ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.253-269 Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.253-269

УДК 517.95

НЕІСНУВАННЯ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ГІБРИДНОЇ СИСТЕМИ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Галина ТОРГАН

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Розглянуто гібридну систему еволюційних рівнянь, одне з яких містить другу похідну за часовою змінною, а друге – першу. Одержано деякі достатні умови існування розв'язку мішаної задачі для цієї системи в обмеженій циліндричній області, а також умови, за яких не існує глобального розв'язку.

Ключові слова: гібридна система еволюційних рівнянь, мішана задача.

В останнє десятиліття в літературі з'явилися дослідження двовимірної гібридної термоеластичної структури вигляду

$$\begin{aligned} &w_{tt} + \triangle^2 w + \alpha \triangle \Theta = 0, \\ &\beta \Theta_t - \eta \triangle \Theta - \alpha \triangle w_t = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

з додатними константами α, β, η, яка складається з термоеластичної плитки, до вільних кінців якої прикріплена балка. Такі системи описують термоеластичну плитку підсилену ефектом запам'ятовування, структури з керамічним механізмом, електромагнітні структури з електричним датчиком [1]-[6].

У працях [7]-[8] досліджено коректне формулювання задачі для поперечних коливань двовимірної гібридної термоеластичної структури (1), яка складається з тонкої прямокутної термоеластичної плитки, з'єднаної з балкою. Припускають, що плитка і балка є залежними від невідомої температури $\Theta = \Theta(x, y, t)$.

У цій праці розглянуто еволюційну систему двох рівнянь, одне з яких містить другу похідну за часовою змінною, а друге – першу. Таку систему можна розглядати як певне узагальнення гібридної структури (1). Одержано деякі достатні умови існування розв'язку мішаної задачі для цієї еволюційної системи в обмеженій циліндричній області, а також умови, за яких глобального розв'язку задачі не існує.

Нехай Ω – обмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0, T]$, $Q = \Omega \times (0, +\infty)$, $S = \partial\Omega \times (0, +\infty)$. В області Q розглянемо задачу для системи рівнянь з дійснозначними коефіцієнтами

$$u_{tt}+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}(a_{ij}^{sl}(x,t)u_{x_ix_j})_{x_sx_l}-\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}^{0}(x,t)v_{x_j})_{x_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}c_i(x,t)v_{x_i}+c_0(x,t)u_t+a_0(x,t)u+a_0^0(x,t)v-\gamma(x)|u|^{p-2}u=f_1(x,t), \qquad (2)$$

$$v_t-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}^{0}(x,t)v_{x_i})_{x_j}-\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}^{0}(x,t)u_{tx_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x,t)v_{x_i}+$$

$$+\alpha_0(x,t)u_t+\beta_0(x,t)v=f_2(x,t)$$

з початковими умовами

$$u\big|_{t=0}=u_0,\quad u_t\big|_{t=0}=u_1,\quad v\big|_{t=0}=v_0 \qquad (3)$$

і крайовими умовами

$$u\big|_S=0,\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_S=0,\quad v\big|_S=0, \qquad (4)$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні S, $p>2$. Надалі використовуватимемо банахові простори $L^r(\Omega)$, $r\in[1,+\infty)$ [9, с. 37], $H^k(\Omega)$, $H_0^l(\Omega)$, $k,l\in\mathbb{N}$ [9, с. 44].

Припустимо виконання таких умов:

(**A**) : $a_{ij}^{sl},\ a_{ijt}^{sl},\ a_{ijtt}^{sl},\ a_0,\ a_{0t},\ a_0^0,\ a_{0t}^0,\ a_{ij}^0,\ a_{ijt}^0,\ a_{ijtt}^0,\ \alpha_0,\ \alpha_{0t}\in L^\infty(Q_T)$,
$D^\alpha a_{ij}^{sl}(\cdot,0),\ D^\beta a_{ij}^0(\cdot,0)\in L^\infty(\Omega),\ i,j,s,l\in\{1,...,n\},\ |\alpha|\leqslant 2,\ |\beta|\leqslant 1$,
де $D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$;

$$a_0(x,t)\geqslant A_0>0 \text{ для майже всіх } (x,t)\in Q_T;$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^0(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant A_1\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$$

для майже всіх $(x,t)\in Q_T$ і всіх $\xi_i\in\mathbb{R}$, де $A_1>0$

$$\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x,t)\xi_{ij}\xi_{sl}\geqslant A_2\sum_{i,j=1}^{n}|\xi_{ij}|^2$$

для майже всіх $(x,t)\in Q_T$ і всіх $\xi_{ij}\in\mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij}=\xi_{ji}$, де $A_2>0$;

$$a_{ij}^0(x,t)=a_{ji}^0(x,t),\ a_{ij}(x,t)=a_{ji}(x,t),\ a_{ij}^{sl}(x,t)=a_{sl}^{ij}(x,t)$$

для майже всіх $(x,t)\in Q_T$ і всіх $i,j,s,l\in\{1,...,n\}$;

(**B**) : $b_{ij},\ b_{ijt},\ b_{ijtt},\ b_{ij}^0,\ b_{ijt}^0,\ b_{ijtt}^0,\ \beta_i,\ \beta_{it},\ \beta_0,\ \beta_{0t}\in L^\infty(Q_T)$,
$D^\beta b_{ij}(\cdot,0),\ D^\beta b_{ij}^0(\cdot,0)\in L^\infty(\Omega),\ i,j\in\{1,...,n\},\ |\beta|=1$;

$$\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant B_1\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$$

для майже всіх $(x,t)\in Q_T$ і всіх $\xi\in\mathbb{R}^n,\ B_1>0$;

$\beta_0(x,t) \geqslant B_0 > 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$;

$b_{ij}(x,t) = b_{ji}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$ і всіх $i,j \in \{1,...,n\}$;

$(\mathbf{C}) : c_i,\ c_{it},\ c_0,\ c_{0t} \in L^\infty(Q_T),\ i,j \in \{1,...,n\},\ \gamma \in L^\infty(\Omega)$,

$0 < C_0 \leqslant c_0(x,t) \leqslant C^0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$,

$0 < \gamma_0 \leqslant \gamma(x) \leqslant \gamma_1$ для майже всіх $x \in \Omega$;

$(\mathbf{F}) : f_1,\ f_{1t},\ f_2,\ f_{2t} \in L^2(Q_T)$.

