ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 68. С. 31-42 *Ser.Mech-Math. 2008. Vol. 68. P. 31-42*

УДК 517.95

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ НА МНОГОВИДІ

Микола БОКАЛО, Юрій ДМИТРИШИН

Львівський національний університет ім. Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: yuree@yandex.ru

Досліджено односторонню крайову задачу для квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку, заданого в циліндрі з твірними, паралельними до осі часової змінної, яка пробігає проміжок $(-\infty, T]$. Крайова умова на бічній поверхні циліндра має вигляд нелінійної еволюційної варіаційної нерівності, що містить похідні шуканої функції за часовою і просторовими змінними першого порядку. Визначено достатні умови для існування єдиного розв'язку цієї задачі та неперервної залежності від вихідних даних у разі відсутності умов на зростання вихідних даних і поведінку розв'язку при $t \to -\infty$.

Ключові слова: динамічна крайова задача, динамічна крайова умова, еволюційна варіаційна нерівність, квазілінійне еліптичне рівняння.

1. Динамічні крайові задачі виникають при математичному моделюванні багатьох фізичних і хімічних процесів [1]-[5]. Модельним прикладом таких задач є задача про відшукання функції $u(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times (T_0, T)$ (Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = \partial\Omega$, $-\infty \leqslant T_0 < T \leqslant +\infty$), яка задовольняє співвідношення

$$\triangle_x u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (T_0, T), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \nu} = f, \quad (x,t) \in \Gamma \times (T_0, T), \tag{2}$$

$$u\big|_{\Gamma} \to u_0 \quad \text{при} \quad t \to T_0,\ x \in \Gamma, \tag{3}$$

де $\triangle_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – лапласіан, $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ – оператор диференціювання за нормаллю. Узагальнення задачі (1)-(3) на випадок $T_0 > -\infty$ і нелінійних рівнянь чи включень типу (1) та (2) досліджували у працях [1]-[7]. Щодо випадку

$T_0 = -\infty$ (задача Фур'є), то таку задачу розглядали, як нам відомо, тільки в [8], коли в умові (3) $u_0 = 0$ і рівняння типу (1) – майже лінійне. Ми досліджуємо задачу, яка є узагальненням задачі (1)-(3) на випадок, коли $T_0 = -\infty$, замість рівняння (1) – сильно нелінійне еліптичне рівняння, динамічна крайова умова (типу (2)) має вигляд нелінійної еволюційної варіаційної нерівності, а умови (3) – немає. Доведено коректність розглядуваної задачі в класах функцій з довільною поведінкою при $t \to -\infty$. Зауважимо, що наші результати подібні до результатів стосовно задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь і нерівностей з нединамічною крайовою умовою, які отримали в [9], [10].

Нехай n – натуральне число; $\mathbb{R}^n$ – евклідів простір, елементами якого є впорядковані набори $x = (x_1, \dots, x_n)$ з n дійсних чисел, зі скалярним добутком $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ і нормою $|x| = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \Big)^{1/2}$; Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею Γ класу C^2 (припускається, що Ω локально лежить по один бік від Γ); $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до Γ нормалі; $T > 0$ – дійсне число. Приймемо $Q \overset{\text{def}}{=} \Omega \times (-\infty, T)$, $S \overset{\text{def}}{=} \Gamma \times (-\infty, T)$. Нехай $p \in (1, +\infty)$, а p' визначається з рівності $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Через $W_p^1(\Omega)$ позначимо простір Соболєва, який складається з функцій простору $L_p(\Omega)$, що мають узагальнені похідні першого порядку з $L_p(\Omega)$, з нормою $\|w\|_{W_p^1(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} \big(\sum\limits_{i=1}^{n} |w_{x_i}|^p + |w|^p \big)\, dx \Big)^{1/p}$, а $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ – підпростір простору $W_p^1(\Omega)$, елементи якого мають рівний нулю слід на Γ. Під $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ розумітимемо простір функцій з $L_p(\Gamma)$, які мають дробові похідні порядку $1/p'$ з $L_p(\Gamma)$ (див., наприклад, [3], [11]), а $W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)$ – спряжений до $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ простір. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ позначимо канонічний добуток на $W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma) \times W_p^{1/p'}(\Gamma)$. Відомо, що простір $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ можна ототожнити з простором слідів на Γ функцій з $W_p^1(\Omega)$. Нехай $\gamma_0 : W_p^1(\Omega) \to W_p^{1/p'}(\Gamma)$ – оператор сліду.

2. Допоміжні поняття та твердження. Нехай $\mathbb{P} \overset{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R} : p > 1\}$. Розглянемо множину, яка складається з впорядкованих наборів з $n+1$ дійснозначних функцій, визначених на $Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, будь-який елемент $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ якої задовольняє умови:

1) для кожного $i \in \{0, \dots, n\}$ функція a_i є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – неперервна і для всіх $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ функція $a_i(\cdot,\cdot,s,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ – вимірна;

2) для майже всіх $(x,t) \in Q$ і довільних $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|a_i(x,t,s,\xi)| \leqslant q_{1,a}(t)(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) + q_{2,a}(x,t), \quad i = \overline{0,n},$$

де $q_{1,a} \in L_{\infty,\text{loc}}\big((-\infty, T]\big)$, $q_{2,a} \in L_{p',\text{loc}}(\overline{Q})$;

3) існують стала $K_1 > 0$ і функція $h_a \geqslant 0$ з $L_{1,\text{loc}}(\overline{Q})$ такі, що для майже всіх $(x,t) \in Q$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,s,\xi)\xi_i + a_0(x,t,s,\xi)s \geqslant K_1\big(|s|^p + |\xi|^p\big) - h_a(x,t) \quad \forall\, s \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n;$$

4) для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $s, s' \in \mathbb{R}$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $s \neq s'$ або $\xi \neq \xi'$, маємо

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t,s,\xi) - a_i(x,t,s',\xi')\big)(\xi_i - \xi_i') + \big(a_0(x,t,s,\xi) - a_0(x,t,s',\xi')\big)(s - s') > 0.$$

На цій множині введемо відношення еквівалентності, вважаючи що два набори $a^1(x,t,s,\xi)$, $a^2(x,t,s,\xi)$, $(x,t,s,\xi) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, еквівалентні, якщо $a^1(x,t,s,\xi) = a^2(x,t,s,\xi)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Фактор-множину за цим відношенням еквівалентності позначатимемо через $\mathbb{A}_p$. Коли далі говоритимемо про якийсь елемент множини $\mathbb{A}_p$, то матимемо на увазі відповідного представника з класу еквівалентності, яким є цей елемент.

