дедекіндом, коли воно є скінченним за Дедекіндом як лівий регулярний R-модуль.

Комутативане кільце, в якому кожний регулярний елемент є зворотним, називається кільцем дробів.

Непорожню множину $S \subseteq R$ називають dm-системою, якщо для довільних $a, b \in S$ існують такі $n \in \mathbb{N}$ і $r \in R$, що $arb^{(n)} \in S$.

Кажуть, що множина $S \subseteq R$ є dn-системою, якщо для всіх $a \in S$ існують $n \in \mathbb{N}$ і $r \in R$ такі, що $ara^{(n)} \in S$.

Для будь-якого елемента $m \in M$ можна розглядати d-підмодуль $[m] = Rm + Rm' + Rm'' + ... \subseteq M$. Цей d-підмодуль називатимемо диференціально-циклічним підмодулем модуля M. Зрозуміло, що $[m]$ є найменшим диференціальним підмодулем в M, серед тих, які містить елемент m. Аналогічно, найменший диференціальний підмодуль d-модуля M, серед усіх тих, що містять задану підмножину X, називається диференціальним підмодулем, породженим множиною елементів X і позначається $[X]$. Зокрема, $[m_1, m_2, ..., m_n]$ є диференціальним модулем зі скінченною множиною диференціальних твірних $m_1, m_2, ..., m_n$.

Під d-нільпотентним елементом розуміємо такий елемент x d-кільця R, для якого виконується рівність $[x]^n = 0$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Позначимо через N_d^0 множину d-нільпотентних елементів d-кільця R. Надалі, у випадку комутативного диференціального кільця, називатимемо диференціальний ідеал N_d^0 його диференціальним нільрадикалом.

3. Скінченні за Дедекіндом диференціальні кільця та модулі. Відомо, що кожний модульний гомоморфізм $f : R \longrightarrow R$ асоціативного кільця R з одиницею, є множенням справа на фіксований елемент $f(1) = a \in R$, тобто для всіх елементів r кільця R маємо $f(r) = r \cdot a$. По-іншому можна сказати, що кожний ендоморфізм з R в R є гомотетією. Аналогічна властивість для диференціальних гомоморфізмів зводить всі диференціальні ендоморфізми диференціального кільця R з одиницею до гомотетій з коефіцієнтами, які є константами.

Сформулюємо перший результат.

Теорема 1. *Асоціативне диференціальне кільце R з одиницею є скінченним за Дедекіндом тоді і тільки тоді, коли кожна регулярна константа a з R є зворотною.*

Доведення. Нехай $f : R \longrightarrow R$ – диференціальний модульний ендоморфізм кільця R. Тоді $f(1) = a = const$. Це означає, що $DHom_R(R, R) \cong Const(R)$, де $DHom_R(-, -)$ – диференціальний Hom-функтор, $Const$ – множина констант кільця R. Тоді f буде ізоморфізмом тоді і тільки тоді, коли a є зворотним.

Це твердження в комутативному випадку можна сформулювати так: диференціальне комутативне кільце R є скінченним за Дедекіндом тоді і тільки тоді, коли його кільце констант є кільцем дробів.

Наступні теореми доводимо аналогічно до відповідних теорем для звичайних скінченних за Дедекіндом модулів.

Теорема 2. *Нехай M – скінченний за Дедекіндом об'єкт у категорії лівих диференціальних R-модулів, який розкладається в пряму суму (добуток) сім'ї $\{M_i\}_{i \in I}$ нетривіальних диференціальних R-підмодулів. Тоді кожний M_i є скінченним за Дедекіндом у диференціальному сенсі.*

Доведення. Нехай при деякому $j \in I$ M_j не є скінченним за Дедекіндом у диференціальному сенсі. Тоді існує ін'єктивний диференціальний гомоморфізм $f_j : M_j \longrightarrow M_j$, який не є диференціальним ізоморфізмом. Нехай $f_i = 1_{M_i}$ для кожного $i \in I, i \neq j$. Тоді $\bigoplus\limits_i f_i (\prod\limits_i f_i)$ є ін'єктивним R-модульним диференціальним ендоморфізмом, який не є диференціальним ізоморфізмом. Це суперечить тому, що M є скінченним за Дедекіндом у диференціальному сенсі.