Означення 1. *Функції* $u \in C([0,T_1]; H_0^2(\Omega)) \cap L^\infty((0,T_1); L^p(\Omega))$, $v \in C([0,T_1]; H_0^1(\Omega))$ *такі, що* $u_t \in C([0,T_1]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty((0,T_1); H_0^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty((0,T_1); L^2(\Omega))$, $v_t \in L^\infty((0,T_1); H_0^1(\Omega))$ *і* u, v *задовольняють початкові умови (3) та систему*

$$\int_{\Omega_t} \Big[u_{tt} w + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x,t) u_{x_i x_j} w_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) u_{x_i} w_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^0(x,t) v_{x_j} w_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n c_i(x,t) v_{x_i} w + c_0(x,t) u_t w + a_0(x,t) u w + a_0^0(x,t) v w -$$

$$- \gamma(x)|u|^{p-2} u w - f_1(x,t) w \Big] dx = 0, \tag{5}$$

$$\int_{\Omega_t} \Big[v_t \widetilde{w} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x,t) v_{x_i} \widetilde{w}_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^0(x,t) u_{t x_i} \widetilde{w}_{x_j} + \sum_{i=1}^n \beta_i(x,t) v_{x_i} \widetilde{w} +$$

$$+ \alpha_0(x,t) u_t \widetilde{w} + \beta_0(x,t) v \widetilde{w} - f_2(x,t) \widetilde{w} \Big] dx = 0$$

для майже всіх $t \in (0,T_1)$, *всіх* $T_1 \in (0,T)$ *і всіх* $w \in H_0^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $\widetilde{w} \in H_0^1(\Omega)$, *називаємо узагальненим розв'язком задачі (2)–(4). Якщо* $T = +\infty$, *то розв'язок будемо називати глобальним.*

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{B})$, $(\mathbf{C})$, $(\mathbf{F})$, $u_0 \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$, $v_0 \in H_0^2(\Omega)$, $2 < p < \dfrac{2n-4}{n-4}$ *при* $n > 4$ *і* $p > 2$ *при* $n \in \{1,...,4\}$. *Тоді знайдеться таке число* $T > 0$, *що узагальнений розв'язок задачі (2)-(4) існує.*

Доведення. Для доведення існування розв'язку використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Оскільки простір $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ – сепарабельний банахів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\omega^k\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\omega^k\}$ ортонормована в $L^2(\Omega)$. Розглянемо функції $u^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^N c_k^N(t)\omega^k(x)$, $v^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^N d_k^N(t)\omega^k(x)$, $N = 1,2...$, де $c_1^N, c_2^N, ..., c_N^N, d_1^N, d_2^N, ..., d_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші

$$\int_{\Omega} \Big[u_{tt}^N \omega^k + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x,t) u_{x_i x_j}^N \omega_{x_s x_l}^k + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) u_{x_i}^N \omega_{x_j}^k - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^0(x,t) v_{x_j}^N \omega_{x_i}^k +$$

$$+a_0(x,t)u^N\omega^k+\sum_{i=1}^{n}c_i(x,t)v^N_{x_i}\omega^k+c_0(x,t)u^N_t\omega^k+a^0_0(x,t)v^N\omega^k-$$

$$-\gamma(x)|u^N|^{p-2}u^N\omega^k-f_1(x,t)\omega^k\Big]dx=0, \tag{6}$$

$$\int_\Omega\Big[v^N_t\omega^k+\sum_{i,j=1}^{n}a^0_{ij}(x,t)v^N_{x_i}\omega^k_{x_j}+\sum_{i,j=1}^{n}b^0_{ij}(x,t)u^N_{tx_i}\omega^k_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x,t)v^N_{x_i}\omega^k+$$

$$+\alpha_0(x,t)u^N_t\omega^k+\beta_0(x,t)v^N\omega^k-f_2(x,t)\omega^k\Big]dx=0,\ t\in[0,T],$$

$$c^N_k(0)=u^N_{0,k},\ c^N_{kt}(0)=u^N_{1,k},\ d^N_k(0)=v^N_{0,k},\ k=1,...,N, \tag{7}$$

де

$$u^N_0(x)=\sum_{k=1}^{N}u^N_{0,k}\omega^k(x),\quad \|u^N_0-u_0\|_{H^2_0(\Omega)\cap H^4(\Omega)}\to 0,$$

$$u^N_1(x)=\sum_{k=1}^{N}u^N_{1,k}\omega^k(x),\quad \|u^N_1-u_1\|_{H^2_0(\Omega)}\to 0,$$

$$v^N_0(x)=\sum_{k=1}^{N}v^N_{0,k}\omega^k(x),\quad \|v^N_0-v_0\|_{H^2_0(\Omega)}\to 0\quad \text{при}\quad N\to\infty. \tag{8}$$

На підставі теореми Каратеодорі [10, с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (6), (7) визначений на проміжку $[0,t_N)$ і такий, що $c^N_{1t},c^N_{2t},...,c^N_{Nt}$ абсолютно неперервні на $(0,t_N)$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_N=T$, де додатне число T уточнимо пізніше.

Домножимо перші рівняння системи (6) відповідно на c^N_{kt}, другі відповідно на $d^N_k,\ k\in\{1,...,N\}$. Отримані рівності підсумуємо за k від 1 до N, проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau\in(0,T)$, і додамо. Одержимо рівність

$$\int_{Q_\tau}\Big[u^N_{tt}u^N_t+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a^{sl}_{ij}u^N_{x_ix_j}u^N_{tx_sx_l}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}u^N_{x_i}u^N_{tx_j}-\sum_{i,j=1}^{n}b^0_{ij}v^N_{x_j}u^N_{tx_i}+\sum_{i=1}^{n}c_iv^N_{x_i}u^N_t+$$

$$+c_0u^N_tu^N_t+a_0u^Nu^N_t+a^0_0v^Nu^N_t-\gamma|u^N|^{p-2}u^Nu^N_t-f_1u^N_t+v^N_tv^N+\sum_{i,j=1}^{n}a^0_{ij}v^N_{x_i}v^N_{x_j}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}b^0_{ij}u^N_{tx_i}v^N_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}\beta_iv^N_{x_i}v^N+\alpha_0u^N_tv^N+\beta_0v^Nv^N-f_2v^N\Big]dxdt=0. \tag{9}$$

