ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ | VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.158-170 | Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.158-170

УДК 517.95

ЗАДАЧА НА СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Сергій ЛАВРЕНЮК, **Оксана ПАНАТ**

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

В області $\Omega \times (0, +\infty)$, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ і $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_i \neq \emptyset$, $i \in \{1, 2\}$, $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \Gamma$, розглянуто задачу на спряження для гіперболічних рівнянь другого та третього порядку. Визначено певні умови існування єдиного узагальненого розв'язку такої задачі. Крім того, досліджено поведінку цього розв'язку при $t \to \infty$.

Ключові слова: задача на спряження, гіперболічне рівняння другого порядку, гіперболічне рівняння третього порядку.

Задачі для диференціальних рівнянь гіперболічного типу розглядали раніше багато авторів. Зокрема, у працях [1-3] досліджено мішані задачі для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку, які виникають, наприклад, у релятивістській квантовій механіці або моделюють коливні процеси у середовищі з опором.

Гіперболічні рівняння третього порядку є предметом дослідження вчених, починаючи з другої половини XX ст. (див. [4-6]). Рівняння такого типу виникають при описанні процесів, які відбуваються у в'язких середовищах, зокрема, моделюють крутильні коливання металевого кругового циліндра з внутрішнім тертям, поширення збурень у в'язко-пружному матеріалі, розповсюдження звуку у в'язкому газі, який поміщено в трубу, а також інші процеси подібної природи.

Розглянемо рівняння

$$\rho u_{tt} = G'(u_x, u_{xt}) + g(u, u_t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

(Ω – обмежена область, ρ – додатна стала, G, g, f – деякі функції, G' – похідні за просторовими змінними). У [4] вперше розглянуто мішану задачу для рівняння (1), коли $\Omega = (0,1)$, $T = +\infty$ і $G' = \sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx}$, $g = f = 0$. Доведено, що при виконанні умов $\sigma'(\xi) > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\sigma \in C^3(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$, існує єдиний класичний розв'язок u такої задачі, стійкий до збурень початкових даних. Також досліджено поведінку розв'язку, зокрема, показано, що $u \to 0$ при $t \to \infty$. У праці [5] в обмеженій області досліджено мішану задачу для рівняння (1), де $G'(u_x, u_{xt}) = \triangle u + \sum\limits_{i=1}^{n}(|u_{x_it}|^{p-2}u_{x_it})_{x_i}$, $p > 2$. Випадок, коли у головній частині такого рівняння показник нелінійності є функцією від просторових змінних ($p = p(x)$), розглянуто в [6]. Автори знайшли умови на коефіцієнти рівняння та показники нелінійностей, що забезпечують існування єдиного узагальненого розв'язку задачі в узагальнених просторах Соболєва.

У цій праці в обмеженій за просторовими змінними області досліджено задачу на спряження для гіперболічних рівнянь другого та третього порядку. З'ясовано умови, що гарантують існування та єдиність розв'язку такої задачі в узагальнених просторах Лебега. Крім того, вивчено поведінку цього розв'язку при $t \to \infty$. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$) – обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, де Ω_i – область, $\Omega_i \neq \emptyset$, $i \in \{1,2\}$; $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \Gamma$, $\Gamma \in C^1$; $\partial\Omega_1 = \big(\partial\Omega \cap \overline{\Omega}_1\big) \cup \Gamma$, $\partial\Omega_2 = \big(\partial\Omega \cap \overline{\Omega}_2\big) \cup \Gamma$, $\partial\Omega_i \backslash \Gamma \neq \emptyset$, $i \in \{1,2\}$.

Позначимо $Q = \Omega \times (0,+\infty)$, $Q_i = \Omega_i \times (0,+\infty)$, $Q_{i,\tau} = \Omega_i \times (0,\tau)$, $\Omega_{i,\tau} = \{(x,t) : x \in \Omega_i, t = \tau\}$, $\tau \in [0,+\infty)$, $i = \{1,2\}$; $\nu = \nu(x) = (\nu_1(x),\dots,\nu_n(x))$ $(x \in \Gamma)$ – одиничний вектор нормалі до Γ, зовнішній стосовно Ω_1. В області Q розглядаємо рівняння

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_it})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c_1(x)u_t + g_1(x)|u|^{p(x)-2}u = 0, \ (x,t) \in Q_1, \quad (2)$$

$$v_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n}(\alpha_{ij}(x)v_{x_i})_{x_j} + c_2(x)v_t + g_2(x)|v|^{q(x)-2}v = 0, \ \ (x,t) \in Q_2,$$

з умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega_1, \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega_2; \quad (3)$$

$$u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega_1, \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \Omega_2; \quad (4)$$

$$u|_{(\partial\Omega\cap\partial\Omega_1)\times(0,+\infty)} = 0, \quad v|_{(\partial\Omega\cap\partial\Omega_2)\times(0,+\infty)} = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_it} + b_{ij}(x)u_{x_i})\nu_j(x) = \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(x)v_{x_i}\nu_j(x), \ \ x \in \Gamma; \quad (6)$$

$$u|_\Gamma = v|_\Gamma. \quad (7)$$

Говоритимемо, що виконуються умови **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(PQ)**, якщо:

(**A**): a_{ij}, $a_{ij,x_j} \in L^\infty(\Omega_1)$, $\ i,j \in \{1,\dots,n\}$;
$a_0|\xi|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant a^0|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $x \in \Omega_1$, де $a_0 > 0$;
α_{ij}, $\alpha_{ij,x_j} \in L^\infty(\Omega_2)$, $\alpha_{ij}(x) = \alpha_{ji}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega_2$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$;
$\alpha_0|\xi|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \alpha^0|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $x \in \Omega_2$, де $\alpha_0 > 0$;

(**B**): b_{ij}, $b_{ij,x_j} \in L^\infty(\Omega_1)$, $b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega_1$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$;
$b_0|\xi|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant b^0|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $x \in \Omega_1$, де $b_0 > 0$;

(C): $c_{i,0} \leqslant c_i(x) \leqslant c_i^0$ майже для всіх $x \in \Omega_i$, де $c_{i,0} > 0$, $i \in \{1,2\}$;

(G): $g_{i,0} \leqslant g_i(x) \leqslant g_i^0$ майже для всіх $x \in \Omega_i$, де $g_{i,0} > 0$, $i \in \{1,2\}$;

(PQ): $p \in L^\infty(\Omega_1)$, $q \in L^\infty(\Omega_2)$,
$1 < p_0 = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega_1} p(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_1} p(x) = p^0 < +\infty$,
$1 < q_0 = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega_2} q(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_2} q(x) = q^0 < +\infty$.

Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$ – деяка обмежена область. Через $H^k(G)$, $k \in \{1,2\}$, позначимо множину всіх вимірних на G функцій y, які разом з усіма своїми узагальненими похідними до порядку k належать $L^2(G)$. Норма в просторі $H^k(G)$ задається формулою
$$||y; H^k(G)|| = \Big(\int\limits_G \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha y|^2\, dx\Big)^{1/2}.$$

Для функції $\sigma \in L^\infty(G)$, $1 < \sigma_1 \leqslant \sigma(x) \leqslant \sigma_2 < +\infty$, під узагальненим простором Лебега розуміємо множину всіх вимірних на G функцій y, для яких інтеграл $\int_G |y(x)|^{\sigma(x)} dx$ є скінченний. В [7] доведено, що $L^{\sigma(\cdot)}(G)$ є банаховим простором з нормою
$$||y; L^{\sigma(\cdot)}(G)|| = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int\limits_G |y(x)/\lambda|^{\sigma(x)} dx \leqslant 1\Big\}.$$

В [10, с. 168] показано, що
$$\int\limits_G |y(x)|^{\sigma(x)}\, dx \leqslant S_\sigma\big(||y; L^{\sigma(x)}(G)||\big), \text{ де } S_\sigma(r) = \begin{cases} r^{\sigma_1}, & r \in [0,1], \\ r^{\sigma_2}, & r > 1. \end{cases} \tag{8}$$

Для банахових просторів B_1 та B_2 через $B_1 \times B_2$ позначатимемо їхній декартовий добуток, тобто множину всіх пар (y,z) таких, що $y \in B_1$, $z \in B_2$. Відомо (див., наприклад, [8]), що $B_1 \times B_2$ є банаховим простором, якщо на ньому ввести норму за правилом $||(y,z); B_1 \times B_2|| = ||y; B_1|| + ||z; B_2||$. Крім того, якщо B_1 та B_2 неперервно вкладаються в локально випуклий простір $\widetilde{V}$, то перетин $B_1 \cap B_2$ є банаховим простором стосовно норми $||y; B_1 \cap B_2|| = ||y; B_1|| + ||y; B_2||$. Розглядатимемо такі функційні простори:
$$\overset{\circ}{H}{}^1_\Gamma(\Omega_i) = \{y \in H^1(\Omega_i) \ : \ y|_{\partial\Omega_i\setminus\Gamma} = 0\}, \quad i \in \{1,2\};$$
$$V = \{(y,z) \in (\overset{\circ}{H}{}^1_\Gamma(\Omega_1) \times \overset{\circ}{H}{}^1_\Gamma(\Omega_2)) \ : \ y|_\Gamma = z|_\Gamma\};$$
$$V_1 = V \cap (H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)); \quad V_2 = L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2); \quad V_3 = L^{p(x)}(\Omega_1) \times L^{q(x)}(\Omega_2);$$
$$W_i = \overset{\circ}{H}{}^1_\Gamma(\Omega_i) \cap H^2(\Omega_i), \quad i \in \{1,2\}.$$

Вважатимемо, що початкові функції задачі (2)-(7) задовольняють умову **(U)**, якщо $u_0, u_1 \in W_1$, $v_0 \in W_2$, $v_1 \in L^2(\Omega_2)$ і, крім того,
$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{1,x_i} + b_{ij}(x)u_{0,x_i})\nu_j(x) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x)v_{0,x_i}\nu_j(x), \ \ x \in \Gamma.$$

Означення 1. *Під узагальненим розв'язком задачі (2)-(7) розуміємо пару функцій (u,v), що задовольняє включення $(u,v) \in C([0,T];V_2)$, $(u_t,v_t) \in C([0,T];V_2)$, $(u,v) \in L^\infty(0,T;V\cap V_3)$, $(u_t,v_t) \in L^2(0,T;V)$, $(u_{tt},v_{tt}) \in L^\infty(0,T;V_2)$ для довільного $T>0$, умови (3)-(4) та рівність*

$$\int\limits_{\Omega_{1,t}} \left[u_{tt}\varphi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_it}\varphi_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}\varphi_{x_j} + c_1(x)u_t\varphi + g_1(x)|u|^{p(x)-2}u\varphi\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{2,t}} \left[v_{tt}\psi + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x)v_{x_i}\psi_{x_j} + c_2(x)v_t\psi + g_2(x)|v|^{q(x)-2}v\psi\right]dx = 0 \qquad (9)$$