Теорема 3. *Нехай $\{M_i\}_{i \in I}$ – сім'я нетривіальних диференціальних R-модулів. Припустимо, що $DHom(M_i, M_j) = DHom(M_j, M_i) = \{0\}$, де $i \neq j$. Якщо M_i скінченні за Дедекіндом як диференціальні модулі, то і пряма сума (добуток) всіх M_i також буде скінченним за Дедекіндом диференціальним модулем.*

Доведення. Нехай $M = \bigoplus M_i$. Якщо $f : M \longrightarrow M$ є R-модульним диференціальним ендоморфізмом модуля M, то наше припущення гарантує "діагоналізацію" f як $\bigoplus f_i$, де f_i – R-модульний диференціальний ендоморфізм, отриманий обмеженням f на M_i. Якщо f ін'єктивний, то кожний f_i буде ін'єктивним. Оскільки всі M_i скінченні за Дедекіндом, то всі f_i будуть ізоморфізмами. Тому M є скінченним за Дедекіндом. Випадок прямого добутку доводиться аналогічно.

Теорема 4. *Кожний гомоморфний образ скінченного за Дедекіндом диференціального модуля стосовно довільного диференціального гомоморфізму є скінченним за Дедекіндом як диференціальний модуль.*

Доведення. Нехай $f : M_1 \longrightarrow M_2$ – довільний диференціальний гомоморфізм між диференціальними модулями M_1 і M_2. Припустимо, що $g : M_1 \longrightarrow M_1$ – довільний диференціальний ендоморфізм d-модуля M_1. Тоді існує ендоморфізм h d-модуля M_2, який робить цю діаграму комутативною

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ M_1 & \xrightarrow[f]{} & M_2 \end{array}$$

Оскільки диференціальний ендоморфізм $g : M_1 \longrightarrow M_1$ є атоморфізмом (бо M_1 скінченний за Дедекіндом), то і ендоморфізм $h : M_2 \longrightarrow M_2$ теж є диференціальним автоморфізмом. Отже, M_2 буде скінченним за Дедекіндом як диференціальний модуль.

4. Первинні диференціальні модулі. Нехай M – лівий диференціальний модуль над диференціальним кільцем R з одиницею.

Ненульовий d-модудь M називається диференціально простим (скорочено d-простим), якщо він не має жодних диференціальних підмодулів, крім M і 0.

Ідеал M називатимемо d-максимальним тоді і тільки тоді, коли R/M є d-простим модулем. Наступне твердження є очевидним.

Твердження 1. *Модуль M є d-простим тоді і тільки тоді, коли для кожного ненульового елемента $m \in M$ виконується рівність $[m] = M$.*

Нехай $L \subseteq M$ – підмножина d-модуля M. Позначимо через $DAnn_R L$ лівий диференціальний ідеал $\{a \in R | a \cdot l^{(k)} = 0, \forall l \in L, \forall k \in \mathbb{N}\}$. Цей диференціальний ідеал називається диференціальним лівим анулятором підмножини L.

Модуль M називається диференціально первинним (d-первинним), якщо для будь-якого ненульового диференціального підмодуля N в M виконується рівність: $DAnn_R N = DAnn_R M$. Кажуть, що d-підмодуль N є диференціально первинним підмодулем d-модуля M, якщо M/N є d-первинним d-модулем.

Зауважимо, що d-підмодуль N d-модуля M є d-первинним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $r \in R$ і $m \in M$ з того, що $r \cdot m \in N$ випливає таке: або $[r]M \subseteq N$, або $m \in N$.

Позначимо через $r_d(N)$ – перетин всіх d-первинних підмодулів модуля M, які містять N. Отриманий d-підмодуль $r_d(N)$ називатимемо d-первинним радикалом підмодуля N [5].

Назвемо диференціально первинний радикал нульового підмодуля d-первинним радикалом всього d-модуля M. Цей d-первинний радикал позначатимемо через $r_d(M)$. Якщо модуль не містить первинних підмодулів, то вважаємо, що $r_d(M) = M$.