Очевидно, що

$$J_1:=\int_{Q_\tau}u^N_{tt}u^N_tdxdt=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u^N_t|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}|u^N_1|^2dx,$$

$$J_2 := \int_{Q_\tau} v_t^N v^N dxdt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} |v^N|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} |v_0^N|^2 dx.$$

Згідно з умовою (A)

$$J_3 := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x,t) u_{x_i x_j}^N u_{tx_s x_l}^N dxdt \geqslant \frac{A_2}{2}\int_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i x_j}^N|^2 dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x,0) u_{0x_i x_j}^N u_{0x_s x_l}^N dx - \frac{A_3+1}{2}\int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i x_j}^N|^2 dxdt.$$

Тут $A_3 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q} \sum\limits_{i,j,s,l=1}^{n} |a_{ijt}^{sl}(x,t)|^2$;

$$J_4 := \int_{Q_\tau} (\alpha_0(x,t) + a_0^0(x,t)) v^N u_t^N dxdt \geqslant -\frac{A_4}{2}\int_{Q_\tau} |v^N|^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dxdt.$$

Тут $A_4 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q} (a_0(x,t) + a_0^0(x,t))^2$;

$$J_5 := \int_{Q_\tau} a_0(x) u^N u_t^N dxdt \geqslant -A_0 T \int_{\Omega_0} |u_0^N|^2 dx - \frac{A_0(1+T^2)}{2}\int_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dxdt;$$

$$J_6 := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0(x,t) v_{x_i}^N v_{x_j}^N dxdt \geqslant A_1 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |v_{x_i}^N|^2 dxdt.$$

За умовою (B) маємо

$$J_7 := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) u_{x_i}^N u_{tx_j}^N dxdt \geqslant \frac{B_1}{2}\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^N|^2 dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,0) u_{0x_i}^N u_{0x_j}^N dx - \frac{B_2+1}{2}\int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^N|^2 dxdt,$$

де $B_2 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q} \sum\limits_{i,j=1}^{n} |b_{ijt}(x,t)|^2$;

$$J_8 := \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t) v_{x_i}^N v^N dxdt \geqslant -\frac{B_3\delta_1}{2}\int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |v_{x_i}^N|^2 dxdt - \frac{1}{2\delta_1}\int_{Q_\tau} |v^N|^2 dxdt.$$

Тут $B_3 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q} \sum\limits_{i=1}^{n} |\beta_i(x,t)|^2$, $\delta_1 > 0$;

$$J_9 := \int_{Q_\tau} \beta_0(x,t) v^2 dxdt \geqslant B_0 \int_{Q_\tau} |v|^2 dxdt.$$

На підставі (C) одержумо такі оцінки:

$$J_{10} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t) v^N_{x_i} u^N_t \, dxdt \geqslant -\frac{C_1\delta_2}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |v^N_{x_i}|^2 dxdt - \frac{1}{2\delta_2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2 dxdt,$$

де $C_1 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q} \sum\limits_{i=1}^{n} |c_i(x,t)|^2,\ \delta_2 > 0;$

$$J_{11} := \int\limits_{Q_\tau} c_0(x,t) |u^N_t|^2 dxdt \geqslant C_0 \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2 dxdt.$$

З умови (F) випливає

$$J_{12} := \int\limits_{Q_\tau} f_1(x,t) u^N_t \, dxdt \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |f_1(x,t)|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2 dxdt;$$

$$J_{13} := \int\limits_{Q_\tau} f_2(x,t) v^N \, dxdt \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |f_2(x,t)|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |v^N|^2 dxdt.$$

Розглянемо

$$J_{14} := \int\limits_{Q_\tau} \gamma(x) |u^N|^{p-2} u^N u^N_t \, dxdt \leqslant \frac{\gamma_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[|u^N_t|^2 + |u^N|^{2(p-1)} \right] dxdt.$$

На підставі теореми вкладення [9, с. 47] та нерівності Фрідріхса для майже всіх $t \in (0,\tau)$, $\forall\, z \in H^2_0(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega_t} |z|^{2(p-1)} dx \leqslant K_0 \left(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} |z^N_{x_i x_j}|^2 dx \right)^{p-1}, \tag{10}$$

де $p \leqslant \dfrac{2n-4}{n-4}$ при $n > 4$ і $p > 2$ при $n \leqslant 4$, K_0 – деяка додатна константа, яка не залежить від z. Отже,

$$J_{14} \leqslant \frac{\gamma_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2 dxdt + \frac{\gamma_1 K_0}{2} \int\limits_0^\tau \left(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} |u^N_{x_i x_j}|^2 dx \right)^{p-1} dt.$$

Враховуючи одержані оцінки інтегралів $J_1 - J_{14}$, з (9) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[|u^N_t|^2 + |v^N|^2 + A_2 \sum_{i,j=1}^{n} |u^N_{x_i x_j}|^2 + B_1 \sum_{i=1}^{n} |u^N_{x_i}|^2 \right] dx + \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |v^N_{x_i}|^2 \big(2A_1 - B_3\delta_1 -$$

$$-C_1\delta_2 \big) dxdt \leqslant \int\limits_{Q_\tau} \left[(A_3+1) \sum_{i,j=1}^{n} |u^N_{x_i x_j}|^2 + |v^N|^2 \left(A_4 + \frac{1}{\delta_1} - 2B_0 + 1 \right) + \right.$$

$$+|u_t^N|^2\left(2+\frac{1}{\delta_2}+A_0(1+T^2)-2C_0+\gamma_1\right)+(B_2+1)\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\Bigg]dxdt+$$

$$+\gamma_1 K_0\int_0^\tau\left(\int_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}^N|^2dx\right)^{p-1}dt+2F^N+\int_{Q_\tau}\left[|f_1(x,t)|^2+|f_2(x,t)|^2\right]dxdt, \quad (11)$$