для всіх $(\varphi,\psi) \in V\cap V_3$ та майже всіх $t>0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* ***(A)***, ***(B)***, ***(C)***, ***(PQ)***, ***(U)*** *і, крім того, $2 \leqslant p^0 \leqslant \frac{2n-2}{n-2}$, якщо $n>2$, $p^0>2$, якщо $n\in\{1,2\}$, $2 \leqslant q^0 \leqslant \frac{2n-2}{n-2}$, якщо $n>2$ і $q^0>2$, якщо $n\in\{1,2\}$. Тоді задача (2)-(7) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Зафіксуємо довільне число $T\in(0,+\infty)$. Нехай $\{(\varphi_k,\psi_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ – база простору $V_1\cap V_3$, ортонормована в V_2. Побудуємо послідовності $u^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^N C_k^N(t)\varphi_k(x)$, $x\in\Omega_1$, $v^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^N C_k^N(t)\psi_k(x)$, $x\in\Omega_2$, $t\in[0,T]$, $N\in\mathbb{N}$, де $(C_1^N,\dots,C_N^N)$ – розв'язок задачі Коші

$$\int\limits_{\Omega_{1,t}} \left[u_{tt}^N\varphi_k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_it}^N\varphi_{k,x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}^N\varphi_{k,x_j} + \right.$$

$$\left. + c_1(x)u_t^N\varphi_k + g_1(x)|u^N|^{p(x)-2}u^N\varphi_k\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{2,t}} \left[v_{tt}^N\psi_k + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x)v_{x_i}^N\psi_{k,x_j} + c_2(x)v_t^N\psi_k + g_2(x)|v^N|^{q(x)-2}v^N\psi_k\right]dx = 0, \quad (10)$$

$$C_k^N(0) = u_{0,k}^N + v_{0,k}^N, \quad C_{kt}^N(0) = u_{1,k}^N + v_{1,k}^N, \quad k=\overline{1,N}. \qquad (11)$$

Тут $u_0^N(x) = \sum\limits_{k=1}^N u_{0,k}^N\varphi_k(x)$, $v_0^N(x) = \sum\limits_{k=1}^N v_{0,k}^N\psi_k(x)$, $u_1^N(x) = \sum\limits_{k=1}^N u_{1,k}^N\varphi_k(x)$, $v_1^N(x) = \sum\limits_{k=1}^N v_{1,k}^N\psi_k(x)$, $N\in\mathbb{N}$ і $\left\|(u_0^N,v_0^N)-(u_0,v_0)\right\|_{W_1\times W_2} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\left\|(u_1^N,v_1^N)-(u_1,v_1)\right\|_{W_1\times L^2(\Omega_2)} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. За умовами теореми та на підставі теореми Каратеодорі [9, с. 54] існує неперервний розв'язок задачі (10), (11), який має абсолютно неперервну похідну, визначений на деякому проміжку $(0,t_N]$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_N=T$.

Помножимо (10) відповідно на функції C_{kt}^N, підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо по проміжку $(0,\tau]$, $\tau\in(0,T]$,

$$\int\limits_{Q_{1,\tau}} \Big[u^N_{tt}u^N_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u^N_{x_it}u^N_{x_jt} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u^N_{x_i}u^N_{x_jt} + c_1(x)|u^N_t|^2+$$

$$+g_1(x)|u^N|^{p(x)-2}u^Nu^N_t\Big]\,dxdt + \int\limits_{Q_{2,\tau}} \Big[v^N_{tt}v^N_t + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x)v^N_{x_i}v^N_{x_jt}+$$

$$+c_2(x)|v^N_t|^2 + g_2(x)|v^N|^{q(x)-2}v^Nv^N_t\Big]\,dxdt = 0. \tag{12}$$

З (12) отримуємо рівність

$$\frac12\int\limits_{\Omega_{1,\tau}} \Big[|u^N_t|^2 + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u^N_{x_i}u^N_{x_j}\Big]\,dx + \int\limits_{\Omega_{1,\tau}} \frac{1}{p(x)}\,g_1(x)|u^N|^{p(x)}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_{1,\tau}} \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u^N_{x_it}u^N_{x_jt} + c_1(x)|u^N_t|^2\Big]\,dxdt + \frac12\int\limits_{\Omega_{2,\tau}} \Big[|v^N_t|^2 + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x)v^N_{x_i}v^N_{x_j}\Big]\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{2,\tau}} \frac{1}{q(x)}\,g_2(x)|v^N|^{q(x)}\,dx + \int\limits_{Q_{2,\tau}} c_2(x)|v^N_t|^2\,dxdt =$$

$$=\frac12\int\limits_{\Omega_{1,0}} \Big[|u^N_1|^2 + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u^N_{0,x_i}u^N_{0,x_j}\Big]\,dx + \int\limits_{\Omega_{1,0}} \frac{1}{p(x)}\,g_1(x)|u^N_0|^{p(x)}\,dx+$$

$$+\frac12\int\limits_{\Omega_{2,0}} \Big[|v^N_1|^2 + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x)v^N_{0,x_i}v^N_{0,x_j}\Big]\,dx + \int\limits_{\Omega_{2,0}} \frac{1}{q(x)}\,g_2(x)|v^N_0|^{q(x)}\,dx.$$

Згідно з умовою **(A)**-**(PQ)** матимемо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_{1,\tau}} \Big[\frac12|u^N_t|^2 + \frac{b_0}{2}\sum_{i=1}^n |u^N_{x_i}|^2 + \frac{g_{1,0}}{p^0}|u^N|^{p(x)}\Big]\,dx + \int\limits_{Q_{1,\tau}} \Big[a_0|\nabla u^N_t|^2 + c_{1,0}|u^N_t|^2\Big]\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{2,\tau}} \Big[\frac12|v^N_t|^2 + \frac{\alpha_0}{2}\sum_{i=1}^n |v^N_{x_i}|^2 + \frac{g_{2,0}}{q^0}|v^N|^{q(x)}\Big]\,dx + c_{2,0}\int\limits_{Q_{2,\tau}} |v^N_t|^2\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_{1,0}} \Big[\frac12|u^N_1|^2 + \frac{b^0}{2}\sum_{i=1}^n |u^N_{0,x_i}|^2 + \frac{g^0_1}{p_0}|u^N_0|^{p(x)}\Big]dx + \int\limits_{\Omega_{2,0}} \Big[\frac12|v^N_1|^2 + \frac{\alpha^0}{2}\sum_{i=1}^n |v^N_{0,x_i}|^2 + \frac{g^0_2}{q_0}|v^N_0|^{q(x)}\Big]dx.$$