Нехай $\mathbb{P}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P} : p > 2\}$ і для кожного $p \in \mathbb{P}^*$ позначимо через $\mathbb{A}_p^*$ підмножину множини $\mathbb{A}_p$, складену з елементів $a \in \mathbb{A}_p$, які задовольняють умову:

5) існує стала $K_2 > 0$ така, що

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t,s,\xi) - a_i(x,t,s',\xi')\big)(\xi_i - \xi_i') + \big(a_0(x,t,s,\xi) - a_0(x,t,s',\xi')\big)(s - s') \geqslant$$

$$\geqslant K_2\big(|s-s'|^p + |\xi - \xi'|^p\big) \quad \forall\, (x,t) \in Q,\ s, s' \in \mathbb{R},\ \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n.$$

Зауваження 1. Прикладом елемента множини $\mathbb{A}_p^*$ є набір функцій $a_0(x,t,s,\xi) = |s|^{p-2}s$, $a_k(x,t,s,\xi) = |\xi_k|^{p-2}\xi_k$, $k = \overline{1,n}$.

Відомо [3], [11], що для довільного $p \in \mathbb{P}$ і будь-якої функції $v \in W_p^1(\Omega)$ існує її слід $\gamma_0 v$ (на Γ) та $\gamma_0 v \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ і, навпаки, для довільної функції $\varphi \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ знайдеться (і не одна) функція $v \in W_p^1(\Omega)$ така, що $\gamma_0 v = \varphi$. Зрештою (див., наприклад, [12]), існує лінійний неперервний оператор $R : W_p^{1/p'}(\Gamma) \to W_p^1(\Omega)$ такий, що $\gamma_0\big(R(\varphi)\big) = \varphi$.

Нехай $p \in \mathbb{P}$ і $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ – який-небудь елемент множини $\mathbb{A}_p$. Для кожного $t \in (-\infty, T)$ визначимо форму

$$g_a(t;\cdot,\cdot) : W_p^1(\Omega) \times W_p^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

за правилом

$$g_a(t;v,w) = \int\limits_{\Omega} \Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,v,\nabla v) w_{x_i} + a_0(x,t,v,\nabla v) w\Big\}\, dx, \quad v, w \in W_p^1(\Omega). \tag{4}$$

Приймемо для $t \in (-\infty, T)$

$$V_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{v \in W_p^1(\Omega) :\ g_a(t;v,w) = 0 \quad \forall\, w \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\big\}.$$

Очевидно, що елементами простору $V_a(t)$, де $t \in (-\infty, T)$, є узагальнені розв'язки з $W_p^1(\Omega)$ рівняння

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,v,\nabla v) + a_0(x,t,v,\nabla v) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Відоме (див., наприклад, [13, Глава III, теорема 2.1]) таке твердження.

Твердження 1. *Нехай $a \in \mathbb{A}_p$, де $p \in \mathbb{P}$, і $t \in (-\infty, T)$. Тоді для будь-якої функції $\varphi \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ існує єдина функція $v \in V_a(t)$ така, що $\gamma_0 v = \varphi$, і, навпаки, для кожної функції $v \in V_a(t)$ її слід $\gamma_0 v$ належить $W_p^{1/p'}(\Gamma)$.*

З цього твердження випливає, що для кожного $t \in (-\infty, T)$ між просторами $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ і $V_a(t)$ існує взаємно однозначна відповідність. Позначимо через $J_a(t;\cdot)$ оператор, який реалізує цю відповідність, тобто оператор $J_a(t;\cdot) : W_p^{1/p'}(\Gamma) \to V_a(t)$ такий, що для кожного $w \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ $J_a(t;w) \stackrel{\text{def}}{=} v$, де v належить до $V_a(t)$ і задовольняє граничну умову

$$\gamma_0 v = w, \tag{6}$$

тобто, v – узагальнений розв'язок задачі Діріхле для рівняння (5) з граничною умовою (6).

Лема 1. *Нехай $a \in \mathbb{A}_p$, де $p \in \mathbb{P}$. Тоді існують функції $d_a > 0$ з $L_{\infty,\mathrm{loc}}\big((-\infty, T]\big)$ та $\widetilde{d}_a \geqslant 0$ з $L_{p,\mathrm{loc}}\big((-\infty, T]\big)$ такі, що*

$$\big\|J_a(t;w)\big\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant d_a(t)\big\|w\big\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} + \widetilde{d}_a(t) \quad \forall\, w \in W_p^{1/p'}(\Gamma),\ t \in (-\infty, T). \tag{7}$$

Доведення. Нехай w належить $W_p^{1/p'}(\Gamma)$, t належить $(-\infty, T)$ і значення $q_{1,a}(t)$, $\big\|q_{2,a}(\cdot,t)\big\|_{L_{p'}(\Omega)}$ та $\big\|h_{2,a}(\cdot,t)\big\|_{L_1(\Omega)}$ – скінченні. Приймемо $v \stackrel{\text{def}}{=} J_a(t;w)$, $\widetilde{v} \stackrel{\text{def}}{=} R(w)$. З означення оператора J_a одержуємо

$$\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,t,v,\nabla v)(v-\widetilde{v})_{x_i} + a_0(x,t,v,\nabla v)(v-\widetilde{v})\Big\}\,dx = 0,$$