де

$$F^N=\int_{\Omega_0}\left[|u_1^N|^2+|v_0^N|^2+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}u_{0x_ix_j}^N u_{0x_sx_l}^N+2A_0T|u_0^N|^2+\sum_{i=1}^n b_{ij}u_{0x_i}^N u_{0x_j}^N\right]dx.$$

Виберемо δ_1, δ_2 так, щоб $2A_1>B_3\delta_1+C_1\delta_2$. Згідно з умовами на u_0 і u_1 існує таке N_0, що $F^N\leqslant 2F_0$ при $N\geqslant N_0$, де

$$F^0=\int_{\Omega_0}\left[|u_1|^2+|v_0|^2+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}u_{0x_ix_j}u_{0x_sx_l}+2A_0T|u_0|^2+\sum_{i=1}^n b_{ij}u_{0x_i}u_{0x_j}\right]dx.$$

Використаємо в (11) лему Гронуолла-Белмана. Після нескладних перетворень одержимо рівність

$$\int_{\Omega_\tau}\left[|u_t^N|^2+|v^N|^2+\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\right]dx+\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|v_{x_i}^N|^2dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\mu_1\int_0^\tau\left(\int_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}^N|^2dx\right)^{p-1}dt+\mu_2, \quad (12)$$

де μ_1, μ_2 – додатні константи, які залежать від коефіцієнтів системи, початкових даних і вільних членів.

Використовуючи лему Біхарі [11, с. 110], з (12) отримаємо оцінку

$$\int_{\Omega_\tau}\left[|u_t^N|^2+|v^N|^2+\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\right]dx+\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|v_{x_i}^N|^2dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\mu_3}{[1-(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1\tau]^{1/(p-2)}},\quad \mu_3>0.$$

Нехай $\tau\in[0,T_0]$, $T_0<\dfrac{1}{(p-2)\mu_6^{p-2}\mu_5}$. Тоді $1-(p-2)\mu_6^{p-2}\mu_5\tau>1-(p-2)\mu_6^{p-2}\mu_5T_0>0$, тому

$$\int_{\Omega_\tau}\left[|u_t^N|^2+|v^N|^2+\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\right]dx+\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|v_{x_i}^N|^2dxdt\leqslant\mu_4, \quad (13)$$

де $\mu_4>0$. Отже,

$$||u_t^N||_{L^\infty((0,T_0);L^2(\Omega))}\leqslant\mu_4,\ ||u^N||_{L^\infty((0,T_0);H_0^2(\Omega))}\leqslant\mu_4,\ ||v^N||_{L^2((0,T_0);H_0^1(\Omega))}\leqslant\mu_4. \quad (14)$$

Використавши (10), одержимо нерівність

$$J_2 := (p-1)\int\limits_{Q_\tau}\gamma(x)|u^N|^{p-2}u_t^N u_{tt}^N dxdt \leqslant (p-1)\gamma_1\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{p-2}u_t^N u_{tt}^N dxdt \leqslant (p-1)\gamma_1\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{Q_\tau}|u_{tt}^N|^2dxdt\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{2(p-1)}dxdt\Bigg)^{(p-2)/2(p-1)}\Bigg(\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^{2(p-1)}dxdt\Bigg)^{1/2(p-1)}\leqslant$$

$$\leqslant \mu_5\int\limits_{Q_\tau}|u_{tt}^N|^2dxdt+\mu_6\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}^N|^2dx\Bigg)^{p-1}dt+\mu_7\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n|u_{tx_ix_j}^N|^2dx\Bigg)^{p-1}dt,$$

де $\mu_5,\ \mu_6,\ \mu_7$ – додатні константи, які не залежать від N.

Диференціюємо за t систему (6). Після нескладних перетворень отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[u_{ttt}^N u_{tt}^N+\sum_{i,j,s,l=1}^n(a_{ijt}^{sl}u_{tx_ix_j}^N+a_{ij}^{sl}u_{ttx_ix_j}^N)u_{ttx_sx_l}^N+\sum_{i,j=1}^n(b_{ijt}u_{x_i}^N+b_{ij}u_{tx_i}^N)u_{ttx_i}^N+$$

$$+\sum_{i,j=1}^n b_{ijt}^0(u_{tx_i}^N v_{tx_j}^N-v_{x_j}^N u_{ttx_i}^N)+(c_{0t}u_t^N+c_0u_{tt}^N)u_{tt}^N+(a_{0t}u^N+a_0u_t^N)u_{tt}^N+(a_{0t}^0v^N+$$

$$+a_0^0(x,t)v_t^N)u_{tt}^N-(p-1)\gamma|u^N|^{p-2}u_t^N u_{tt}^N-f_{1t}u_{tt}^N+v_{tt}^N v_t^N+\sum_{i,j=1}^n(a_{ijt}^0v_{x_i}^N+a_{ij}^0v_{tx_i}^N)v_{tx_j}^N+$$

$$+\sum_{i=1}^n(\beta_{it}v_{x_i}^N+\beta_iv_{tx_i}^N)v_t^N+(\alpha_{0t}u_t^N+\alpha_0u_{tt}^N)v_t^N+(\beta_{0t}v^N+\beta_0v_t^N)v_t^N-f_{2t}v_t^N\Bigg]dxdt=0. \quad (15)$$

Враховуючи умови теореми (**A**), (**B**), (**C**), (**F**) і попередню оцінку, можемо переконатися в правильності нерівності

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[|u_{tt}^N|^2+|v_t^N|^2+\sum_{i,j=1}^n|u_{tx_ix_j}^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2\Bigg]dx+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|v_{tx_i}^N|^2dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i,j=1}^n|u_{tx_ix_j}^N|^2+|u_{tt}^N|^2+|v_t^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2\Bigg]dxdt+$$

$$+\mu_8+\mu_9\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n|u_{tx_ix_j}^N|^2dx\Bigg)^{p-1}dt,\quad \tau\in[0,T_0].$$

Використавши лему Гронуолла-Белмана, з останньої оцінки одержимо, що

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[|u_{tt}^N|^2+|v_t^N|^2+\sum_{i,j=1}^n|u_{tx_ix_j}^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2\Bigg]dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|v_{tx_i}^N|^2dxdt \leqslant \mu_{10}+\mu_{11}\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2dx\right)^{p-1}dt, \quad \tau\in[0,T_0]. \tag{16}$$