Враховуючи умову **(U)**, з останньої нерівності для всіх $\tau\in(0,T]$ одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_{1,\tau}} \Big[|u^N_t|^2 + |\nabla u^N|^2 + |u^N|^{p(x)}\Big]\,dx + \int\limits_{Q_{1,\tau}} \Big[|\nabla u^N_t|^2 + |u^N_t|^2\Big]\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{2,\tau}}\left[|v_t^N|^2+|\nabla v^N|^2+|v^N|^{q(x)}\right]dx+\int\limits_{Q_{2,\tau}}|v_t^N|^2\,dxdt\leqslant M_0, \tag{13}$$

де константа M_0 не залежить від N. Отже, на підставі (13)

$$||(u_t^N,v^N)||_{L^2((0,T);V)}\leqslant M_1,\quad ||(u_t^N,v_t^N)||_{L^\infty((0,T);V_2)}\leqslant M_1,$$
$$||(u^N,v^N)||_{L^\infty((0,T);V)}\leqslant M_1,\quad ||(u^N,v^N)||_{L^\infty((0,T);V_3)}\leqslant M_1. \tag{14}$$

Крім того,

$$\int\limits_{Q_{1,\tau}}\left||u^N|^{p(x)-2}u^N\right|^{p'(x)}dxdt\leqslant M_2,\quad \int\limits_{Q_{2,\tau}}\left||v^N|^{q(x)-2}v^N\right|^{q'(x)}dxdt\leqslant M_2 \tag{15}$$

для всіх $\tau\in(0,T]$ константа M_2 не залежить від N.

Диференціюємо (10) за t

$$\int\limits_{\Omega_{1,t}}\Bigg[u_{ttt}^N\varphi_k+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_itt}^N\varphi_{k,x_j}+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_it}^N\varphi_{k,x_j}+c_1(x)u_{tt}^N\varphi_k+$$
$$+g_1(x)(p(x)-1)|u^N|^{p(x)-2}u_t^N\varphi_k\Bigg]dx+\int\limits_{\Omega_{2,t}}\Bigg[v_{ttt}^N\psi_k+\sum_{i,j=1}^n\alpha_{ij}(x)v_{x_it}^N\psi_{k,x_j}+$$
$$+c_2(x)v_{tt}^N\psi_k+g_2(x)(q(x)-1)|v^N|^{q(x)-2}v_t^N\psi_k\Bigg]dx=0. \tag{16}$$

Рівність (16) множимо відповідно на функції $C_{k,tt}^N$, підсумовуємо за k від 1 до N та інтегруємо по проміжку $(0,\tau]$, $\tau\in(0,T]$,

$$\int\limits_{Q_{1,\tau}}\Bigg[u_{ttt}^N u_{tt}^N+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_itt}^N u_{x_jtt}^N+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_it}^N u_{x_jtt}^N+$$
$$+c_1(x)|u_{tt}^N|^2+g_1(x)(p(x)-1)|u^N|^{p(x)-2}u_t^N u_{tt}^N\Bigg]dxdt+\int\limits_{Q_{2,\tau}}\Bigg[v_{ttt}^N v_{tt}^N+$$
$$+\sum_{i,j=1}^n\alpha_{ij}(x)v_{x_it}^N v_{x_jtt}^N+c_2(x)|v_{tt}^N|^2+g_2(x)(q(x)-1)|v^N|^{q(x)-2}v_t^N v_{tt}^N\Bigg]dxdt=0. \tag{17}$$

Перетворимо та оцінимо доданки рівності (17), враховуючи умови теореми. Оскільки $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\frac{2n}{n-2}}=1$, то згідно з нерівністю Гельдера запишемо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_1}g_1(x)(p(x)-1)|u^N|^{p(x)-2}u_t^N u_{tt}^N\,dx\leqslant$$
$$\leqslant g_1^0(p^0-1)\left|\left||u^N|^{p(x)-2}\right|\right|_{L^n(\Omega_1)}||u_t^N||_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_1)}||u_{tt}^N||_{L^2(\Omega_1)}.$$

Позаяк вкладення $H_0^1(\Omega_1) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_1)$ неперервне, то виконується нерівність

$$||u_t^N||_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_1)} \leqslant \kappa_1 ||\nabla u_t^N||_{L^2(\Omega_1)}, \text{ де } \kappa_1 > 0.$$

На підставі леми 1 [10, с. 168], теореми 2.8 [7, с. 600], вкладення $H_0^1(\Omega_1) \subset \subset L^{n(p^0-2)}(\Omega_1)$ та оцінки (13), запишемо низку нерівностей

$$\big|\big|\,|u^N|^{p(x)-2}\big|\big|_{L^n(\Omega_1)} = \Bigg(\int\limits_{\Omega_1} |u^N|^{n(p(x)-2)}\,dx\Bigg)^{1/n} \leqslant \Bigg(S_{n(p-2)}\big(||u^N||_{L^{n(p(x)-2)}(\Omega_1)}\big)\Bigg)^{1/n} \leqslant$$

$$\leqslant M_3 \Bigg(S_{n(p-2)}\big(||u^N||_{L^{n(p^0-2)}(\Omega_1)}\big)\Bigg)^{1/n} \leqslant M_4 \Bigg(S_{n(p-2)}\big(||\nabla u^N||_{L^2(\Omega_1)}\big)\Bigg)^{1/n} \leqslant M_5.$$

Отже,

$$\int\limits_{Q_{1,\tau}} g_1(x)(p(x)-1)|u^N|^{p(x)-2}u_t^N u_{tt}^N\,dx \leqslant \frac{M_6}{2} \int\limits_{Q_{1,\tau}} \left[\frac{1}{\delta_1}|\nabla u_t^N|^2 + \delta_1 |u_{tt}^N|^2\right] dxdt.$$

