ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 68. С. 43-58 Ser.Mech-Math. 2008. Vol. 68. P. 43-58

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З НЕЛОКАЛЬНОЮ ДІЄЮ

Тарас БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, Львів, вул. Університетська, 1

Розглянуто мішану задачу для параболічного рівняння
$u_t - \sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u + \int\limits_0^t K(x,t,s)u(x,s)ds = f(x,t)$
в необмеженій області. Одержано умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: параболічне рівняння, нелокальний доданок.

1. Перші результати стосовно єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності в класах зростаючих функцій отримали Е.Е. Леві (E.E. Levi) та Е. Хольмгрен (E. Holmgrem). У праці [1] А.Н. Тихонов довів таке: якщо функція u є розв'язком задачі Коші

$$u_t - \triangle u = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T), \quad u|_{t=0} = 0, \tag{1}$$

і задовольняє оцінку

$$|u(x,t)| \leqslant Ce^{a|x|^2}, \tag{2}$$

де $a \geq 0$, $C > 0$ – сталі, то $u \equiv 0$. Дещо ширший клас знайшов С. Теклінд (S. Taklind): розв'язок u задачі (1) тотожно рівний нулю, якщо $|u(x,t)| \leq Ce^{|x|h(|x|)}$, де $h(|x|)$ – неспадна невід'ємна функція, що задовольняє умову $\int_1^\infty \frac{d\tau}{h(\tau)} = +\infty$.

Для крайових задач в необмежених областях результати про єдиність розв'язку в класах зростаючих функцій для параболічних рівнянь і систем отримали В.П. Лавренчук, С.Д. Івасишен, О.А. Олійник і Е.В. Радкевич [2]. Дослідження в цих працях побудовано на властивостях і оцінках функції Гріна та фундаментальних розв'язків.

У цій праці розглянуто мішану задачу в необмеженій області для параболічного рівняння з нелокальною дією.

2. Формулювання задачі й основних результатів. Нехай n – деяке натуральне число, Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$ така, що для будь-якого $R \in \mathbb{N}$ множина $\Omega^R \overset{\text{def}}{=} \Omega \cap \{x : |x| \overset{\text{def}}{=} (x_1^2 + \dots x_n^2)^{\frac{1}{2}} < R\}$ є областю з кусково-гладкою межею

$\partial\Omega^R$, а $T > 0$ – деяке дійсне число. Введемо такі позначення: $Q_\tau \overset{\text{def}}{=} \Omega \times (0,\tau)$, $S_\tau \overset{\text{def}}{=} \partial\Omega \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau = \{(x,\tau) : x \in \Omega\}$, $Q_\tau^R \overset{\text{def}}{=} \Omega^R \times (0,\tau)$, $S_\tau^R \overset{\text{def}}{=} \partial\Omega^R \times (0,\tau)$, де $\tau \in (0,T]$, $R > 0$.

Розглянемо задачу

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u + \int\limits_0^t K(x,t,s)u(x,s)ds = \\ = f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$u|_{S_T} = 0. \tag{5}$$

Припустимо, що виконуються умови:

(A): $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$; $a_{ij} = a_{ji}$ майже скрізь на Q_T $(i,j = \overline{1,n})$, $a_0|\xi|^2 \le \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \le$ $\le a_1|\xi|^2$ для будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $(x,t) \in Q_T$, $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ – деякі сталі;

(B): $b_i \in L^\infty(Q_T)$ $(i = \overline{1,n})$ і нехай $b_0 \ge 0$ – стала, така, що $\sum\limits_{i=1}^n b_i^2(x,t) \le b_0$ для майже всіх $(x,t) \in \overline{Q}_T$;

(C): $c \in L^\infty(Q_T)$ і нехай $c_0 > 0$ – стала, для якої виконується нерівність $-c(x,t) \le c_0$ для майже всіх $(x,t) \in \overline{Q}_T$;

(K): $K \in L^\infty(\Omega \times (0,T) \times (0,T))$ і нехай $K_0 \ge 0$ – стала, така, що $|K(x,t,s)| \le K_0$ для майже всіх $(x,t,s) \in \Omega \times (0,T) \times (0,T)$;

(F): $f \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q}_T)$, $\quad u_0 \in L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$.

