ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.276-280 *Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.276-280*

УДК 517.53

ПІДСУМОВУВАННЯ ЛОГАРИФМА МОДУЛЯ ДЗЕТА-ФУНКЦІЇ РІМАНА НА КРИТИЧНІЙ ПРЯМІЙ

Петро ЯЦУЛКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Узагальнено один результат М. Балазара, Е. Сайяса, М. Йора про підсумовування логарифма модуля дзета-функції Рімана на критичній прямій. Як наслідок отримано новий еквівалент гіпотези Рімана.

Ключові слова: дзета-функція Рімана, гіпотеза Рімана, формула Пуассона-Йенсена.

Відомо [1], [9], що $\int_{-\infty}^{+\infty} \log|\zeta(\frac{1}{2}+it)|\,dt$ розбігається. В [1] цей інтеграл підсумовано з ядром $1/|s|^2$ і знайдено один еквівалент гіпотези Рімана.

Головний результат цієї статті – така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $\{\rho_j\}$ *нулі дзета-функції Рімана* $\zeta(s)$ *в півплощині* $\{s : \operatorname{Re} s > 1/2\}$. *Для довільного* s, $\operatorname{Re} s > 1/2$ *справджується рівність*

$$\frac{|s|^2 - |s-1|^2}{2\pi} \int\limits_{\operatorname{Re} u = 1/2} \log|\zeta(u)| \frac{|du|}{|u-s|^2} - \log\left|\frac{s-1}{s}\,\zeta(s)\right| = \sum_{\operatorname{Re}\rho_j > 1/2} \log\left|\frac{s+\overline{\rho}_j - 1}{s-\rho_j}\right|. \tag{1}$$

Доведення. В площині комплексної змінної z розглянемо круг $D_R = \{z : |z| < R\}$. Для мероморфної функції $f(z)$ в крузі D_R правильна формула Пуассона-Йенсена ([8, с. 21])

$$\log|f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\varphi) + r^2}\,d\varphi +$$

$$+ \sum_{|a_\mu|<R} \log\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2 - \overline{a}_\mu z}\right| - \sum_{|b_\nu|<R} \log\left|\frac{R(z-b_\nu)}{R^2 - \overline{b}_\nu z}\right| - k\log\frac{R}{r},$$

де $\{a_\mu\}$ – нулі функції $f(z)$, $\{b_\nu\}$ – полюси функції $f(z)$, враховуючи їхні кратності; k – порядок нуля або $(-k)$ порядок полюса функції $f(z)$ при $z = 0$, $z = re^{i\theta}$. Дзета-функція Рімана $\zeta(s)$ має полюс порядку одиниця при $s = 1$, тому розглянемо функцію $f(z) = (s-1)\,\zeta(s) = \frac{z}{1-z}\,\zeta(\frac{1}{1-z})$, де $s = \frac{1}{1-z}$ – конформне відображення круга $D = D_1$ на півплощину $\{s : \mathrm{Re}\, s > 1/2\}$. В крузі D_R, $R < 1$ функція $f(z)$ полюсів не має [9], $f(0) \neq 0, \infty$. Тому формула Пуассона-Йенсена набуває вигляду

$$\begin{aligned}\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})|\,\mathrm{Re}\,\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi + \\ + \sum_{|a_\mu|<R} \log\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2-\overline{a}_\mu z}\right|, \quad z \in D_R.\end{aligned} \tag{2}$$

Для функцій з просторів Гарді H^p, $p > 0$ (див. [6, с. 100], а також [4], [5]) існує сингулярна міра $\sigma \geqslant 0$ на $[0; 2\pi]$ така, що

$$\begin{aligned}f(z) = B(z)\cdot \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\sigma(\varphi)\right)\cdot \exp\,(iC)\,\times \\ \times \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\log|f(e^{i\varphi})|\,d\varphi\right),\end{aligned} \tag{3}$$

де $B(z) = \prod\limits_{\mu} \dfrac{|a_\mu|}{a_\mu}\dfrac{a_\mu - z}{1-\overline{a}_\mu z}$ – добуток Бляшке, побудований за нулями a_μ функції $f(z)$, C – дійсна стала.