Аналогічно отримуємо нерівність

$$\int\limits_{Q_{2,\tau}} g_2(x)(q(x)-1)|v^N|^{q(x)-2}v_t^N v_{tt}^N\,dx \leqslant \frac{M_7}{2} \int\limits_{Q_{2,\tau}} \left[\frac{1}{\delta_2}|\nabla v_t^N|^2 + \delta_2 |v_{tt}^N|^2\right] dxdt.$$

Використовуючи ці оцінки та умови **(A)**, **(B)**, рівність (17) перепишемо у вигляді

$$\int\limits_{\Omega_{1,\tau}} \left[|u_{tt}^N|^2 + b_0|\nabla u_t^N|^2\right] dx + \int\limits_{Q_{1,\tau}} \left[2a_0|\nabla u_{tt}^N|^2 + (2c_{1,0} - M_6\delta_1)|u_{tt}^N|^2\right] dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{2,\tau}} \left[|v_{tt}^N|^2 + \alpha_0|\nabla v_t^N|^2\right] dx + (2c_{2,0} - M_7\delta_2) \int\limits_{Q_{2,\tau}} |v_{tt}^N|^2\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_6}{\delta_1} \int\limits_{Q_{1,\tau}} |\nabla u_t^N|^2\,dxdt + \frac{M_7}{\delta_2} \int\limits_{Q_{2,\tau}} |\nabla v_t^N|^2\,dxdt + \int\limits_{\Omega_{1,0}} \left[|u_{tt}^N(x,0)|^2 + b^0|\nabla u_1^N|^2\right] dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{2,0}} \left[|v_{tt}^N(x,0)|^2 + \alpha^0|\nabla v_1^N|^2\right] dx. \qquad (18)$$

Оцінимо $\int_{\Omega_{1,0}} |u_{tt}^N(x,0)|^2\,dx$ та $\int_{\Omega_{2,0}} |v_{tt}^N(x,0)|^2\,dx$. Для цього помножимо (10) відповідно на функції $C_{k,tt}^N$, підсумуємо за k від 1 до N та приймемо в одержаній рівності $t = 0$

$$\int\limits_{\Omega_{1,0}} \Bigg[|u_{tt}^N(0)|^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{1,x_i}^N u_{x_j tt}^N(0) + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{0,x_i}^N u_{x_j tt}^N(0) +$$

$$+c_1 u_1^N u_{tt}^N(0) + g_1 |u_0^N|^{p(x)-2} u_0^N u_{tt}^N(0)\Big] \, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{2,0}} \Big[|v_{tt}^N(0)|^2 + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{0,x_i}^N v_{x_j tt}^N(0) + c_2 v_1^N v_{tt}^N(0) + g_2 |v_0^N|^{q(x)-2} v_0^N v_{tt}^N(0) \Big] \, dx = 0. \quad (19)$$

Враховуючи умову ($\mathbf{U}$), запишемо

$$\int\limits_{\Omega_{1,0}} \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{1,x_i}^N u_{x_j tt}^N(0) + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{0,x_i}^N u_{x_j tt}^N(0) \Big] \, dx + \int\limits_{\Omega_{2,0}} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{0,x_i}^N v_{x_j tt}^N(0) \, dx =$$

$$= - \int\limits_{\Omega_{1,0}} \Big[\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{1,x_i}^N)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} u_{0,x_i}^N)_{x_j} \Big] u_{tt}^N(0) \, dx - \int\limits_{\Omega_{2,0}} \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij} v_{0,x_i}^N)_{x_j} v_{tt}^N(0) \, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{1,x_i}^N + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{0,x_i}^N \Big] \nu_j u_{tt}^N(0) \, dS - \int\limits_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{0,x_i}^N \nu_j v_{tt}^N(0) \, dS =$$

$$= - \int\limits_{\Omega_{1,0}} \Big[\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{1,x_i}^N)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} u_{0,x_i}^N)_{x_j} \Big] u_{tt}^N(0) \, dx - \int\limits_{\Omega_{2,0}} \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij} v_{0,x_i}^N)_{x_j} v_{tt}^N(0) \, dx.$$

Крім того, з вкладення простору $H^2(\Omega_1)$ у простір $L^{2(p^0-1)}(\Omega_1)$, теореми 2.8 [7, с. 600] та леми 1 [10, с. 168] отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{1,0}} g_1 |u_0^N|^{p(x)-2} u_0^N u_{tt}^N(0) \, dx \leqslant \frac{g_1^0}{2} \int\limits_{\Omega_{1,0}} \Big[\delta_3 |u_{tt}^N(0)|^2 + \frac{1}{\delta_3} |u_0^N|^{2(p(x)-1)} \Big] \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{g_1^0 \delta_3}{2} \int\limits_{\Omega_{1,0}} |u_{tt}^N(0)|^2 \, dx + M_8 S_{2(p-1)}\big(||u_0^N||_{H^2(\Omega_1)} \big),$$

де $\delta_3 > 0$ і константа M_8 не залежить від N.
Аналогічно

$$\int\limits_{\Omega_{2,0}} g_2 |v_0^N|^{q(x)-2} v_0^N v_{tt}^N(0) \, dx \leqslant \frac{g_2^0 \delta_4}{2} \int\limits_{\Omega_{2,0}} |v_{tt}^N(0)|^2 \, dx + M_9 S_{2(p-1)}\big(||v_0^N||_{H^2(\Omega_2)} \big),$$

де $\delta_4 > 0$ і константа M_9 не залежить від N.

З одержаних оцінок та з (19) робимо висновок про те, що $\int_{\Omega_{1,0}} |u_{tt}^N(0)|^2 \, dx + \int_{\Omega_{2,0}} |v_{tt}^N(0)|^2 \, dx \leqslant M_{10}$ і константа M_{10} не залежить від N. Тоді з (18), на підставі леми Гронуолла-Белмана та (13), матимемо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{1,\tau}} \Big[|u_{tt}^N|^2 + |\nabla u_t^N|^2 \Big] \, dx + \int\limits_{Q_{1,\tau}} \Big[|u_{tt}^N|^2 + |\nabla u_{tt}^N|^2 \Big] \, dx dt +$$

$$+\int\limits_{\Omega_{2,\tau}} \left[|v_{tt}^N|^2 + |\nabla v_t^N|^2\right] dx + \int\limits_{Q_{2,\tau}} |v_{tt}^N|^2\, dxdt \leqslant M_{11}, \tag{20}$$

правильну для всіх $\tau \in (0,T]$; константа M_{11} не залежить від N.