звідки

$$\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,t,v,\nabla v)v_{x_i} + a_0(x,t,v,\nabla v)v\Big\}\,dx = \\ = \int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,t,v,\nabla v)\widetilde{v}_{x_i} + a_0(x,t,v,\nabla v)\widetilde{v}\Big\}\,dx. \tag{8}$$

З (8) на підставі умов **2**, **3** і нерівності Гельдера, здобуваємо

$$K_1\big\|v\big\|^p_{W_p^1(\Omega)} - \big\|h_a(\cdot,t)\big\|_{L_1(\Omega)} \leqslant C_1\Big(q_{1,a}(t)\big\|v\big\|^{p-1}_{W_p^1(\Omega)} + \big\|q_{2,a}(\cdot,t)\big\|_{L_{p'}(\Omega)}\Big)\cdot\big\|\widetilde{v}\big\|_{W_p^1(\Omega)},$$

де C_1 – деяка додатна стала.

Звідси, використовуючи нерівність Юнга, отримаємо

$$K_1\big\|v\big\|^p_{W_p^1(\Omega)} - \big\|h_a(\cdot,t)\big\|_{L_1(\Omega)} \leqslant \varepsilon\big\|v\big\|^p_{W_p^1(\Omega)} + \\ + C_2(\varepsilon)\big\|q_{2,a}(\cdot,t)\big\|^{p'}_{L_{p'}(\Omega)} + C_3(\varepsilon)\big(|q_{1,a}(t)|+1\big)^p\big\|\widetilde{v}\big\|^p_{W_p^1(\Omega)}, \tag{9}$$

де $p' = \frac{p}{p-1}$, $\varepsilon > 0$ – довільна стала, $C_2(\varepsilon)$, $C_3(\varepsilon) > 0$ – деякі сталі, що залежить від ε, але не залежать від v, $\widetilde{v}$ і t. З (9), взявши $\varepsilon = \frac{K_1}{2}$ і врахувавши, що $\|\widetilde{v}\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant \leqslant \|R\| \cdot \|w\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)}$, здобудемо (7) з $d_a(t) = C_4\left(|q_{1,a}(t)|+1\right)^p$, $\widetilde{d}_a(t) = C_5\Big(\|h_a(\cdot,t)\|_{L_1(\Omega)} + \|q_{2,a}(\cdot,t)\|^{p'}_{L_{p'}(\Omega)}\Big)$, де C_4, C_5 – деякі додатні сталі.

Лема 2. *Нехай $a \in \mathbb{A}_p^*$, де $p \in \mathbb{P}^*$. Тоді існують функції $d_{a,1}$ з $L_{\infty,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T]\big)$ та $d_{a,2}$ з $L_{1,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T]\big)$ такі, що для $t \in (-\infty,T)$ правильна нерівність*

$$\|J_a(t;w_1) - J_a(t;w_2)\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant d_{a,1}(t)\Big(\|w_1\|^p_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} + \|w_2\|^p_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} + d_{a,2}(t)\Big)^{(p-1)/p^2} \times \\ \times \|w_1 - w_2\|^{1/p}_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} \quad \forall\, w_1, w_2 \in W_p^{1/p'}(\Gamma). \quad (10)$$

Доведення. Нехай w_1, w_2 належать $W_p^{1/p'}(\Gamma)$, t належить $(-\infty,T)$ і значення $q_{1,a}(t)$, $\|q_{2,a}(\cdot,t)\|_{L_{p'}(\Omega)}$ – скінченні. Приймемо $v_1 \overset{\mathrm{def}}{=} J_a(t;w_1)$, $v_2 \overset{\mathrm{def}}{=} J_a(t;w_2)$. Для довільної $\widetilde{\varphi} \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ на підставі означення оператора J_a одержимо

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n \big(a_i(x,t,v_1,\nabla v_1) - a_i(x,t,v_2,\nabla v_2)\big)\widetilde{\varphi}_{x_i} + \\ + \big(a_0(x,t,v_1,\nabla v_1) - a_0(x,t,v_2,\nabla v_2)\big)\widetilde{\varphi}\Big\}\, dx = 0. \quad (11)$$

Нехай $\widetilde{v}_1 \overset{\mathrm{def}}{=} R(w_1)$, $\widetilde{v}_2 \overset{\mathrm{def}}{=} R(w_2)$. Приймемо в (11) $\widetilde{\varphi} = (v_1 - v_2) - (\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2)$. Після простих перетворень отримаємо

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n \big(a_i(x,t,v_1,\nabla v_1) - a_i(x,t,v_2,\nabla v_2)\big)(v_{1,x_i} - v_{2,x_i}) + \\ + \big(a_0(x,t,v_1,\nabla v_1) - a_0(x,t,v_2,\nabla v_2)\big)(v_1 - v_2)\Big\}\, dx = \\ = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n \big(a_i(x,t,v_1,\nabla v_1) - a_i(x,t,v_2,\nabla v_2)\big)(\widetilde{v}_{1,x_i} - \widetilde{v}_{2,x_i}) + \\ + \big(a_0(x,t,v_1,\nabla v_1) - a_0(x,t,v_2,\nabla v_2)\big)(\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2)\Big\}\, dx. \quad (12)$$