Означення 1. *Нехай T_0 – число з проміжку $(0,T]$. Функцію u з простору $C([0,T_0]; L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T_0); \overset{o}{H}{}^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega}))$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (3)-(5) в області Q_{T_0}, якщо вона задовольняє рівність*

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u\eta dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-u\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}\eta + c(x,t)u\eta + \\ +\eta \int\limits_0^t K(x,t,s)u(x,s)ds\Big]dxdt = \int\limits_{\Omega_0} u_0\eta dx + \int\limits_{Q_\tau} f(x,t)\eta dxdt \tag{6}$$

для будь-яких $\tau \in (0,T_0]$ і довільних $\eta \in C^1(\overline{Q}_{T_0})$ таких, що $\eta = 0$ на S_{T_0} і supp η є обмеженою множиною.

Приймемо $R_k \overset{\text{def}}{=} 2^k$ для будь-якого натурального числа k, $M \overset{\text{def}}{=} 2((16a_1^2 + +b_0)/a_0 + c_0 + K_0T)$.

Визначимо для дійсних чисел $a \ge 0$ і $\nu \ge 0$ функцію $h_{a,\nu}(r)$, $r > 0$, за правилом: $h_{a,\nu}(r) = e^{ar^2}$, якщо $a > 0$, і $h_{a,\nu}(r) = r^\nu$, якщо $a = 0$.

Теорема 1. (існування розв'язку) . *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(K)**, **(F)** *і, крім того, припустимо, що*

$$\int\limits_{\Omega^{R_k}} u_0^2 dx + \int\limits_{Q_T^{R_k}} f^2 dxdt \le C_1 h_{a,\nu}(R_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

де $a \ge 0$, $\nu \ge 0$ *і* $C_1 > 0$ *– деякі сталі.*

Тоді у випадку $a > 0$ *для будь-якого числа* $T_0 \in (0,T]$ *такого, що* $T_0 < \dfrac{1}{512\,Me}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{1}{16^l a + 2}$, *а у випадку* $a = 0$ *для* $T_0 = T$, *задача (3)-(5) має узагальнений розв'язок* u *в області* Q_{T_0}, *який задовольняє оцінку*

$$\max_{\tau\in[0,T_0]} \int\limits_{\Omega_\tau^{R_k}} |u|^2 dx + \int\limits_{Q_{T_0}^{R_k}} \Big[|\nabla u|^2 + |u|^2\Big] dx \le C_2 h_{b,\nu}(R_k), \tag{8}$$

де $C_2 > 0$ *– деяка стала,* $b = 0$ *при* $a = 0$ *і* $b = 16^N a$ *при* $a > 0$, *де* N *найменше натуральне число таке, що* $T_0 < \dfrac{1}{512\,Me}\sum\limits_{l=0}^{N}\dfrac{1}{16^l a + 2}$.

Теорема 2. (єдиність розв'язку) . *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(K)**, **(F)** *і* T_0 *– яке-небудь число з проміжку* $(0,T]$. *Тоді задача (3)-(5) не може мати більше одного узагальненого розв'язку в області* Q_{T_0} *у класі функцій* v *з* $L^2_{\mathrm{loc}}(Q_{T_0})$, *які задовольняють умову*

$$\int\limits_{Q_{T_0}^{R_k}} |v|^2 dxdt \le C_3 e^{dR_k^2} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