На підставі (14), (15) та (20) існує підпослідовність послідовності $\{(u^N, v^N)\}_{N\in\mathbb{N}}$ (нехай це знову буде $\{(u^N, v^N)\}_{N\in\mathbb{N}}$) така, що

$(u^N, v^N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} (u,v)$ $*-$ слабко в $L^\infty(0,T;V)$,
$(u_t^N, v_t^N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} (u_t, v_t)$ $*-$ слабко в $L^\infty(0,T;V_2)$,
$(u^N, v^N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} (u,v)$ $*-$ слабко в $L^\infty(0,T;V_3)$,
$\left(|u^N|^{p(x)-2}u^N, |v^N|^{q(x)-2}v^N\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} (\xi_1, \xi_2)$ слабко в $L^{p'(x)}(Q_{1,T}) \times L^{q'(x)}(Q_{2,T})$,
$(u_t^N, v_t^N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} (u_t, v_t)$ слабко в $L^2(0,T;V)$,
$(u_{tt}^N, v_{tt}^N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} (u_{tt}, v_{tt})$ $*-$ слабко в $L^\infty(0,T;V_2)$,

$$u_{tt}^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} u_{tt} \text{ слабко в } L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1_\Gamma(\Omega_1)). \tag{21}$$

Збіжність (21_1) гарантує, що послідовність $\{(u^N, v^N)\}_{N\in\mathbb{N}}$ обмежена в $L^2(0,T;V)$ для довільного $T > 0$. Оскільки вкладення $V \subset V_2$ компактне, $\{(u_t^N, v_t^N)\}_{N\in\mathbb{N}}$ обмежена в $L^2(0,T;V_2)$, то можна вважати, що

$$(u^N, v^N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} (u,v) \text{ сильно в } L^2(0,T;V),$$

$$u^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ майже скрізь в } Q_{1,T}, \quad v^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} v \text{ майже скрізь в } Q_{2,T}.$$

Тоді $|u^N|^{p(x)-2}u^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} |u|^{p(x)-2}u$ майже скрізь в $Q_{1,T}$, $|v^N|^{q(x)-2}v^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} |v|^{q(x)-2}v$ майже скрізь в $Q_{2,T}$ і, згідно з (21_4) та лемою 1.19 ([8], с. 39), $\xi_1 = |u^N|^{p(x)-2}u^N$, $\xi_2 = |v^N|^{q(x)-2}v^N$. Крім того, з (21_1), (21_5), (21_6) одержуємо, що $(u,v) \in C\big([0,+\infty);V_2\big)$, $(u_t, v_t) \in C\big([0,+\infty);V_2\big)$. Діючи так само, як в ([1], с. 26), доводимо, що пара функцій (u,v) задовольняє рівність (9) та умови (3)-(4), тобто є узагальненим розв'язком задачі (2)-(7).

Єдиність одержаного розв'язку доводимо методом від супротивного. Припустивши, що (u_1, v_1) та (u_2, v_2) – два різні розв'язки задачі (2)-(7), для їхньої різниці $(u,v) \equiv (u_1 - u_2, v_1 - v_2)$ легко одержати рівність

$$\int\limits_{Q_{1,\tau}} \Bigg[u_{tt}u_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i t} u_{x_j t} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j t} + c_1(x)|u_t|^2 +$$
$$+ g_1(x)\big(|u^1|^{p(x)-2}u^1 - |u^2|^{p(x)-2}u^2\big)(u_t^1 - u_t^2)\Bigg] dxdt + \int\limits_{Q_{2,\tau}} \Bigg[v_{tt}v_t + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) v_{x_i} v_{x_j t} +$$
$$+ c_2(x)|v_t|^2 + g_2(x)\big(|v^2|^{q(x)-2}v^1 - |v^2|^{q(x)-2}v^2\big)(v_t^1 - v_t^2)\Bigg] dxdt = 0.$$

Діючи так само, як в [1, с. 27], отримуємо, що насправді $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. Теорему доведено.

Для майже всіх $t \in (0,+\infty)$ введемо функціонал

$$E(t)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{1,t}}\left[u_t^2+\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\right]dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{2,t}}\left[v_t^2+\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(x)v_{x_i}v_{x_j}\right]dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega_{1,t}}\frac{1}{p(x)}\,g_1(x)|u|^{p(x)}\,dx+\int\limits_{\Omega_{2,t}}\frac{1}{q(x)}\,g_2(x)|v|^{q(x)}\,dx.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* ***(A)***, ***(B)***, ***(C)***, ***(PQ)***, ***(U)*** *і* (u,v) *– узагальнений розв'язок задачі (2)-(7). Тоді правильна нерівність*

$$E(t)\leqslant 4E(0)e^{-\omega t},\quad t>0,\quad \omega>0. \tag{22}$$

Доведення. Запишемо похідну від E за t та скористаємося рівністю (9)

$$\frac{dE}{dt}=\int\limits_{\Omega_{1,t}}\left[u_{tt}u_t+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}u_{x_i}u_{x_jt}+g_1|u|^{p(x)-2}u_t\right]dx+\int\limits_{\Omega_{2,t}}\left[v_{tt}v_t+\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}v_{x_i}v_{x_jt}+\right.$$
$$\left.+g_2|v|^{q(x)-2}vv_t\right]dx=-\int\limits_{\Omega_{1,t}}\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_it}u_{x_jt}+c_1|u_t|^2\right]dx-\int\limits_{\Omega_{2,t}}c_2|v_t|^2\,dx. \tag{23}$$