Оцінюючи відповідно ліву та праву частину (12) на підставі умов **2**, **5**, та використовуючи нерівність Гельдера, одержимо

$$K_2 \int_\Omega \Big\{ |v_1 - v_2|^p + |\nabla v_1 - \nabla v_2|^p \Big\}\, dx \leqslant \int_\Omega \Big\{ \Big(q_{1,a}(t)\big(|v_1|^{p-1} + |v_2|^{p-1} + |\nabla v_1|^{p-1} + |\nabla v_2|^{p-1}\big) + \\ + 2|q_{2,a}(x,t)|\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^n |\widetilde{v}_{1,x_i} - \widetilde{v}_{2,x_i}| + |\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2| \Big)\Big\}\, dx \leqslant C_6\big(|q_{1,a}(t)| + 1\big) \times$$

$$\times\ \Big(\big\|v_1\big\|^p_{W^1_p(\Omega)}\ +\ \big\|v_2\big\|^p_{W^1_p(\Omega)}\ +\ \big\|q_{2,a}(\cdot,t)\big\|^{p'}_{L_{p'}(\Omega)}\Big)^{1/p'}\big\|\widetilde{v}_1\ -\ \widetilde{v}_2\big\|_{W^1_p(\Omega)},\quad (13)$$

де $C_6 > 0$ – стала, що не залежить від v_1, v_2, $\widetilde{v}_1$, $\widetilde{v}_2$. Звідси та з леми 1 і того, що оператор R є лінійним та неперервним, одержимо (10).

Зазначимо, що для $t \in (-\infty, T)$ правильним є твердження: для довільного елемента $v \in V_a(t)$ і будь-яких $w, \widetilde{w} \in W^1_p(\Omega)$ таких, що $w - \widetilde{w} \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ (тобто $\gamma_0 w = \gamma_0 \widetilde{w}$) маємо $g_a(t; v, w) = g_a(t; v, \widetilde{w})$, оскільки $g_a(t; v, w - \widetilde{w}) = 0$. Звідси випливає, що для кожного $t \in (-\infty, T)$ і довільного $v \in V_a(t)$ функціонал

$$W^{1/p'}_p(\Gamma) \ni \varphi \to g_a(t; v, \widetilde{\varphi}) \in \mathbb{R}, \quad \text{де} \quad \widetilde{\varphi} \in W^1_p(\Omega), \quad \gamma_0\widetilde{\varphi} = \varphi$$

$\big($зокрема, $\widetilde{\varphi} = R(\varphi)\big)$, є коректно визначеним.

Легко показати, що цей функціонал лінійний. Доведемо, що він неперервний. Справді, з означення (див. (4)) та властивостей форми g_a і оператора R, використовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\big|g_a(t; v, \widetilde{\varphi})\big| = \big|g_a\big(t; v, R(\varphi)\big)\big| \leqslant \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n \big|a_i(x, t, v, \nabla v)\big|^{p'}\, dx\Big)^{1/p'} \big\|R(\varphi)\big\|_{W^1_p(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \big\|R\big\| \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n \big|a_i(x, t, v, \nabla v)\big|^{p'}\, dx\Big)^{1/p'} \big\|\varphi\big\|_{W^{1/p'}_p(\Gamma)} \quad \forall\, \varphi \in W^{1/p'}_p(\Gamma). \quad (14)$$

Звідси випливає неперервність цього функціонала.

Отож, для кожного $t \in (-\infty, T)$ можна визначити оператор

$$G_a(t; \cdot) : V_a(t) \to W^{-1/p'}_{p'}(\Gamma)$$

за правилом: для будь-якого $v \in V_a(t)$ значення $G_a(t; v)$ таке, що

$$\langle G_a(t; v), \varphi\rangle_\Gamma = g_a(t; v, \widetilde{\varphi}) \quad \forall\, \varphi \in W^{1/p'}_p(\Gamma), \quad \widetilde{\varphi} \in W^1_p(\Omega), \quad \gamma_0\widetilde{\varphi} = \varphi. \quad (15)$$

Згідно з (14), (15) і на підставі умови **2** маємо

$$\big\|G_a(t; v)\big\|_{W^{-1/p'}_{p'}(\Gamma)} \leqslant \big\|R\big\| \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n \big|a_i(x, t, v, \nabla v)\big|^{p'}\, dx\Big)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)^{1/p'} \big\|R\big\| \cdot \big\|q_{1,a}(t)\big(|v|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1}\big) + q_{2,a}(\cdot, t)\big\|_{L_{p'}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_7\Big(q_{1,a}(t)\big\|v\big\|^{p-1}_{W^1_p(\Omega)} + \big\|q_{2,a}(\cdot, t)\big\|_{L_{p'}(\Omega)}\Big), \quad (16)$$

де $C_7 > 0$ – стала, яка від v не залежить.

Зауваження 2. Якщо $a_i\big(\cdot, t, v(\cdot), \nabla v(\cdot)\big) \in W^1_{p'}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $i = \overline{1, n}$, для деякого $t \in (-\infty, T)$ і $v \in V_a(t)$, то

$$G_a\big(t; v\big)(x) = \sum_{i=1}^n a_i\big(x, t, v(x), \nabla v(x)\big) \cos\big(\nu(x), x_i\big), \quad x \in \Gamma, \quad (17)$$

тобто, $G_a(t;v)$ є похідною v за конормаллю. Справді, з (4) і (15), використовуючи формулу Гаусса-Остроградського, одержуємо

$$\big\langle G_a(t;v),\varphi\big\rangle_\Gamma = \int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n a_i\big(x,t,v(x),\nabla v(x)\big)\widetilde{\varphi}_{x_i}(x) + a_0\big(x,t,v(x),\nabla v(x)\big)\widetilde{\varphi}(x)\Big\}\,dx =$$

$$= \int\limits_\Gamma \sum_{i=1}^n a_i\big(x,t,v(x),\nabla v(x)\big)\cdot\cos\big(\nu(x),x_i\big)\cdot\varphi(x)\,d\Gamma +$$

$$+ \int\limits_\Omega \Big\{-\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}a_i\big(x,t,v(x),\nabla v(x)\big) + a_0\big(x,t,v(x),\nabla v(x)\big)\Big\}\widetilde{\varphi}(x)\,dx. \quad (18)$$

Оскільки $v\in V_a(t)$, то (див. (5)) з (18) (з огляду на довільність $\varphi\in W_p^{1/p'}(\Gamma)$) маємо (17).