Формула (3) – канонічне зображення функції $f \in H^p$, $p > 0$. Взявши логарифм модуля обох боків рівності (3), отримаємо

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\log|f(e^{i\varphi})|\,d\varphi -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\sigma(\varphi) + \sum_{|a_\mu|<1}\log\left|\frac{z-a_\mu}{1-\overline{a}_\mu z}\right|.$$

В [2] (див. також [1]) визначено, що $f(z) \in H^{1/3}$, причому міра σ, асоційована з внутрішнім сингулярним множником в зображенні $f(z)$, є нульовою. Тому

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\varphi})|\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi + \sum_{|a_\mu|<1}\log\left|\frac{z-a_\mu}{1-\overline{a}_\mu z}\right|, \quad |z|<1. \tag{4}$$

Це є формула Пуассона-Йенсена при $R = 1$. Врахувавши обернене відображення $z = \frac{s-1}{s}$ та рівність $\log|f(w)| = \log\left|\frac{w}{1-w}\right| + \log\left|\zeta\left(\frac{1}{1-w}\right)\right|$, де $w = e^{i\varphi}$, отримуємо

$$\left|\frac{z-a_\mu}{1-\overline{a}_\mu z}\right| = \left|\frac{s-\rho_\mu}{s+\overline{\rho}_\mu - 1}\right|, \qquad a_\mu = \frac{\rho_\mu - 1}{\rho_\mu},$$

$$\operatorname{Re}\frac{w+z}{w-z}=\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}=\frac{(|s|^2-|s-1|^2)|u|^2}{|u-s|^2},\qquad u=\frac{1}{1-w},$$

$$d\varphi=\frac{|du|}{|u|^2},\qquad |u|=|u-1|,\qquad u=\frac{1}{2}+it.$$

$$\log|(s-1)\zeta(s)|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|\frac{w}{1-w}\right|\operatorname{Re}\frac{w+z}{w-z}\,d\varphi+$$

$$+\frac{|s|^2-|s-1|^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|\zeta(u)|\,\frac{|du|}{|u-s|^2}+\sum_{\operatorname{Re}\rho_j>1/2}\log\left|\frac{s-\rho_j}{s+\overline{\rho}_j-1}\right|.$$

Використавши формулу Пуассона-Йенсена для функції $g(z)=\frac{z}{1-z}$ (ця функція має нуль порядку одиниця при $z=0$), при $R=1$ отримаємо

$$\log\left|\frac{z}{1-z}\right|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|\frac{w}{1-w}\right|\operatorname{Re}\frac{w+z}{w-z}\,d\varphi-\log\frac{1}{|z|}$$

або

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|\frac{w}{1-w}\right|\operatorname{Re}\frac{w+z}{w-z}\,d\varphi=-\log|1-z|=\log|s|.$$

Рівність (4) тепер можемо записати так:

$$\log\left|\frac{s-1}{s}\,\zeta(s)\right|=\frac{|s|^2-|s-1|^2}{2\pi}\int\limits_{\operatorname{Re}u=1/2}\log|\zeta(u)|\frac{|du|}{|u-s|^2}+$$

$$+\sum_{\operatorname{Re}\rho_j>1/2}\log\left|\frac{s-\rho_j}{s+\overline{\rho}_j-1}\right|.$$

Це і є співвідношення (1), записане в іншому вигляді.

Теорема 1 доведена.

Прийнявши в (1) $s=1$ і враховуючи, що $|(s-1)\zeta(s)|\to 1$ при $s\to 1$ [9], а також $|u-1|=|u|$ при $u=\frac{1}{2}+it$, отримуємо такий результат з [1]

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\operatorname{Re}u=1/2}\log|\zeta(u)|\frac{|du|}{|u|^2}=\sum_{\operatorname{Re}\rho_j>1/2}\log\left|\frac{\rho_j}{1-\rho_j}\right|.$$

Як відомо, гіпотеза Рімана стверджує, що всі нетривіальні нулі дзета-функції мають дійсну частину 1/2 (лежать на так званій критичній прямій [7]). Використовуючи рівність (1), доведемо таку теорему (еквівалент гіпотези Рімана).

Теорема 2. *Гіпотеза Рімана справджується тоді і лише тоді, коли*

$$\frac{|s|^2-|s-1|^2}{2\pi}\int\limits_{\mathrm{Re}\,u=1/2}\log|\zeta(u)|\frac{|du|}{|u-s|^2}-\log\left|\frac{s-1}{s}\zeta(s)\right|=0 \tag{5}$$

для довільного s, $\mathrm{Re}\,s>1/2$.