Розглянемо функціонал

$$J(t)=E(t)+\varepsilon\int\limits_{\Omega_{1,t}}uu_t\,dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega_{2,t}}vv_t\,dx,\quad \varepsilon>0,\quad t>0. \tag{24}$$

Враховуючи (9), (23), отримаємо

$$\frac{dJ}{dt}=\frac{dE}{dt}+\varepsilon\int\limits_{\Omega_{1,t}}|u_t|^2\,dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega_{2,t}}|v_t|^2\,dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega_{1,t}}u_{tt}u\,dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega_{2,t}}v_{tt}v\,dx=$$
$$=-\int\limits_{\Omega_{1,t}}\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_it}u_{x_jt}+c_1|u_t|^2\right]dx-\int\limits_{\Omega_{2,t}}c_2|v_t|^2\,dx+$$
$$+\varepsilon\int\limits_{\Omega_{1,t}}|u_t|^2\,dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega_{2,t}}|v_t|^2\,dx-\varepsilon\int\limits_{\Omega_{1,t}}\left[\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}u_{x_i}u_{x_j}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_it}u_{x_j}+\right.$$
$$\left.+c_1u_tu+g_1|u|^{p(x)}\right]dx-\varepsilon\int\limits_{\Omega_{2,t}}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}v_{x_i}v_{x_j}+c_2v_tv+g_2|v|^{q(x)}\right]dx.$$

Оцінимо деякі доданки останньої рівності, використовуючи умови (**A**), (**B**), (**C**) та нерівності Фрідріхса [8]

$$\int\limits_{\Omega_{1,t}}|u|^2\,dx\leqslant\delta_5\int\limits_{\Omega_{1,t}}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx,\qquad\int\limits_{\Omega_{2,t}}|v|^2\,dx\leqslant\delta_6\int\limits_{\Omega_{1,2}}\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^2\,dx,\quad\delta_5>0,\quad\delta_6>0.$$

Матимемо

$$-\int\limits_{\Omega_{1,t}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j}\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega_{1,t}} \left[\frac{B_0}{2\delta_7} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i t}|^2 + \frac{\delta_7}{2} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\right] dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega_{1,t}} \left[\frac{B_0}{2a_0\delta_7} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} + \frac{\delta_7}{2b_0} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\right] dx, \quad \delta_7 > 0,$$

$B_0 = \sup\limits_{\Omega_1} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(x)$; далі

$$-\int\limits_{\Omega_{1,t}} c_1 u_t u dx \leqslant \int\limits_{\Omega_{1,t}} \left[\frac{c_1^0}{2\delta_8}|u_t|^2 + \frac{c_1^0\delta_8}{2}|u|^2\right] dx \leqslant \frac{c_1^0}{2\delta_8} \int\limits_{\Omega_{1,t}} |u_t|^2 dx + \frac{c_1^0\gamma_1\delta_8}{2} \int\limits_{\Omega_{1,t}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_1^0}{2\delta_8 c_{1,0}} \int\limits_{\Omega_{1,t}} c_1 |u_t|^2\, dx + \frac{c_1^0\gamma_1\delta_8}{2b_0} \int\limits_{\Omega_{1,t}} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\, dx, \quad \delta_8 > 0.$$

Подібними міркуваннями можна отримати оцінку

$$-\int\limits_{\Omega_{2,t}} c_2 v_t v\, dx \leqslant \frac{c_2^0}{2\delta_9 c_{2,0}} \int\limits_{\Omega_{2,t}} c_2 |v_t|^2\, dx + \frac{c_2^0\gamma_2\delta_9}{2\alpha_0} \int\limits_{\Omega_{2,t}} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} v_{x_i} v_{x_j}\, dx, \quad \delta_9 > 0.$$

Отже,

$$\frac{dJ}{dt} \leqslant -\left(1 - \frac{B_0\varepsilon}{2a_0\delta_7}\right) \int\limits_{\Omega_{1,t}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t}\, dx - \left(1 - \frac{c_1^0\varepsilon}{2\delta_8 c_{1,0}}\right) \int\limits_{\Omega_{1,t}} c_1 |u_t|^2\, dx -$$
$$-\left(1 - \frac{c_2^0\varepsilon}{2\delta_9 c_{2,0}}\right) \int\limits_{\Omega_{2,t}} c_2 |v_t|^2\, dx + \frac{\varepsilon}{c_{1,0}} \int\limits_{\Omega_{1,t}} c_1 |u_t|^2\, dx + \frac{\varepsilon}{c_{2,0}} \int\limits_{\Omega_{2,t}} c_2 |v_t|^2\, dx -$$
$$-\varepsilon \int\limits_{\Omega_{1,t}} \left[\left(1 - \frac{\delta_7}{2b_0} - \frac{c_1^0\gamma_1\delta_8}{2b_0}\right) \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + g_1 |u|^{p(x)}\right] dx -$$
$$-\varepsilon \int\limits_{\Omega_{2,t}} \left[\left(1 - \frac{c_2^0\gamma_2\delta_9}{2\alpha_0}\right) \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + g_2 |v|^{q(x)}\right] dx.$$

Виберемо $\delta_7 = \frac{a_0}{1+c_1^0\gamma_1}$, $\delta_8 = \delta_7$, $\delta_9 = \frac{\alpha_0}{c_2^0\gamma_2}$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, де $\varepsilon_0 > 0$ – розв'язок системи