Для $p\in\mathbb{P}$ розглянемо множину функцій, будь-який елемент b якої визначений на $S\times\mathbb{R}$, набуває значення в $\mathbb{R}$ та задовольняє умови:

6) функція b є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,t)\in S$ функція $b(x,t,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є неперервною і для будь-якого $\xi\in\mathbb{R}$ функція $b(\cdot,\cdot,\xi):S\to\mathbb{R}$ – вимірна;

7) для майже всіх $(x,t)\in S$ і довільних $s\in\mathbb{R}$

$$|b(x,t,s)|\leqslant q_{1,b}(t)|s|^{p-1}+q_{2,b}(x,t),$$

де $q_{1,b}\in L_{\infty,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T]\big)$, $q_{2,b}\in L_{p',\mathrm{loc}}(S)$;

8) для майже всіх $(x,t)\in S$ і будь-яких $s,s'\in\mathbb{R}$

$$\big(b(x,t,s)-b(x,t,s')\big)(s-s')\geqslant 0.$$

На цій множині також введемо відношення еквівалентності, вважаючи що два набори $b^1(x,t,s)$, $b^2(x,t,s)$, $(x,t,s)\in S\times\mathbb{R}$, еквівалентні, якщо $b^1(x,t,s)=b^2(x,t,s)$ для майже всіх $(x,t)\in S$ і всіх $s\in\mathbb{R}$. Фактор-множину за цим відношенням еквівалентності позначатимемо через $\mathbb{B}_p$. Коли далі говоритимемо про якийсь елемент множини $\mathbb{B}_p$, то матимемо на увазі відповідного представника з класу еквівалентності, яким є цей елемент.

Нехай b – який-небудь елемент простору $\mathbb{B}_p$. Для кожного $t\in(-\infty,T)$ визначимо оператор $B_b(t;\cdot):W_p^{1/p'}(\Gamma)\to W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)$ за правилом

$$\big\langle B_b(t;\varphi),\psi\big\rangle = \int\limits_\Gamma b(x,t,\varphi)\psi\,d\Gamma \quad \forall\ \varphi,\psi\in W_p^{1/p'}(\Gamma). \quad (19)$$

3. Формулювання задачі й основного результату. Введемо ще деякі позначення. Під $L_{q,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T];X\big)$, де X – банахів простір, $q\in[1,+\infty]$, розумітимемо простір визначених на $(-\infty,T)$ зі значеннями в X функцій, звуження яких на будь-який скінченний інтервал $(t_1,t_2)\subset(-\infty,T]$ належить $L_q\big(t_1,t_2;X\big)$. Приймемо для $p\in\mathbb{P}$

- $\mathbb{F}_p \overset{\text{def}}{=} L_{p',\text{loc}}\big((-\infty,T];W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)\big)$;
- $\mathbb{U}_p \overset{\text{def}}{=} \big\{u:\ u\in L_{p,\text{loc}}\big((-\infty,T];\ W_p^1(\Omega)\big), \gamma_0 u\in C\big((-\infty,T];L_2(\Gamma)\big)\big\}$;
- $\mathbb{V}_p \overset{\text{def}}{=} \big\{v:\ v\in L_{p,\text{loc}}\big((-\infty,T];\ W_p^{1/p'}(\Gamma)\big), v_t\in L_{p',\text{loc}}\big((-\infty,T];\ W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)\big)\big\}$.
- $\mathbb{H}_p$ – множина власних опуклих напівнеперервних знизу функціоналів на $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ зі значеннями в $(-\infty,+\infty]$.

Сформулюємо задачу, яку будемо досліджувати. Нехай $\widetilde{\mathbb{P}}\subset\mathbb{P}$ і для кожного $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$ маємо деякі підмножини $\widetilde{\mathbb{D}}_p$, $\widetilde{\mathbb{H}}_p$, $\widetilde{\mathbb{U}}_p$ відповідно множин $\mathbb{D}_p \overset{\text{def}}{=} \mathbb{A}_p\times\mathbb{B}_p\times\mathbb{F}_p$, $\mathbb{H}_p$ та $\mathbb{U}_p$.

Задача

$$\boldsymbol{VI}(\widetilde{\mathbb{D}}_p,\widetilde{\mathbb{H}}_p,\widetilde{\mathbb{U}}_p : p\in\widetilde{\mathbb{P}})$$

(a **v**ariational **i**nequality) така: для кожних $(a,b,f)\in\widetilde{\mathbb{D}}_p$, $\Phi\in\widetilde{\mathbb{H}}_p$ знайти множину

$$\boldsymbol{SVI}(a,b,f,\Phi)$$

(a set of **s**olutions of the **v**ariational **i**nequality) елементів u з $\widetilde{\mathbb{U}}_p$ таких, що

- $u(\cdot,t)\in V_a(t)$ для майже всіх $t\in(-\infty,T)$;
- $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\big\langle v_t+G_a(t;u)+B_b(t;\gamma_0 u)-f,\ v-\gamma_0 u\big\rangle_\Gamma+\Phi(v)-\Phi(\gamma_0 u)\Big\}\,dt\geqslant$ $\geqslant\frac12\big\|v-\gamma_0 u\big\|^2_{L_2(\Gamma)}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}$ для довільних t_1, t_2, $(-\infty<t_1<t_2\leqslant T)$ і будь-якого $v\in\mathbb{V}_p$.