Використовуючи лему Біхарі [11, с. 110], з (16) отримаємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_{tt}^N|^2+|v_t^N|^2+\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^2\right]dx+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|v_{tx_i}^N|^2dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu_{12}}{\left[1-(p-2)\,\mu_{10}^{p-2}\mu_{11}\tau\right]^{\frac{1}{p-2}}},$$

де $\tau\in[0,T_1]$, $T_1\leqslant T_0$ і $T_1<\dfrac{1}{(p-2)\mu_{10}^{p-2}\mu_{11}}$, $\mu_{12}>0$. Зазначимо, що $T<\min\left\{\dfrac{1}{(p-2)\mu_6^{p-2}\mu_5};\dfrac{1}{(p-2)\mu_{10}^{p-2}\mu_{11}}\right\}$. Отже, правильні оцінки

$$||u_t^N||_{L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega))}\leqslant\mu_{13},\ ||u_{tt}^N||_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))}\leqslant\mu_{13},\ ||v_t^N||_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))}\leqslant\mu_{13}, \tag{17}$$

де стала μ_{13} не залежить від N.

На підставі (14), (17) існують підпослідовності $\{u^{N_k}\}\subset\{u^N\}$, $\{v^{N_k}\}\subset\{v^N\}$ такі, що

$$\begin{gathered}
u^{N_k}\to u \quad *\text{- слабко в}\quad L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega)),\\
u_t^{N_k}\to u_t \quad *\text{- слабко в}\quad L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega)),\\
u_{tt}^{N_k}\to u_{tt} \quad *\text{- слабко в}\quad L^\infty((0,T);L^2(\Omega)),\\
v^{N_k}\to v \ \text{ слабко в}\quad L^2((0,T);H_0^1(\Omega)),\\
v_t^{N_k}\to v_t \ \text{ слабко в}\quad L^2((0,T);H_0^1(\Omega)) \ \text{ при } \ N_k\to\infty.
\end{gathered} \tag{18}$$

Крім того, з неперервного вкладення $H_0^2(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ для $2<p\leqslant\dfrac{2n}{n-2}$ при $n>4$ і $p>2$ для $n\in\{1,2,3,4\}$ матимемо, що

$$\int\limits_{Q_T}\left||u^N|^{p-2}u^N\right|^{p'}dxdt\leqslant\mu_{14},\ \mu_{14}>0.$$

Тому

$$|u^{N_k}|^{p-2}u^{N_k}\to\chi_0 \ \text{ слабко в } \ L^{p'}(Q_T).$$

Зазначимо, що послідовність $\{u^N\}$ обмежена в $L^2((0,T);H_0^2(\Omega))$, а послідовність $\{u_t^N\}$ обмежена в $L^2((0,T);L^2(\Omega))$. Оскільки $H_0^2(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ компактно при $p\in[2,\frac{2n}{n-4})$, $n>4$, то на підставі теореми 5.1 [12, с. 70] можемо вважати, що $u^{N_k}\to u$ сильно в $L^p((0,T);L^p(\Omega))$, тому і майже всюди в Q_T. Тому $\chi_0=|u|^{p-2}u$ майже всюди в Q_T.

Домножимо перші рівняння системи (6) на $d_k\in C([0,T])$, а другі на $\widetilde{d}_k\in C([0,T])$ відповідно. Отримані рівності підсумуємо за k від 1 до N. Нехай

$\eta^N = \sum\limits_{k=1}^{N} d_m(t)\omega^k(x)$, $\widetilde{\eta}^N = \sum\limits_{k=1}^{N} \widetilde{d}_m(t)\omega^k(x)$. В отриманій системі перейдемо до границі при $N_k \to \infty$, $N_k > N$. Сукупність всіх η^N позначимо через $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \mathcal{M}$, а множину $\widetilde{\eta}^N$ – $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{M}}$. Оскільки $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \mathcal{M}$ щільне в $H_0^2(\Omega_t)$, а $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{M}}$ щільне в $H_0^1(\Omega_t)$, то можемо перейти і до границі при $N \to \infty$. Одержимо систему з означення узагальненого розв'язку задачі (2)-(4).

Залишилося показати, що виконуються початкові умови.

Оскільки $u_{tt} \in L^2((0,T); L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2((0,T); H_0^2(\Omega))$, $u \in L^2((0,T); H_0^2(\Omega))$, $v \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$, $v_t \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$, тоді з леми 1.2 [12, с. 20] випливає, що $u : [0,T] \to H_0^2(\Omega)$, $u_t : [0,T] \to L^2(\Omega)$, $v : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ є неперервними функціями.

З оцінок одержаних вище маємо, що

$$u^{N_k}(\cdot,0) \to u(\cdot,0) \text{ слабко в } H_0^2(\Omega),$$

але $u^{N_k}(\cdot,0) = u_0^{N_k}(\cdot) \to u_0(\cdot)$ в $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, тому $u(x,0) = u_0(x)$. Так само

$$u_t^{N_k}(\cdot,0) \to u_t(\cdot,0) \text{ слабко в } H_0^2(\Omega),$$

але відомо, що $u_t^{N_k}(\cdot,0) = u_1^{N_k}(\cdot) \to u_1(\cdot)$ в $H_0^2(\Omega)$, тому $u_t(x,0) = u_1(x)$. Також

$$v^{N_k}(\cdot,0) \to v(\cdot,0) \text{ слабко в } H_0^1(\Omega),$$

але $v^{N_k}(\cdot,0) = v_0^{N_k}(\cdot) \to v_0(\cdot)$ в $H_0^2(\Omega)$, тому $v(x,0) = v_0(x)$. Отож, виконуються початкові умови (3). Отже, розв'язок існує.