де $d \ge 0$, C_3 *– деякі (залежні від* v*) сталі.*

3. Існування та єдиність узагальненого розв'язку мішаної задачі в обмеженій області. Нехай D – обмежена підобласть області Ω з кусково-гладкою межею ∂D. У цьому підрозділі використовуватимемо такі позначення: $G_\tau \overset{\mathrm{def}}{=} D \times (0,\tau)$, $\Gamma_\tau \overset{\mathrm{def}}{=} \partial D \times (0,\tau)$, $D_\tau \overset{\mathrm{def}}{=} \{(x,\tau) : x \in D\}$ $\forall \tau \in (0,T]$. Розглянемо задачу

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u + \int_0^t K(x,t,s)u(x,s)ds =$$
$$= f(x,t), \qquad (x,t) \in G_T, \tag{10}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in D, \tag{11}$$

$$u|_{\Gamma_T} = 0. \tag{12}$$

Означення 2. *Функцію* u *з простору* $C([0,T];L^2(D)) \cap L^2((0,T);\overset{o}{H}{}^1(D))$ *називатимемо узагальненим розв'язком задачі (10)-(12), якщо вона задовольняє рівність*

$$\int\limits_{D_\tau} u\eta dx + \int\limits_{G_\tau} \Big[-u\eta_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}\eta + cu\eta +$$

$$+\eta \int_0^t K(x,t,s)u(x,s)ds\Big]dxdt = \int_{D_0} u_0\eta dx + \int_{G_\tau} f\eta dxdt \qquad (13)$$

для будь-яких $\tau \in (0,T]$ і довільних $\eta \in C^1(\overline{G}_T)$ таких, що $\eta = 0$ на Γ_T.

Твердження 1. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(K)**, **(F)**. *Тоді задача (10)-(12) має тільки один узагальнений розв'язок.*

Доведення. Спочатку доведемо існування узагальненого розв'язку. Для цього використаємо метод Гальоркіна.

Виберемо систему функцій $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$, яка є базисом в $\overset{o}{H}{}^1(D)$ і ортонормованим базисом в $L^2(D)$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ шукатимемо m-те гальоркінське наближення узагальненого розв'язку нашої задачі у вигляді

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k^m(t)\varphi^k(x), \qquad (x,t) \in G_T, \qquad (14)$$

де $c_1^m, \ldots, c_m^m$ – абсолютно неперервні функції такі, що виконуються рівності

$$L(u^m,\varphi^l)(t) \equiv \int_D \Big[u_t^m\varphi^l + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}^m\varphi_{x_j}^l + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}^m\varphi^l +$$

$$+cu^m\varphi^l + \varphi^l \int_0^t K(x,t,s)u^m(x,s)ds - f\varphi^l\Big]dx = 0, \qquad l = \overline{1,m}, \qquad (15)$$

для майже всіх $t \in (0,T)$, і рівність

$$u^m|_{t=0} = u_0^m, \qquad (16)$$

де u_0^m – m-та частинна сума ряду Фур'є функції u_0 за базисом $\{\varphi^k\}_{k=1}^{k=\infty}$, тобто $u_0^m(x) = \sum_{k=1}^m d_k\varphi^k(x)$, $x \in D$, де $d_k = \int_D u_0\varphi^k dx, \quad k = \overline{1,m}$.

На підставі співвідношення (14), рівності (15) і (16) еквівалентні рівностям

$$(c_l^m)' + \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m c_k^m \int_D a_{ij}\varphi_{x_i}^k\varphi_{x_j}^l dx + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m c_k^m \int_D b_i\varphi_{x_i}^k\varphi^l dx +$$

$$+\sum_{k=1}^m c_k^m \int_D c\varphi^k\varphi^l dx + \int_D \sum_{k=1}^m \varphi^k(x)\varphi^l(x)\Big(\int_0^t K(x,t,s)c_k^m(s)ds\Big)dx -$$

$$-\int_D f\varphi^l dx = 0, \qquad l = \overline{1,m}, \quad \text{для майже всіх } t \in (0,T), \qquad (17)$$

$$c_k^m(0) = d_k, \qquad k = \overline{1,m}. \qquad (18)$$

Отож, функції $c_1^m, \ldots, c_m^m$ є розв'язками задачі (17), (18), яка є задачею Коші для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь. На підставі наших припущень з [4] випливає, що існує єдиний непродовжуваний розв'язок $c_k^m, k=\overline{1,m}$, задачі (17), (18) визначений на проміжку $[0,T_1\rangle$.