При $s=1$ отримуємо еквівалент гіпотези Рімана з [1].

Доведення. Необхідність. Якщо гіпотеза Рімана справджується, то суми з правого боку (1) немає, отже, і лівий бік дорівнює нулеві.

Достатність. Нехай виконується (5). Тобто в рівності (1) лівий бік дорівнює нулеві для всіх s, $\mathrm{Re}\,s>1/2$. Припустимо, що гіпотеза Рімана не справджується, тобто існують нулі ρ_j, $\mathrm{Re}\,\rho_j>1/2$. Розглянемо суму $\sum\limits_{\mathrm{Re}\,\rho_j>1/2}\log\left|\frac{s+\overline{\rho}_j-1}{s-\rho_j}\right|$. Кожний доданок у цій сумі строго додатний. Справді, функція $u=h(s,\rho_j)=\frac{s+\overline{\rho}_j-1}{s-\rho_j}$ відображає півплощину $\{s:\mathrm{Re}\,s>1/2\}$ на зовнішність одиничного круга $\{u:|u|<1\}$, тому $\left|\frac{s+\overline{\rho}_j-1}{s-\rho_j}\right|>1$ і $\log\left|\frac{s+\overline{\rho}_j-1}{s-\rho_j}\right|>0$. Отримали $\sum\limits_{\mathrm{Re}\,\rho_j>1/2}\log\left|\frac{s+\overline{\rho}_j-1}{s-\rho_j}\right|>0$. Оскільки виконується (1) і (5), то повинно бути $\sum\limits_{\mathrm{Re}\,\rho_j>1/2}\log\left|\frac{s+\overline{\rho}_j-1}{s-\rho_j}\right|=0$. Отримане протиріччя доводить достатність.

Теорема 2 доведена.

Зауважимо, що для $s=2k$, $k\in\mathbb{N}$ відомі точні значення $\zeta(s)$

$$\zeta(2k)=\frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_k,$$

де B_k – числа Бернуллі ($B_1=1/6$, $B_2=1/30,\ldots$ [3])

У випадку правильності гіпотези Рімана повинно виконуватись

$$\int\limits_{\mathrm{Re}\,u=1/2}\log|\zeta(u)|\frac{|du|}{|u-2k|^2}=\frac{2\pi}{4k-1}\log\frac{(2k-1)2^{2k-1}\pi^{2k}B_k}{2k\cdot(2k)!}.$$

Вдячність професорові Кондратюку А.А. за зазначену тему досліджень.

1. *Balazard M.* Notes sur la fonction ζ de Riemann, 2 / *Balazard M., Saias E. and Yor M.* // Advances in Mathematics – 1999. – Vol. 143. – P. 284-287.
2. *Bercovici H.A* real variable restatement of Riemann's hypothesis / *Bercovici H.A. and Foias C.* // Israel Journal of Mathematics. – 1984. – Vol. 48, №1. – P. 57 – 68.
3. *Dwight H.B.* Tables of integrals and other Mathematical data / *Dwight H.B.* – New York: Macmillan Co., 1961. – 336 p.
4. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции / *Гарнетт Дж.* – М.: Мир, 1984. – 469 с.
5. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций / *Гофман К.* – М.: Из-во иностр. л-ры, 1963. – 311 с.
6. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p / *Кусис П.* – М.:Мир, 1984. – 368 с.

7. *Riemann B.* Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse / *Riemann B.* // Monat. der Konigl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre. – 1859 (1860). – P. 671-680.
8. *Rubel Lee A.* Entire and meromorphic functions / *Rubel Lee A.* – New York: Springer-Verlag, 1996. – 187 p.
9. *Титчмарш Е.К.* Теория дзета-функции Римана / *Титчмарш Е.К.* – М.: Из-во иностр. л-ры, 1953. – 409 с.

SUMMATION OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION MOD LOGARITHM ON THE CRITICAL LINE

Petro YATSULKA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

A result of M. Balazard, E. Saias, M. Yor on summation of the Riemann zeta-function logarithm on the critical line is generalized. A new equivalent of the Riemann hypothesis is obtained

Key words: Riemann zeta-function, Riemann hypothesys, Poisson-Jensen Theorem.

Стаття надійшла до редколегії 27.12.2006

Прийнята до друку 22.10.2008