Припустимо, що коефіцієнти рівняння (2) не залежать від t і $f_1(x,t) \equiv 0$, $f_2(x,t) \equiv 0$. Введемо позначення

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t} \left[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + a_0(x)u^2 + v^2\right] dx -$$

$$-\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega_t} \gamma(x)|u|^p dx; \tag{19}$$

$$A_4 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} (a_0(x) + \alpha_0(x))^2, \quad B_3 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} |\beta_i(x)|^2, \quad C_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} |c_i(x)|^2;$$

$$||D^2 u||_2 = \left(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2 dx\right)^{1/2}, \quad ||u||_r = \left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^r dx\right)^{1/r}, \quad r > 1, \quad u \in H^2(\Omega_t).$$

Нехай ν_1, ν_2, ν_3 – додатний розв'язок системи

$$2A_1\nu_1 - B_3\nu_1\nu_3 - C_1 > 0, \quad 2B_0\nu_3 - A_4\nu_2\nu_3 > 1, \quad 2C_0\nu_2 - \nu_1\nu_2 \geqslant 1. \tag{20}$$

Позначимо через $\triangle$ множину всіх додатних розв'язків системи (20).

Теорема 2. *Нехай існує узагальнений розв'язок* (u,v) *задачі (2)-(4),* $b^0_{ij}(x,t)=0$ *для майже всіх* $(x,t)\in Q_T$ *і всіх* $i,j\in\{1,...,n\}$*, множина* $\triangle\neq\emptyset$*,* $E(0)=-\lambda$*,* $\lambda>0$*,* $2<p\leqslant\dfrac{2n}{n-4}$ *при* $n>4$ *і* $p>2$ *при* $n\in\{1,2,3,4\}$*. Тоді не існує глобальний узагальнений розв'язок системи (2)-(4).*

Доведення. Припустимо, що існує глобальний узагальнений розв'язок задачі (2)-(4). Спочатку доведемо, що $E(t)<0$ для довільного $t>0$. Продиференціюємо (19) за t (зазначимо, що згідно з означенням E' існує майже для всіх t)

$$E'(t)=\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_{tt}u_t+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a^{sl}_{ij}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx_l}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)u_{x_i}u_{tx_j}+$$

$$+a_0(x)uu_t+vv_t-\gamma(x)|u|^{p-2}uu_t\Big]dx.$$

Але

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_{tt}u_t+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a^{sl}_{ij}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx_l}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)u_{x_i}u_{tx_j}+a_0(x)uu_t+vv_t-$$

$$-\gamma(x)|u|^{p-2}uu_t\Big]dx=\int\limits_{\Omega_t}\Big[-\sum_{i=1}^{n}c_i(x)v_{x_i}u_t-c_0(x)u_t^2-a^0_0(x)vu_t-\sum_{i,j=1}^{n}a^0_{ij}(x)v_{x_i}v_{x_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)v_{x_i}v-\alpha_0(x)u_tv-\beta_0(x)v^2\Big]dx,$$

тому

$$E'(t)=\int\limits_{\Omega_t}\Big[-\sum_{i=1}^{n}c_i(x)v_{x_i}u_t-c_0(x)u_t^2-a^0_0(x)vu_t-\sum_{i,j=1}^{n}a^0_{ij}(x)v_{x_i}v_{x_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)v_{x_i}v-\alpha_0(x)u_tv-\beta_0(x)v^2\Big]dx. \tag{21}$$

Оцінимо доданки (21)

$$\widehat{J}_1:=-\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}a^0_{ij}(x)v_{x_i}v_{x_j}dx\leqslant-A_1\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^2dx,$$

$$\widehat{J}_2:=-\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}c_i(x)v_{x_i}u_tdx\leqslant\frac{C_1}{2\nu_1}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^2dx+\frac{\nu_1}{2}\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2dx,\ \ \nu_1>0,$$

$$\widehat{J}_3:=-\int\limits_{\Omega_t}c_0(x)u_t^2dx\leqslant-C_0\int\limits_{\Omega_t}u_t^2dx,$$

$$\widehat{J}_4 := -\int\limits_{\Omega_t}(a_0^0(x)+\alpha_0(x))vu_t dx \leqslant \frac{A_4\nu_2}{2}\int\limits_{\Omega_t}|v|^2dx + \frac{1}{2\nu_2}\int\limits_{\Omega_t}u_t^2dx, \;\; \nu_2>2,$$

$$\widehat{J}_5 := -\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)v_{x_i}vdx \leqslant \frac{B_3\nu_3}{2}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^2dx + \frac{1}{2\nu_3}\int\limits_{\Omega_t}|v|^2dx, \;\; \nu_3>0,$$

$$\widehat{J}_6 := -\int\limits_{\Omega_t}\beta_0(x)|v|^2dx \leqslant -B_0\int\limits_{\Omega_t}|v|^2dx.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $\widehat{J}_1 - \widehat{J}_6$, з (21), матимемо

$$E'(t) \leqslant -\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[|u_t|^2\bigg(C_0-\frac{\nu_1}{2}-\frac{1}{2\nu_2}\bigg)+|v|^2\bigg(B_0-\frac{1}{2\nu_3}-\frac{A_4\nu_2}{2}\bigg)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^2\bigg(A_1-\frac{B_3\nu_3}{2}-\frac{C_1}{2\nu_1}\bigg)\Bigg]dx \leqslant 0, \tag{22}$$

якщо $(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\in\triangle$, то $E(t)\leqslant E(0)<0$, бо $E(0)<0$.

Введемо позначення

$$H(t) = -E(t), \;\; L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}uu_tdx + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}c_0(x)|u|^2dx.$$

Зрозуміло, що для $0<\alpha<1$

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant 3^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(H(t)+\varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}\left|\int\limits_{\Omega_t}uu_tdx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left|\frac{C^0\varepsilon}{2}\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\left|\int\limits_{\Omega_t}|u|^2dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right).$$

Оцінимо доданки останньої нерівності

$$\widehat{J}_7 := \left|\int\limits_{\Omega_t}uu_tdx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \bigg(\int\limits_{\Omega_t}|u|^2dx\bigg)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\bigg(\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2dx\bigg)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leqslant$$

$$\leqslant M_0\bigg(\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx\bigg)^{\frac{1}{p(1-\alpha)}}\bigg(\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2dx\bigg)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leqslant M_1(||u(\cdot,t)||_p^s+||u_t(\cdot,t)||_2^2),$$