Для кожного $l \in \{1,\dots,m\}$ домножимо l-ту рівність системи (15) на c_l^m і підсумуємо по l від 1 до m. Отримаємо $L(u^m,u^m)=0$ майже скрізь на $(0,T_1)$. Далі проінтегруємо цю рівність за t від 0 до $\tau \in (0,T_1\rangle$. У результаті отримаємо

$$\int\limits_{G_\tau} u_t^m u^m dxdt + \int\limits_{G_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i}^m u_{x_j}^m dxdt + \int\limits_{G_\tau} \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}^m u^m dxdt + \int\limits_{G_\tau} c|u^m|^2 dxdt +$$
$$+ \int\limits_{G_\tau} u^m(x,t) \int\limits_0^t K(x,t,s) u^m(x,s) dsdxdt - \int\limits_{G_\tau} f u^m dxdt = 0, \quad \tau \in (0,T_1\rangle. \tag{19}$$

Перепишемо (19) у вигляді

$$\int\limits_{G_\tau} u_t^m u^m dxdt + \int\limits_{G_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i}^m u_{x_j}^m dxdt = -\int\limits_{G_\tau} \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}^m u^m dxdt - \int\limits_{G_\tau} c|u^m|^2 dxdt -$$
$$- \int\limits_{G_\tau} u^m(x,t) \int\limits_0^t K(x,t,s) u^m(x,s) dsdxdt + \int\limits_{G_\tau} f u^m dxdt, \quad \tau \in (0,T_1\rangle. \tag{20}$$

Далі оцінимо кожний член рівності (20), враховуючи умови **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(K)**, **(F)** та використовуючи нерівності Коші та Коші-Буняковського

$$\int\limits_{G_\tau} u_t^m u^m dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_D \Big(|u^m(x,\tau)|^2 - |u^m(x,0)|^2 \Big) dx; \tag{21}$$

$$\int\limits_{G_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i}^m u_{x_j}^m dxdt \overset{(\mathbf{A})}{\geq} a_0 \int\limits_{G_\tau} |\nabla u^m|^2 dxdt; \tag{22}$$

$$-\int\limits_{G_\tau} c|u^m|^2 dxdt \leq c_0 \int\limits_{G_\tau} |u^m|^2 dxdt; \tag{23}$$

$$\int\limits_{D_0} |u_0^m|^2 dx \leq \int\limits_{D_0} |u_0|^2 dx; \tag{24}$$

$$-\int\limits_{G_\tau} \textstyle\sum_{i=1}^n b_i(x,t) u_{x_i}^m u^m dxdt \leq \int\limits_{G_\tau} \sum_{i=1}^n \Big(\dfrac{\varepsilon}{2} |u_{x_i}^m|^2 + \dfrac{1}{2\varepsilon} b_i^2 |u^m|^2 \Big) dxdt \overset{(\mathbf{B})}{\leq}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{G_\tau} |\nabla u^m|^2 dxdt + \frac{b_0}{2\varepsilon} \int\limits_{G_\tau} |u^m|^2 dxdt; \tag{25}$$

$$-\int\limits_{G_\tau} u^m \int\limits_0^t K(x,t,s) u^m(x,s) dsdxdt \overset{(\mathbf{K})}{\leq}$$

$$\leq K_0\Big(\int\limits_{G_\tau}|u^m|^2dxdt\Big)^{\frac12}\Big(\int\limits_{G_\tau}\Big(\int\limits_0^t|u^m(x,s)|ds\Big)^2dxdt\Big)^{\frac12}\leq$$