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{B_0\varepsilon_0}{2a_0\delta_7} \geqslant 0, \\ 1 - \dfrac{c_1^0\varepsilon_0}{2\delta_8 c_{1,0}} - \dfrac{\varepsilon_0}{c_{1,0}} \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ 1 - \dfrac{c_2^0\varepsilon_0}{2\delta_9 c_{2,0}} - \dfrac{\varepsilon_0}{c_{2,0}} \geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Тоді $\frac{dJ}{dt} \leqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{1,t}} c_1|u_t|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{2,t}} c_2|v_t|^2\,dx - \varepsilon_0\int\limits_{\Omega_{1,t}}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + g_1|u|^{p(x)}\Big]\,dx-$

$$-\varepsilon_0\int\limits_{\Omega_{2,t}}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + g_2|v|^{q(x)}\Big]\,dx \leqslant -\int\limits_{\Omega_{1,t}}\Big[\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + \frac{c_{1,0}}{2}|u_t|^2+$$

$$+\frac{p_0\varepsilon_0}{p}\,g_1|u|^{p(x)}\Big]\,dx - \int\limits_{\Omega_{2,t}}\Big[\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + \frac{c_{2,0}}{2}|v_t|^2 + \frac{q_0\varepsilon_0}{q}\,g_2|v|^{q(x)}\Big]\,dx$$

і, якщо, крім того, (при потребі зменшуємо ε_0) $\varepsilon_0 \leqslant c_{2,0}$, $\varepsilon_0 \leqslant c_{1,0}$, то

$$\frac{dJ}{dt} \leqslant -\varepsilon_0 E(t). \tag{25}$$

З (24) та нерівності Фрідріхса одержуємо

$$J(t) \leqslant E(t) + \frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{\Omega_{1,t}}\Big[|u|^2+|u_t|^2\Big]\,dx + \frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{\Omega_{2,t}}\Big[|v|^2+|v_t|^2\Big]\,dx \leqslant E(t) + \frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{\Omega_{1,t}}|u_t|^2\,dx+$$

$$+\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{\Omega_{2,t}}|v_t|^2\,dx + \frac{\varepsilon_0\gamma_1}{2b_0}\int\limits_{\Omega_{1,t}}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx + \frac{\varepsilon_0\gamma_2}{2\alpha_0}\int\limits_{\Omega_{2,t}}\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}v_{x_i}v_{x_j}\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{1,t}}\Big[\frac{1}{2}\Big(1+\frac{\varepsilon_0\gamma_1}{b_0}\Big)\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon_0)|u_t|^2 + \frac{1}{p}\,g_1|u|^{p(x)}\Big]\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{2,t}}\Big[\frac{1}{2}\Big(1+\frac{\varepsilon_0\gamma_2}{\alpha_0}\Big)\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon_0)|v_t|^2 + \frac{1}{q}\,g_2|v|^{q(x)}\Big]\,dx.$$

У разі потреби зменшуємо ε_0 й отримуємо оцінки $1+\frac{\varepsilon_0\gamma_1}{b_0} \leqslant 2$, $1+\varepsilon_0 \leqslant 2$, $1+\frac{\varepsilon_0\gamma_2}{\alpha_0} \leqslant 2$. Тоді

$$J(t) \leqslant 2E(t). \tag{26}$$

Аналогічно, за рахунок вибору ε_0 (зменшуючи його у разі потреби) одержуємо оцінку

$$J(t) \geqslant E(t) - \frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{\Omega_{1,t}}\Big[|u|^2+|u_t|^2\Big]dx - \frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{\Omega_{2,t}}\Big[|v|^2+|v_t|^2\Big]dx \geqslant \frac{1}{2}E(t).$$

Тому з (25), (26) матимемо, що $\frac{dJ}{dt} \leqslant -\frac{\varepsilon_0}{2}J(t)$. Звідки $J(t) \leqslant J(0)e^{-\omega t}$, де $\omega = \frac{\varepsilon_0}{2}$. Оскільки $J(0) \leqslant 2E(0)$ і $J(t) \geqslant \frac{1}{2}E(t)$, то правильна оцінка (22). Теорему доведено.

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.-Л.* – М.: Мир, 2002. – 587 с.
2. *Georgiev V.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms / *Georgiev V., Todorova G.* // J. Diff. Equations – 1994. – Vol. 109. – P. 295-308.
3. *Барабаш Г.* Мішана задача для одного слабко нелінійного гіперболічного рівняння у необмеженій області / *Барабаш Г.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64 – С. 7-19.

4. *Greenberg J.M.* The equation $\sigma'(u_x)u_{tt}+\lambda u_{xtx}=\rho_0 u_{tt}$ / *Greenberg J.M., Mac Camy R.C., Mizel V.J.* // Journal of Mathematics and Mechanics – 1968. – Vol. 17, №7. – P. 707-728.
5. *Глазатов С.Н.* Некоторые задачи для нелинейных уравнений третьего порядка / *Глазатов С.Н.* – Новосибирск: Ин-т математики Сиб. отд-ние РАН, 1992. (Препринт / РАН, Сиб. отд-ние, Ин-тут математики: №7).
6. *Бугрій О.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва / *Бугрій О., Доманська Г., Процах Н.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 64. – 2005. – С. 44-61.
7. *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ / *Kováčik O., Rákosnik J.* // Czechoslovak Math. J. – 1991. – Vol. 41, №116. – P. 592-618.
8. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.
9. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* – М.: Изд-во "Иностранная литература", 1958. – 474 с.
10. *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності / *Бугрій О.М.* // Математичні Студії – Т. 24, №2. – 2005. – С. 167-172.

ADJOINT PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS OF THE SECOND AND THIRD ORDER

$\boxed{\text{Serhij LAVRENYUK}}$, **Oksana PANAT**

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

In the domain $\Omega\times(0,+\infty)$, where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^n$ and $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$, $\Omega_i\neq\emptyset$, $i\in\{1,2\}$, $\overline{\Omega}_1\cap\overline{\Omega}_2=\Gamma$, the adjoint problem for hyperbolic equations of the second and third order is considered. Some conditions are stated which provides the existence and uniqueness of the problems' generalized solution. We also studied the asymptotic behavior of the solution at $t\to\infty$.

Key words: adjoint problem, hyperbolic equation of the second and third order.

Стаття надійшла до редколегії 11.07.2008

Прийнята до друку 22.10.2008