де $s=\frac{2}{1-2\alpha}$, M_0, M_1 – додатні константи. Якщо $||u(\cdot,t)||_p\leqslant 1$, то за теоремою вкладення Соболєва $||u(\cdot,t)||_p^s \leqslant ||u(\cdot,t)||_p^2 \leqslant C||D^2u(\cdot,t)||_2^2$. Якщо $||u(\cdot,t)||_p>1$, то $||u(\cdot,t)||_p^s\leqslant||u(\cdot,t)||_p^p$. Тобто, правильна нерівність

$$||u(\cdot,t)||_p^s \leqslant C\big(||u(\cdot,t)||_p^p+||D^2u(\cdot,t)||_2^2\big) \quad \text{при} \quad 2\leqslant s\leqslant p, \quad \alpha\leqslant\frac{p-2}{2p}. \tag{23}$$

Отож,

$$\Big|\int\limits_{\Omega_t} uu_t dx\Big|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant M_2\big(||u(\cdot,t)||_p^p + ||u_t(\cdot,t)||_2^2 + ||D^2u(\cdot,t)||_2^2\big) \leqslant$$

$$\leqslant M_2\big(H(t) + ||u_t(\cdot,t)||_2^2 + ||D^2u(\cdot,t)||_2^2 + ||u(\cdot,t)||_p^p\big).$$

Аналогічно до (23) оцінюємо

$$\widehat{J}_8 := \Big|\int\limits_{\Omega_t} |u|^2 dx\Big|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant M_3\Bigg(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx\Bigg)^{\frac{2}{p(1-\alpha)}} \leqslant M_3(||u(\cdot,t)||_p^p + ||D^2u(\cdot,t)||_2^2) \leqslant$$

$$\leqslant M_3\big(H(t) + ||u_t(\cdot,t)||_2^2 + ||D^2u(\cdot,t)||_2^2 + ||u(\cdot,t)||_p^p\big)$$

при $\alpha \leqslant \dfrac{p-2}{2p}$, тому

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant M_4\big(H(t) + ||u_t(\cdot,t)||_2^2 + ||D^2u(\cdot,t)||_2^2 + ||u(\cdot,t)||_p^p\big).$$

Розглянемо

$$L'(t) = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_t^2 + uu_{tt} + c_0(x)uu_t\Big]dx.$$

Але правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_{tt}u + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} +$$

$$+\sum_{i=1}^n c_i(x)v_{x_i}u + c_0uu_t + a_0(x)u^2 + a_0^0(x)vu\Big]dx = \int\limits_{\Omega_t}\gamma(x)|u|^p dx,$$

тому для $m > 2$ одержимо

$$L'(t) = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_t^2 - \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l} - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} -$$

$$-\sum_{i=1}^n c_i(x)v_{x_i}u - a_0(x)u^2 - a_0^0(x)uv + \gamma(x)|u|^p\Big]dx + m\varepsilon H(t) - \frac{m\varepsilon}{p}\int\limits_{\Omega_t}\gamma(x)|u|^p dx +$$

$$+\frac{m\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + a_0(x)u^2 + v^2\Big]dx =$$

$$= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \Big(1+\frac{m}{2}\Big)\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}u_t^2dx + \Big(\frac{m}{2}-1\Big)\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Big[\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}+a_0(x)u^2\Big]dx+\frac{m\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}|v|^2dx-\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Big[\sum_{i=1}^{n}c_i(x)v_{x_i}u+a_0^0(x)uv\Big]dx+$$

$$+\varepsilon\left(1-\frac{m}{p}\right)\int\limits_{\Omega_t}\gamma(x)|u|^pdx+m\varepsilon H(t).$$

Оцінимо доданки останньої рівності

$$\widehat{J}_9:=\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}dx\geqslant A_2\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}|dx,$$

$$\widehat{J}_{10}:=\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx\geqslant B_1\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2dx,$$

$$\widehat{J}_{11}:=-\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}c_i(x)v_{x_i}udx\geqslant-\frac{C_1}{2\delta}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^2dx-\frac{\delta}{2}\int\limits_{\Omega_t}|u|^2dx,\quad\delta>0,$$

$$\widehat{J}_{12}:=\int\limits_{\Omega_t}a_0(x)u^2dx\geqslant A_0\int\limits_{\Omega_t}u^2dx,$$

$$\widehat{J}_{13}:=-\int\limits_{\Omega_t}a_0^0(x)uvdx\geqslant-\frac{\delta}{2}\int\limits_{\Omega_t}|u|^2dx-\frac{A_5}{2\delta}\int\limits_{\Omega_t}|v|^2dx,$$

де $A_5=\operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega}|a_0^0(x)|^2$,

$$\widehat{J}_{14}:=\int\limits_{\Omega_t}\gamma(x)|u|^pdx\geqslant\gamma_0\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx.$$

Приймемо $\delta=\dfrac{H^\alpha(t)}{1-\alpha}\nu_4$ і оцінимо

$$H^\alpha(t)\int\limits_{\Omega_t}|u|^2dx\leqslant M_5\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx\right)^\alpha\int\limits_{\Omega_t}|u|^2dx\leqslant$$

$$\leqslant M_6\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx\right)^{\alpha+\frac{2}{p}}=M_6||u(\cdot,t)||_p^{2+\alpha p}.$$

Якщо $\alpha\leqslant\dfrac{p-2}{p}$, то, використавши попередню оцінку та (23), одержимо

$$\frac{H^\alpha(t)}{1-\alpha}\int\limits_{\Omega_t}|u|^2dx\leqslant M_7\Big[||u(\cdot,t)||_p^p+||D^2u(\cdot,t)||_2^2\Big].$$

Врахувавши (22) та отримані оцінки, матимемо

$$L'(t) \geqslant (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\int\limits_{\Omega_t}\left[|u_t|^2\left(C_0-\frac{\nu_1}{2}-\frac{1}{2\nu_2}\right)+|v|^2\left(B_0-\frac{A_4\nu_2}{2}-\frac{1}{2\nu_3}-\frac{\varepsilon A_5\nu_4}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^2\left(A_1-\frac{B_3\nu_3}{2}-\frac{C_1}{2\nu_1}-\frac{\varepsilon C_1\nu_4}{2}\right)\right]dx+\varepsilon\left(1+\frac{m}{2}\right)\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2dx+\frac{m\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}|v|^2dx+$$

$$+\left[\left(\frac{m}{2}-1\right)A_2-M_7\nu_4\right]\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}|^2dx+A_0\left(\frac{m}{2}-1\right)\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}|u|^2dx+$$

$$+B_1\left(\frac{m}{2}-1\right)\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2dx+\varepsilon\left[\left(1-\frac{m}{p}\right)\gamma_0-M_7\nu_4\right]\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx+m\varepsilon H(t).$$