$$\leq K_0\sqrt{T}\Big(\int\limits_{G_\tau}|u^m|^2dxdt\Big)^{\frac12}\Big(\int\limits_{G_\tau}\Big(\int\limits_0^t|u^m(x,s)|^2ds\Big)dxdt\Big)^{\frac12}\leq TK_0\int\limits_{G_\tau}|u^m|^2dxdt; \quad (26)$$

$$\int\limits_{G_\tau}fu^mdxdt\leq\frac12\int\limits_{G_\tau}|f|^2dxdt+\frac12\int\limits_{G_\tau}|u^m|^2dxdt. \quad (27)$$

З (20), враховуючи оцінки (21)-(27), отримаємо

$$\frac12\int\limits_{D_\tau}|u^m|^2dx+\Big(a_0-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\int\limits_{G_\tau}|\nabla u^m|^2dxdt\leq\frac12\int\limits_{G_\tau}|f|^2dxdt+\frac12\int\limits_{D_0}|u_0|^2dx+$$
$$+\Big(c_0+TK_0+\frac{b_0}{2\varepsilon}+\frac12\Big)\int\limits_{G_\tau}|u^m|^2dxdt. \quad (28)$$

Виберемо $\varepsilon=a_0>0$. Тоді матимемо

$$\int\limits_{D_\tau}|u^m|^2dx+a_0\int\limits_{G_\tau}|\nabla u^m|^2dxdt\leq\int\limits_{G_\tau}|f|^2dxdt+\int\limits_{D_0}|u_0^m|^2dx+C_4\int\limits_{G_\tau}|u^m|^2dxdt, \quad (29)$$

де $C_4>0$ – стала, яка не залежить від m.

Приймемо $C_5\stackrel{\text{def}}{=}\int_{G_T}|f|^2dxdt+\int_{D_0}|u_0|^2dx$ і, врахувавши, що $a_0>0$, з (29) отримаємо

$$\int\limits_{D_\tau}|u^m|^2dx\leq C_5+C_4\int\limits_0^\tau\int\limits_{D_t}|u^m|^2dxdt. \quad (30)$$

За лемою Гронуолла-Белмана з (30) матимемо

$$\int\limits_{D_\tau}|u^m|^2dx\leq C_6,\qquad\forall\tau\in[0,T_1\rangle, \quad (31)$$

де $C_6>0$ – стала, яка не залежить від m.

З (31), зокрема, випливає, що $[0,T_1\rangle=[0,T]$. Перепишемо (29) у вигляді

$$\int\limits_{D_\tau}|u^m|^2dx+a_0\int\limits_{G_\tau}|\nabla u^m|^2dxdt\leq C_5+C_4\int\limits_0^\tau\int\limits_{D_t}|u^m|^2dxdt,\quad\tau\in(0,T]. \quad (32)$$

Додамо до правої та лівої частини (32) $a_0\int_{G_\tau}|u^m|^2dxdt$ і застосуємо (31) до правої частини

$$\int\limits_{D_\tau}|u^m|^2dx+a_0\int\limits_{G_\tau}\Big[|\nabla u^m|^2+|u^m|^2\Big]dxdt\leq C_7,\quad\tau\in(0,T]. \quad (33)$$

де $C_7 > 0$ – стала, яка не залежить від m.

З (33) випливають оцінки

$$\|u^m\|_{C([0,T];L^2(D))} + \|u^m\|_{L^2((0,T);\overset{0}{H^1}(D))} \leq C_8, \tag{34}$$

де $C_8 > 0$ – стала, яка не залежить від τ і m.