Скажемо, що задача $\boldsymbol{VI}(\widetilde{\mathbb{D}}_p,\widetilde{\mathbb{H}}_p,\widetilde{\mathbb{U}}_p : p\in\widetilde{\mathbb{P}})$ *однозначна (розв'язна, однозначно розв'язна)*, якщо для кожних $(a,b,f)\in\widetilde{\mathbb{D}}_p$ і $\Phi\in\widetilde{\mathbb{H}}_p$ множина $\boldsymbol{SVI}(a,b,f,\Phi)$ має *не більше одного елемента (не порожня, складається тільки з одного елемента).*

Задача $\boldsymbol{VI}(\widetilde{\mathbb{D}}_p,\widetilde{\mathbb{H}}_p,\widetilde{\mathbb{U}}_p : p\in\mathbb{P})$ називається *коректною*, якщо $\widetilde{\mathbb{D}}_p$, $\widetilde{\mathbb{U}}_p$ – простори зі збіжністю і ця задача *однозначно розв'язна, та для будь-якого елемента* (a,b,f) *класу* $\widetilde{\mathbb{D}}_p$, *і довільної послідовності* $\big\{(a^k,b^k,f_k)\big\}_{k=1}^\infty$ *елементів* $\widetilde{\mathbb{D}}_p$ *такої, що*

$$(a^k,b^k,f_k)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}(a,b,f)\quad \text{в}\quad \widetilde{\mathbb{D}}_p,$$

маємо

$$u_k\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}u\quad \text{в}\quad \widetilde{\mathbb{U}}_p,$$

де $u\in\boldsymbol{SVI}(a,b,f,\Phi)$, $u_k\in\boldsymbol{SVI}(a^k,b^k,f_k,\Phi)$, $k\in\mathbb{N}$. Приймемо $\mathbb{D}_p^*\overset{\text{def}}{=}\mathbb{A}_p^*\times\mathbb{B}_p\times\mathbb{F}_p$, $p\in\mathbb{P}^*$. Введемо поняття збіжності послідовностей елементів $\mathbb{D}_p^*$ як збіжність компонент відповідно в $\mathbb{A}_p^*$, $\mathbb{B}_p$ та $\mathbb{F}_p$. Збіжність в просторі $\mathbb{F}_p$ є стандартною, тому пояснимо лише, що означає збіжність послідовностей у просторах $\mathbb{A}_p^*$ та $\mathbb{B}_p$. Скажемо, що послідовність $\big\{a^k\big\}_{k=1}^\infty$ збіжна до a в $\mathbb{A}_p^*$, якщо елементи a^k $(k\in\mathbb{N})$ і елемент a задовольняють умову **5** з тією самою сталою K_2, а також

$$\lim_{k\to\infty}\ \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in\Omega\times(t_0,T)}\ \sup_{(s,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}}\sum_{i=0}^n\frac{\big|a_i^k(x,t,s,\xi)-a_i(x,t,s,\xi)\big|}{|s|^{p-1}+|\xi|^{p-1}+1}=0\quad\forall\ t_0<T.$$

Послідовність $\{b^k\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до b в $\mathbb{B}_p$, якщо для елементів b^k $(k\in\mathbb{N})$ і елемента b виконується рівність

$$\lim_{k\to\infty}\ \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in\Gamma\times(t_0,T)}\ \sup_{s\in\mathbb{R}}\frac{\left|b^k(x,t,s)-b(x,t,s)\right|}{|s|^{p-1}+1}=0\quad\forall\, t_0<T.$$

Теорема 1. *Задача* $\boldsymbol{VI}(\mathbb{D}_p^*,\mathbb{H}_p,\mathbb{U}_p:p\in\mathbb{P}^*)$ *– коректна. Крім того, для довільного елемента* u *з* $\boldsymbol{SVI}(a,b,f,\Phi)$ *і будь-яких* $t_1<t_2\leqslant T$, $\delta>0$ *правильною є оцінка*

$$\max_{[t_1,t_2]}\left|\gamma_0u(t)\right|^2+\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\|u(t)\right\|^p_{W^1_p(\Omega)}dt\leqslant C_{t_1,t_2}\int\limits_{t_1-\delta}^{t_2}\left\|f(t)\right\|^{p'}_{W^{-1/p'}_{p'}(\Gamma)}dt+\widetilde{C}_{t_1,t_2}(\delta),$$

де $C_{t_1,t_2}>0$ *і* $\widetilde{C}_{t_1,t_2}(\delta)>0$ *– деякі сталі.*

Доведення. Нехай $p\in\mathbb{P}^*$, $(a,b,f)\in\mathbb{D}_p^*$ і $\Phi\in\mathbb{H}_p$. Зведемо задачу на відшукання множини $\boldsymbol{SVI}(a,b,f,\Phi)$ до знаходження розв'язків деякої параболічної варіаційної нерівності.

Приймемо для всіх $t\in(-\infty,T)$

$$A_{a,b}(t;\cdot)\stackrel{\text{def}}{=}G_a(t;\cdot)\circ J_a(t;\cdot)+B_b(t;\cdot).\tag{20}$$

Очевидно, що $A_{a,b}(t;\cdot):W_p^{1/p'}(\Gamma)\to W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)$.

Розглянемо задачу: знайти функцію $w\in L_{p,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T];W_p^{1/p'}(\Gamma)\big)\cap C\big((-\infty,T];L_2(\Gamma)\big)$, яка задовольняє варіаційну нерівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big\{\big\langle v'(t)+A_{a,b}\big(t;w(t)\big)-f(t),v(t)-w(t)\big\rangle_\Gamma+\Phi\big(v(t)\big)-\Phi\big(w(t)\big)\Big\}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left\|v(t)-w(t)\right\|^2_{L_2(\Gamma)}\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2}\tag{21}$$

для будь-яких $t_1<t_2\leqslant T$ і довільних $v\in\mathbb{V}_p$. Зазначимо, що в (21) оператор $A_{a,b}$ діє з простору $L_{p,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T];\ W_p^{1/p'}(\Gamma)\big)$ в простір $L_{p',\mathrm{loc}}\big((-\infty,T];\ W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)\big)$. Цю задачу далі коротко називатимемо задачею (21), а функцію w – її розв'язком.

Легко переконатися, використовуючи лему 2 та лему 4.1 глави III монографії [8], в такому: $w(x,t)$, $(x,t)\in\Omega\times(-\infty;T)$, – розв'язок задачі (21), то функція

$$u(x,t)\stackrel{\text{def}}{=}J_a\big(t;w(x,t)\big),\ (x,t)\in\Omega\times(-\infty;T),$$

належить $\boldsymbol{SVI}(a,b,f,\Phi)$.