Виберемо $2<m<p,\ \nu_4<\min\left\{\dfrac{(m-2)A_2}{2M_7};\dfrac{(p-m)\gamma_0}{pM_7}\right\}$,

$$\varepsilon<\min\left\{\frac{(2B_0-A_4\nu_2)\nu_3-1}{A_5\nu_3\nu_4};\quad\frac{(2A_1-B_3\nu_3)-C_1}{C_1\nu_1\nu_4}\right\},$$

тоді

$$L'(t)\geqslant M_8\int\limits_{\Omega_t}\left[|u_t|^2+|v|^2+\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^2\right]dx+M_9H(t)+M_{10}\int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}|^2+|u|^p\right]dx\geqslant$$

$$\geqslant M_{11}\Big[H(t)+||u_t(\cdot,t)||^2+||D^2u(\cdot,t)||^2+||u(\cdot,t)||_p^p\Big].$$

Отже,

$$L'(t)\geqslant M_{11}[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{24}$$

Оскільки $H(0)=\lambda>0,\ H'(t)\geqslant 0$, то $H(t)\geqslant\lambda$. Тому ε можна вибрати так, що

$$L(0)=H^{1-\alpha}(0)+\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}u_0u_1dx+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}c_0(x)u_1^2dx\geqslant\frac{\lambda}{2}.$$

Позначимо $\gamma=\dfrac{1}{1-\alpha},\ \gamma>1$. Поділимо (24) на $L^{\gamma}(t)$ та проінтегруємо обидві частини отриманої нерівності (24) за t від 0 до t. Одержимо,

$$L^{\gamma-1}(t)\geqslant\frac{1}{L^{1-\gamma}(0)-M_{11}(\gamma-1)t},$$

тому існує таке T_0, що $L(t)\to+\infty$ при $t\to T_0-0$. Звідки випливає, що

$$\lim_{t\to T_0-0}H(t)=+\infty\ \text{ або }\ \lim_{t\to T_0-0}\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx=+\infty.$$

Одержане протиріччя завершує доведення теореми.

Зауваження 1. Зазначимо, що існують такі значення параметрів A_1, A_4, B_0, B_3, C_0, C_1, для яких $\triangle \neq \emptyset$. Справді, виберемо $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$ з системи

$$\nu_1(2A_1 - B_3\nu_3) = C_1 + \nu_0,$$

$$\nu_3(2B_0 - A_4\nu_2) = 1 + \nu_0,$$

$$\nu_2(2C_0 - \nu_1) = 1,$$

де $\nu_0 > 0$ – досить мале число.

З цих рівнянь маємо

$$\nu_1 = \frac{C_1 + \nu_0}{2A_1 - B_3\nu_3}, \quad \nu_2 = \frac{1}{2C_0 - \nu_1} = \frac{2A_1 - \nu_3 B_3}{4C_0A_1 - 2\nu_3C_0B_3 - C_1 - \nu_0},$$

$$\nu_3\left(2B_0 - \frac{2A_1A_4 - \nu_3B_3A_4}{4C_0A_1 - C_1 - \nu_0 - 2\nu_3C_0B_3}\right) = 1 + \nu_0.$$

Якщо $4C_0A_1 > C_1$, то можемо зазначити такі $\nu_0,\ B_3,\ A_4$, що $\nu_1 > 0,\ \nu_2 > 0,\ \nu_3 > 0$.

---

1. *Grobbelaar-Van Dalsen M.* On fractional powers of a pair of martices and a plate-beam problem / *Grobbelaar-Van Dalsen M.* // Appl. Anal. – 1999. – Vol. 72. – P. 369-390.
2. *Grobbelaar-Van Dalsen M.* Interlude of operator pairs and a Von Karman plate-beam problem with rotational inertia / *Grobbelaar-Van Dalsen M.* // Appl. Anal. – 2000 – Vol. 75. – P. 349-369.
3. *Kim J.U.* On the energy decay of a linear thermo-elastic bar and plate / *Kim J.U.* // SIAM J. Math. Anal. – 1992. – Vol. 23. – P. 889-899.
4. *Lagnese J.E.* Boundary Stabilization of Thin Plates. / *Lagnese J.E.* // SIAM Studies in Applied Mathematics, vol. 10, SIAM, Philadelphia. – 1989.
5. *Lagnese J.E.* Modelling and controllability of plate-beam system / *Lagnese J.E.* // J. Math. Syst. Estim. Contr. – 1995. – Vol. 5. – P. 141-187.
6. *Lasiecka I.* Control and stabilization of interactive systems, in "Systems and Control in the Twenty-First Century". / *Lasiecka I.* – Birkhauser, Boston. – 1997. – P. 245-262.
7. *Muñoz Rivera.* Smoothing properties, decay, and and global existence of solutions to nonlinear coupled systems of thermoelastic type / *Muñoz Rivera, J. E., Racke, R.* // SIAM J. Math. Anal. – 1995. – Vol. 26. – P. 1547-1563.
8. *Avalos G.* Exponential stability of a thermoelastic system without mechanical dissipation / *Avalos G., Lasiecka I.* // Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste Suppl. – 1997. – Vol. 28. – P. 1-28.
9. *Гаевськuй Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевськuй Х., Грегер К., Захариас К.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.
10. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных краевых задач // *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* – М.: ИЛ, 1958. – 474 с.
11. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости // *Демидович Б.П.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач // *Лионс Ж.-Л.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.

NONEXISTENCE OF A GLOBAL SOLUTION OF ONE HYBRID SYSTEMS OF EVOLUTION EQUATIONS

Halyna TORHAN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

The hybrid system of evolution equations where one of which contains second time derivative and second contains first time derivative is considered. Some sufficient conditions the existence of a solution of the mixed problem for this system in the bounded cylinder domain are obtained and also are got the conditions at which the global solution does not exist.

Key words: hybrid system of evolution equation, mixed problem.

Стаття надійшла до редколегії 05.12.2007

Прийнята до друку 22.10.2008