Твердження 2. *Кожний d-скінченно-породжений d-модуль M над d-кільцем з одиницею $(1 \neq 0)$ має принаймні один максимальний диференціальний підмодуль.*

Доведення. Нехай $L_d(R)$ – множина всіх d-підмодулів d-модуля M, частково впорядкована за включенням. Якщо F – цілком впорядкована підмножина в $L_d(R)$, то нехай $\overline{N}$ – сума всіх $N \in F$. Якщо покажемо, що $\overline{N} \neq M$, то $\overline{N}$ – верхня грань F в $L_d(R)$ і можна застосувати лему Цорна для знаходження максимального d-підмодуля d-модуля M. Якщо $\overline{N} = M$, то $\overline{N}$ містить скінченно-породжуючу множину $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ для d-модуля M. Кожний x_i лежить у d-модулі, який належить до F. Тому $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset N$ для деякого $N \in F$. Звідси випливає, що $N = M$. Отримана суперечність доводить те, що $\overline{N} \neq M$.

Твердження 3. *Нехай N – d-підмодуль d-модуля M, причому $N \neq M$. Тоді перелічені твердження еквівалентні:*

1) N – d-первинний d-підмодуль;

2) для будь-яких $a \in R$ і $m \in M$ з умови $[a] \cdot [m] \subseteq N$ випливає таке: або $m \in N$, або $[a]M \subseteq N$;

3) для будь-яких $a \in R$ і $m \in M$ з того, що включення $(a^{(k)}R)m^{(n)} \subseteq N$ виконується при всіх $k, n \in \mathbb{N}$, випливає, що $m \in N$ або $[a]M \subseteq N$;

4) для будь-яких $a \in R$, $m \in M$ і $n \in \mathbb{N}$ з умови $(aR)m^{(n)} \subseteq N$ випливає, що $m \in N$ або $[a]M \subseteq N$.

Доведення. Імплікація $(1) \Longrightarrow (2)$ випливає з означення d-первинного d-підмодуля. Доведемо, що $(2) \Longrightarrow (1)$. Припустимо, що N задовольняє твердження (2), і нехай $A \subset R, B \in L_d(R), A \cdot B \subseteq N$. Якщо $A \nsubseteq N$ і $B \nsubseteq N$, то існують $a \in A$ і $b \in B$ такі, що $a \notin R$ і $b \notin N$. Отже, $[a] \cdot [b] \subseteq A \cdot B \subseteq N$. Це суперечність. Отож, $(2) \Longrightarrow (1)$ і $(1) \Longrightarrow (2)$.

Позначимо через $\sum$ – супремум всіх d-підмодулів d-модуля M. Доведемо, що $(2) \Longrightarrow (3)$. З рівностей

$$[a] = \sum_{k \in \mathbb{N}} Ra^{(k)}R, \quad [m] = \sum_{n \in \mathbb{N}} Rm^{(n)}R$$

отримуємо, що

$$[a] \cdot [m] = \sum_{k,n \in \mathbb{N}} Ra^{(k)}Rm^{(n)}R.$$

Отже, $(2) \Longleftrightarrow (3)$.

Якщо в (3) прийняти $k = 0$, то отримаємо імплікацію $(3) \Longrightarrow (4)$.

Припустимо, що $(aR)m^{(n)} \subseteq N$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Доведемо, що $(a^{(k)}R)m^{(n)} \subseteq N$ для всіх $k, n \in \mathbb{N}$.

Приймемо $l = k + n$. Якщо $l = 0$, то $(aR)m = (a^{(0)}R)m^{(0)} \subseteq N$. Звідси $((aR)m)^{(1)}m \subseteq N$ і $(a^{(1)}R)m = ((aR)m)^{(1)} - (aR)m^{(1)}m \subseteq N$.