Доведемо існування розв'язку задачі (21), використавши теорему 2 [10]. Для цього покажемо, що оператор $A_{a,b}(t;\cdot):W_p^{1/p'}(\Gamma)\to W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)$ є рівномірно монотонним, коерцетивним, обмеженим і семінеперервним для $t\in(-\infty,T)$. Зауважимо, що згідно з [11] для довільної функції $\widetilde{w}\in W_p^1(\Omega)$ правильною є така нерівність:

$$\left\|\widetilde{w}\right\|_{W_p^1(\Omega)}\geqslant C_8\left\|\gamma_0\widetilde{w}\right\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)},\tag{22}$$

де $C_8>0$ – деяка незалежна від $\widetilde{w}$ стала.

Доведемо спочатку, що для будь-якого $t \in (-\infty, T)$ оператор $A_{a,b}(t;\cdot)$ – рівномірно монотонний. Нехай $w_1, w_2 \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$. На підставі (4), (15), (19), (22) і умов **5** та **8** одержуємо

$$\begin{aligned}
&\big\langle A_{a,b}(t;w_1) - A_{a,b}(t;w_2), w_1 - w_2\big\rangle_\Gamma = \\
&= \big\langle G_a\big(t; J_a(t;w_1)\big) - G_a\big(t; J_a(t;w_2)\big), w_1 - w_2\big\rangle_\Gamma + \big\langle B_b(t;w_1) - B_b(t;w_2), w_1 - w_2\big\rangle_\Gamma = \\
&= \int\limits_\Omega \bigg\{ \sum_{i=1}^n \Big(a_i\big(x,t,J_a(t;w_1), \nabla J_a(t;w_1)\big) - a_i\big(x,t,J_a(t;w_2), \nabla J_a(t;w_2)\big)\Big) \times \\
&\times \big(J_a(t;w_1) - J_a(t;w_2)\big)_{x_i} + \Big(a_0\big(x,t,J_a(t;w_1), \nabla J_a(t;w_1)\big) - a_0\big(x,t,J_a(t;w_2), \nabla J_a(t;w_2)\big)\Big) \times \\
&\times \big(J_a(t;w_1) - J_a(t;w_2)\big)\bigg\}\, dx + \int\limits_\Gamma \big(b(x,t,w_1) - b(x,t,w_2)\big)(w_1 - w_2)\, d\Gamma \geqslant \\
&\geqslant C_9 \big\| J_a(t;w_1) - J_a(t;w_2)\big\|^p_{W_p^1(\Omega)} \geqslant C_{10} \| w_1 - w_2\|^p_{W_p^{1/p'}(\Gamma)},
\end{aligned}$$

де C_9 і C_{10} – деякі додатні сталі.

Коерцетивність оператора $A_{a,b}(t;\cdot)$ при $t \in (-\infty, T)$, враховуючи зауваження 1.4 глави III монографії [13], випливає з його рівномірної монотонності.

Доведемо обмеженість оператора $A_{a,b}(t;\cdot)$ при $t \in (-\infty, T)$. Врахувавши лему 1 і співвідношення (16), (19), (20), на підставі **7** отримаємо

$$\begin{aligned}
&\big\| A_{a,b}(t;w)\big\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)} = \big\| G_a\big(t; J_a(t;w)\big) + B_b(t;w)\big\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)} \leqslant \\
&\leqslant \big\| G_a\big(t; J_a(t;w)\big)\big\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)} + \big\| B_b(t;w)\big\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)} \leqslant d_1(t) \|w\|^{p-1}_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} + d_2(t),
\end{aligned}$$

для довільних $w \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$, де $d_1 > 0$, $d_2 \geqslant 0$ – деякі функції відповідно з $L_{\infty,\mathrm{loc}}\big((-\infty, T]\big)$ та $L_{p',\mathrm{loc}}\big((-\infty, T]\big)$. Тепер покажемо, що оператор $A_{a,b}(t;\cdot)$ для кожного $t \in (-\infty, T)$ семінеперервний, тобто функція

$$[0;1] \ni s \overset{\Psi}{\to} \big\langle A_{a,b}(t; v + sw), w\big\rangle_\Gamma \in \mathbb{R}$$

є неперервною для будь-яких $v, w \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$. Нехай $v, w \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ – довільні елементи. Приймемо $w^s \overset{\mathrm{def}}{=} v + sw$, $s \in (0;1]$. Очевидно, що $w^s \xrightarrow{s\to 0} w$ в $W_p^{1/p'}(\Gamma)$, тому і в $L_p(\Gamma)$. Використовуючи це, на підставі умов **6**, **7** та наслідку 3.4 монографії [8] (ст. 49) одержимо

$$\int\limits_\Gamma \big| b(x,t,w^s) - b(x,t,w)\big|^{p'}\, dS \xrightarrow{s\to 0} 0. \tag{23}$$

Приймемо $\widetilde{w} \overset{\mathrm{def}}{=} J_a(t;w)$ і $\widetilde{w}^s \overset{\mathrm{def}}{=} J_a(t;w^s)$ для довільного $s \in (0,1]$. З леми 2 випливає, що $\widetilde{w}^s \xrightarrow{s\to 0} \widetilde{w}$ в $W_p^1(\Omega)$, коли $w^s \xrightarrow{s\to 0} w$ в $W_p^{1/p'}(\Gamma)$. Тому, використовуючи **1**, **2** та наслідок 3.4 монографії [8] (ст. 49), одержимо

$$\int\limits_\Omega \big| a_i(x,t,\widetilde{w}^s, \nabla \widetilde{w}^s) - a_i(x,t,\widetilde{w}, \nabla \widetilde{w})\big|^{p'}\, dx \xrightarrow{s\to 0} 0, \quad i = \overline{0,n}.$$