З оцінки (34) випливає існування підпослідовності послідовності $\{u^m\}$ (цю підпослідовність так само позначатимемо через $\{u^m\}$) і функції $u \in L^\infty((0,T);L^2(D)) \cap L^2((0,T);\overset{0}{H^1}(D))$ таких, що

$$u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ – } *\text{-слабко в } L^\infty((0,T);L^2(D)), \tag{35}$$

$$u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ – слабко в } L^2((0,T);\overset{0}{H^1}(D)). \tag{36}$$

Покажемо, що для будь-яких $\eta \in L_2(G_T)$

$$\int\limits_{G_T} \eta(x,t) \int\limits_0^t K(x,t,s)u^m(x,s)ds\, dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{G_T} \eta(x,t) \int\limits_0^t K(x,t,s)u(x,s)ds\, dxdt. \tag{37}$$

Справді, змінивши на підставі теореми Фубіні порядок інтегрування та використавши (36), матимемо

$$\int\limits_{G_T} \eta(x,t) \int\limits_0^t K(x,t,s)u^m(x,s)ds\, dxdt = \int\limits_D dx \int\limits_0^T dt \int\limits_0^t \eta(x,t)K(x,t,s)u^m(x,s)ds =$$

$$= \int\limits_D dx \int\limits_0^T u^m(x,s)ds \int\limits_s^T \eta(x,t)K(x,t,s)dt = \int\limits_{G_T} u^m(x,s)\Big(\int\limits_s^T \eta(x,t)K(x,t,s)dt\Big)dxds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{G_T} u(x,s)\Big(\int\limits_s^T \eta(x,t)K(x,t,s)dt\Big)dxds = \int\limits_{G_T} \eta(x,t) \int\limits_0^t K(x,t,s)u(x,s)dsdxdt. \tag{38}$$

Виберемо яке-небудь натуральне число j таке, що для кожного $l \in \{1,\ldots,j\}$ домножимо l-ту рівність системи (15) на $d_l \in C^1[0,T]$, $d_l(T) = 0$. Отримані рівності підсумуємо та результати проінтегруємо за t від 0 до T. У результаті простих перетворень матимемо

$$\int\limits_{G_T} \Big[-u^m\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u^m_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u^m_{x_i}\eta + cu^m\eta + \eta\int\limits_0^t K(x,t,s)u^m(x,s)ds\Big]dxdt =$$
$$= \int\limits_{D_0} u_0^m\eta dx + \int\limits_{G_T} f\eta dxdt, \tag{39}$$

де $\eta = \sum\limits_{l=1}^j d_l(t)\varphi^l(x), \quad (x,t) \in \overline{G_T}$.

Перейдемо в (39) до границі при $m \to \infty$, врахувавши (36) і (3). У результаті отримаємо

$$\int\limits_{G_T} \Big[-u\eta_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} \eta + cu\eta + \eta \int\limits_0^t K(x,t,s) u(x,s) ds \Big] dxdt =$$
$$= \int\limits_{D_0} u_0 \eta dx + \int\limits_{G_T} f\eta dxdt \qquad (40)$$

для будь-яких $\eta \in P = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \{ \sum\limits_{l=1}^{j} d_l(t) \varphi^l(x), (x,t) \in G_T : d_l \in C^1[0,T], d_l(T) = 0, l = \overline{1,j} \}$.

Оскільки будь-яку функцію $\eta \in C^1(\overline{G}_T)$ таку, що $\eta(x,t) = 0$, коли $(x,t) \in \Gamma_T$ або $t = T$, можна отримати як границю послідовності функцій з P за нормою простору $H^1(G_T)$, то рівність (40) є правильною для будь-якої функції $\eta \in C^1(\overline{G}_T)$, $\eta(x,t) = 0$, коли $(x,t) \in \Gamma_T$ або $t = T$.

Звідси та з зауваження 1 праці [3] випливає, що $u \in C([0,T]; L^2(D))$ і виконується тотожність (13). Отож, функція u є узагальненим розв'язком задачі (10)-(12).