Припустимо, що $(a^{(k)}R)m^{(n)} \subseteq N$ для всіх $k, n \in \mathbb{N}, k + n < l$. Тоді

$$(a^{(1)}R)m^{(l)} = ((aR)m^{(l)})^{(1)} - (aR)m^{(l+1)} - (aR)^{(1)}m^{(l)} \subseteq N.$$

Далі $(a^{(2)}R)m^{(l-1)} = ((a^{(1)}R)m^{(l-1)})^{(1)} - (a^{(1)}R)m^{(l-1)}$ і т. д. Тоді (4) $\Longrightarrow$ (3).

dm-Система, асоційована з d-первинним d-підмодулем N d-модуля M, це dm-система d-первинного ідеала $DAnn_R N$.

Твердження 4. *Для будь-якого d-підмодуля N d-модуля M перелічені множини рівні.*

1. *Перетин всіх d-первинних d-підмодулів модуля M, які містять N.*
2. *Множина тих $r \in R$, що кожна dm-система S, яка містить r, має ненульовий переріз з N.*

Доведення. Позначимо через $D_1(N)$ і $D_2(N)$ – множини, означені в умовах (1) і (2) відповідно. Доведемо, що $D_1(H) \supseteq D_2(H)$.

Нехай $r \in D_2(N)$ і P – будь-який d-первинний d-підмодуль, який містить N. Тоді $DAnn_R P$ – dm-система. Якщо $r \in DAnn_R P$, то $r \in N$ за умовою (2). Це суперечить тому, що $r \notin P, N \subseteq P$. Отже, $r \notin DAnn_R P$. Тоді $r \in P$. Звідки $r \in D_1(N)$. Отож, $D_2(H) \subseteq D_1(H)$.

Ненульовий d-підмодуль N d-модуля M називається d-суттєвим, якщо $N \cap K \neq 0$ для кожного ненульового d-підмодуля K d-модуля M.

Кажуть, що d-модуль M є однорідним, якщо кожний його ненульовий d-підмодуль є d-суттєвим.

Якщо для довільного d-підмодуля N в d-модулі M і будь-якого d-гомоморфізму $f : N \longrightarrow Q$ існує такий d-гомоморфізм $\overline{f} : M \longrightarrow Q$, що $\overline{f}|_N = f$, то Q називається d-ін'єктивним.

Твердження 5. *Диференціальний модуль Q буде d-ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого диференціального лівого ідеалу I і для довільного диференціального гомоморфізму $f : I \longrightarrow Q$ існує такий $d-$гомоморфізм $\overline{f} : R \longrightarrow Q$, що $\overline{f}|_I = f$.*

Диференціальне кільце R називатимемо dV-кільцем, якщо кожний d-простий модуль над R є d-ін'єктивним.

Твердження 6. *Над комутативним диференціальним кільцем R всі d-прості модулі є d-ін'єктивними тоді і тільки тоді, коли воно є dV-кільцем. По-іншому це можна сформулювати так: над комутативним диференціальним кільцем R всі d-прості модулі є d-ін'єктивними тоді і тільки тоді, коли кожний d-ідеал в R є ідемпотентним.*

Доведення тверджень 5 і 6 проводять повторенням відповідних міркувань, які виконуються у випадку тривіального диференціювання, з врахуванням диференціальної специфіки, і ми його тут не наводимо.

5. Диференціальний аналог теореми Васконселоса. Нехай R – диференціальне комутативне кільце. Тоді згідно з теоремою Васконселоса з [7] кожний ін'єктивний ендоморфізм будь-якого скінченно породженого R-модуля є ізоморфізмом тоді і тільки тоді, коли R має вимірність Крулля 0, тобто кожний його первинний ідеал є максимальним.

Для комутативного диференціального кільця R маємо аналогічний факт, який сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 5. *Кожний диференціально скінченно породжений R-модуль над комутативним диференціальним кільцем R є диференціально скінченним за Дедекіндом тоді і тільки тоді, коли кільце констант кільця R має нульову вимірність Крулля.*

Доведення. Проведемо доведення за схемою Васконселоса.