Звідси, використовуючи нерівність Гельдера, матимемо

$$\big|\big\langle G_a\big(t;J_a(t;w^s)\big)-G_a\big(t;J_a(t;w)\big),w\big\rangle_\Gamma\big| =$$
$$=\Big|\int\limits_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^n\big(a_i(x,t,\widetilde{w}^s,\nabla\widetilde{w}^s)-a_i(x,t,\widetilde{w},\nabla\widetilde{w})\big)\widetilde{w}_{x_i}+$$
$$+\big(a_0(x,t,\widetilde{w}^s,\nabla\widetilde{w}^s)-a_0(x,t,\widetilde{w},\nabla\widetilde{w})\big)\widetilde{w}\Big\}\,dx\Big|\overset{s\to0}{\longrightarrow}0. \quad (24)$$

З (23) і (24) легко випливає, що $\Psi(s)\to\Psi(0)$ при $s\to0$, що і треба було показати.

Отже, стосовно задачі (21) виконуються умови теореми 2 праці [10], тому ця задача має розв'язок. Єдиність цього розв'язку випливає з теореми 1 цієї ж статті. Це означає, що задача $\boldsymbol{VI}(\mathbb{D}_p^*,\mathbb{H}_p,\mathbb{U}_p:p\in\mathbb{P}^*)$ є однозначно розв'язною.

Покажемо тепер, що розв'язок задачі $\boldsymbol{VI}(\mathbb{D}_p^*,\mathbb{H}_p,\mathbb{U}_p:p\in\mathbb{P}^*)$ неперервно залежить від вихідних даних. Нехай $(a^k,b^k,f_k)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}(a,b,f)$ в $\mathbb{D}_p^*$, де $u\in\boldsymbol{SVI}(a,b,f,\Phi)$, $u_k\in\boldsymbol{SVI}(a^k,b^k,f_k,\Phi)$, $k\in\mathbb{N}$. Тоді очевидно, що функція $w(t)\overset{\text{def}}{=}\gamma_0u(\cdot,t)$, $t\in(-\infty;T)$, є розв'язком задачі (21), а функція $w_k(t)\overset{\text{def}}{=}\gamma_0u_k(\cdot,t)$, $t\in(-\infty;T)$, $(k\in\mathbb{N})$ – розв'язком задачі, відмінної від (21) лише тим, що замість оператора $A_{a,b}$ стоїть оператор A_{a^k,b^k}, а функції f – функція f_k. Згідно з [10, теорема 3] маємо, що $w_k\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}w$ в просторі $L_{p,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T];\,W_p^{1/p'}(\Gamma)\big)\cap C\big((-\infty,T];L_2(\Gamma)\big)$. Згідно з лемою 2 $u_k\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}u$ в $L_{p,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T];\,W_p^1(\Omega)\big)$. Отже, маємо збіжність послідовності $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ до u в просторі $\mathbb{U}_p$. Оцінка розв'язку випливає безпосередньо з теореми 2 [10] та леми 1.

1. *Friedman A.* The initial value problem for the lianerized equations of water-waves / *Friedman A., Shinbort M.* // J. Math. Mech. – 1967. – №17. – P.107-180.
2. *Garipov R.M.* On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness / *Garipov R.M.* // Archive Rat. Mech. Anal. – 1967. – №24 – P. 352-362.
3. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. / *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* – М.: Мир, 1971. – 372 с.
4. *Bejenaru I.* An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic systems with dynamic boundary conditions / *Bejenaru I., Diaz J.I. and Vrabie I.I.* // Electron. J. Differential Equations. – 2001. – №50. – P. 1-19.
5. *Andreu F.* A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions / *Andreu F., Igbida N., Mazon J.M., Toledo J.* // Interfaces Free Bound. – 2006. – №4. – P. 447-479.
6. *Fila M.* Global solutions of the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition / *Fila M., Quittner P.* // Math. Methods Appl. Sci. – 1997. – №20. – P. 1325-1333.
7. *Vitillaro E.* On the Laplace equation with nonlinear dynamical boundary conditions / *Vitillaro E.* // Proc. London Math. Soc. – 2006. – Vol.3, №93. – P. 418-446.
8. *Showalter R.E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. / *Showalter R.E.* – Providence: Amer. Math. Soc. – Vol 49. – 1997. – 278 p. (Mathematical Surveys and Monographs)

9. *Бокало Н.М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений / *Бокало Н.М.* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3-44.
10. *Bokalo M.M.* Well-posedness of problems without initial conditions for nonlinear parabolic variational inequalities / *Bokalo M.M.* // Nonlinear boundary value problems. – 1998. – №8. – P. 58-63.
11. *Adams R.A.* Sobolev spaces. / *Adams R.A.* – New York; San Francisco; London: Academic press, 1975. – 270 p.
12. *Gagliardo E.* Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili / *Gagliardo E.* // Rend. Sem Mat. Padova. – 1957. – №27. – P. 284-305.
13. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.

A PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR EVOLUTION VARIATIONAL INEQUALITIES ON MANIFOLD

Mykola BOKALO, Yuriy DMYTRYSHYN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1
e-mail: yuree@yandex.ru

In this paper we consider a problem for the second order quasilinear equation, given on the cylinder with parallel to t-axis generatrices, where the time variable t runs through the interval $(-\infty, T]$. The boundary condition at the cylinder surface is given by a nonlinear evolutional variational inequality, containing the first derivatives of search function with respect to time and space variables. We find a sufficient condition to existence of the unique solution of this problem, it's continuous dependence on initial data without restrictions on increasing of initial data and behavior of solution at $t \to -\infty$.

Key words: dynamic boundary-value problems, dynamic boundary conditions, evolution variational inequalities, quasilinear elliptic equations

Стаття надійшла до редколегії 05.09.2007

Прийнята до друку 22.10.2008