Зрозуміло, що необхідність тривіальна. Справді, якщо $P \subset Q$ – два різні первинні ідеали в $K = Const(R)$, то $PR \subset QR$ будуть різними диференціально первинними ідеалами в R. Тому при множенні на будь-який константний елемент $x \in Q - P$ отримуємо диференціальну ін'єкцію диференціального модуля R/PR в себе, яка не є сюр'єктивною. Оскільки R/PR є диференціально циклічним модулем, то бачимо, що існують не Дедекіндово скінченні диференціально скінченно породжені модулі.

Зворотне твердження доводити довше, але також достатньо легко. Розглянемо диференціальне кільце R, яке володіє зазначеною вище властивістю, тобто $Const(R)$ має вимірність Крулля 0 і нехай f – диференціальна ін'єкція диференціально скінченно породженого R-модуля M. Цей модуль можна перетворити в $R[x]$-модуль, прийнявши $x \cdot m = f(m)$ для $m \in M$. Ми стверджуємо, що $R[x]$-модуль M має анулятор I настільки великий, що $S = R[x]/I$ є нульвимірним. Для цього припустимо, що $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ множина твірних для M як диференціального R-модуля. Тоді маємо $xm_i = \sum r_{ij}m_j$, де $r_{ij} \in R$. Ці рівності можна записати у вигляді системи рівнянь

$$r_{1i}m_1 + ... + (r_{ii} - x)m_i + ... + r_{in}m_n = 0, i = 1, ..., n.$$

Припустимо, що визначник $det(\alpha \cdot M) = (0)$, де α – матриця з елементами з $R[x]$. Це свідчить про те, що I містить унітальний поліном $p(x) = det\alpha$ і зокрема, що $S_0 = R[x]/p(x)$ є областю, яка містить R і, як легко бачити, має вимірність Крулля 0. Оскільки S – гомоморфний образ S_0 при диференціальному гомоморфізмі, то S теж має диференціальну вимірність Крулля 0.

Позначимо через u образ x в S. Якщо u є одиницею, то все гаразд. Якщо ні, то J анулятор $u \neq (0)$. (Доведення: якщо $u \in P$ диференціальний первинний ідеал в S, то образ u в локалізації S_p є нільпотентним, тому очевидно $J \neq (0)$). В останньому випадку з $uJM = (0)$ випливає, що $JM = (0)$, і отже, $J = (0)$, оскільки M є S-точним.

---

1. *Leary F.C.* Dedekind finite object in module categories / *Leary F.C.* // J. Pure Appl. Algebra. – 1992. – Vol. 82. – P. 71-80.
2. *Stout L.N.* Dedekind finiteness in topoi / *Stout L.N.* // J. Pure Appl. Algebra. – 1987. – Vol. 49. – P. 219-225.
3. *Acuna Ortega O.* Una caracterizacion de objetos K-finitis decidables / *Acuna Ortega O.* // Ciens. y technol. – 1982. – Vol. 6. – P. 3-16.
4. *Goodearl K.R.* Von Neumann regular rings / *Goodearl K.R.* – London: Pitman, 1979. – 369 p.
5. *Hadjsev D.* On a differential analog of the prime-radical and properties of the lattice of radical differential ideals in associative differential rings / *Hadjsev D., Çallsalp F.* // Tr. J. of Matematics. – 1996. – Vol. 20. – P. 571-582.

6. *Ellentuck E.* The universal properties of Dedekind finite cardinals / *Ellentuck E.* // Ann. of Math. – 1965. – Vol. 82, №2. – P. 225-228.
7. *Vasconselos W.V.* Injective endomorphisms of finitely generated modules / *Vasconselos W.V.* // An. Acad. Brasil. Ci. – 1970. – Vol. 6. – P. 900-901.
8. *Brown W.C.* Matrices over commutative rings / *Brown W.C.* – New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc. – 1993. – 281 p.

DEDEKIND FINITE DIFFERENTIAL RINGS AND THEIR PRIME RADICAL

Grygoryi KASHUBA, Mykola KOMARNYTCKYI

Ivan Franko Nathional University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

In this note we investigate Dedekind finite differential rings and modules. Some characterization of such differential rings and modules are obtained.

Key words: differential module, differential ring, Dedekind finite module, differential prime radical.

Стаття надійшла до редколегії 24.10.2006

Прийнята до друку 22.10.2008