Тепер доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі(10)-(12). Припустимо протилежне. Нехай існує два різні узагальнені розв'язки u^1 і u^2. Розглянемо їхню різницю $v \stackrel{\text{def}}{=} u^1 - u^2$. Тоді v – узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від задачі (10)-(12) тільки тим, що $u_0 = 0$, $f = 0$.

З відповідної тотожності типу (13) для v при $\eta = v$ матимемо

$$\frac{1}{2} \int\limits_{D_\tau} v^2 dx + \int\limits_{G_\tau} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i v_{x_i} v + c|v|^2 + v \int\limits_0^t K(x,t,s) v(x,s) ds \Big] dxdt = 0. \quad (41)$$

Звідси, аналогічно як при доведенні твердження 1, з (19) отримали (30), матимемо

$$\int\limits_{D_\tau} |v|^2 dx \le C_9 \int\limits_0^\tau \int\limits_{D_t} |v|^2 dxdt, \quad \tau \in [0,T], \qquad (42)$$

де $C_9 > 0$ – деяка стала. За лемою Гронуолла-Белмана з (42) матимемо

$$\int\limits_{D_\tau} |v|^2 dx \le 0 \qquad \forall \tau \in [0,T]. \qquad (43)$$

Звідси випливає, що $v(x,t) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in G_T$.

4. Допоміжні твердження. Введемо позначення $Q_{\tau_1,\tau_2} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (\tau_1, \tau_2)$, $Q^R_{\tau_1,\tau_2} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^R \times (\tau_1, \tau_2)$, де τ_1, τ_2 – довільні числа такі, що $0 \le \tau_1 < \tau_2 \le T$, вважаючи, що $Q_{0,\tau} \equiv Q_\tau$, $Q^R_{0,\tau} \equiv Q^R_\tau$.

Лема 1. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(K)** *і для деяких* $R_* > 0$, $0 \le \tau_1 < \tau_2 \le T$ *функція* $v \in C([\tau_1,\tau_2]; L^2(\Omega^{R_*})) \cap L^2((\tau_1,\tau_2); H^1(\Omega^{R_*}))$ *така, що* $v = 0$ *на* $(\partial\Omega \cap \partial\Omega^{R_*}) \times (\tau_1, \tau_2)$ *і*

$$\int\limits_{\Omega_\tau} v\eta dx + \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \Big[-v\eta_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i v_{x_i} \eta + cv\eta +$$

$$+\eta\int\limits_{\tau_1}^{t}K(x,t,s)v(x,s)ds\Big]dxdt=0 \qquad (44)$$

для довільного числа $\tau\in(\tau_1,\tau_2]$ *і функції* $\eta\in H^1((\tau_1,\tau_2);L^2(\Omega^{R_*}))\cap L^2((\tau_1,\tau_2);\overset{0}{H^1}(\Omega^{R_*}))$. *Тоді для будь-яких чисел* r_1, r_2 *і* τ *таких, що* $0\le r_1<r_2\le R_*$, $\tau_1<\tau\le\tau_2$ *і функції* $w(x,t)=v(x,t)e^{-\mu^2t}$, $(x,t)\in Q^{R_*}_{\tau_1,\tau_2}$, *де* $\mu\ge 0$ *– довільне число, правильна нерівність*

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{r_1}}w^2dx+\int\limits_{Q^{r_1}_{\tau_1,\tau_2}}\mu^2w^2dxdt+a_0\int\limits_{Q^{r_1}_{\tau_1,\tau_2}}|\nabla w|^2dxdt\le\frac{M}{\rho^2}\int\limits_{Q^{r_2}_{\tau_1,\tau_2}}w^2dxdt, \qquad (45)$$

де $0<\rho\le min\{r_2-r_1,1\}$.

Доведення. Не втрачаючи загальності, доведемо лему при $\tau_1=0$. Виберемо функцію $\Phi\in C^1(\mathbb{R})$ таку, що $0\le\Phi(t)\le 1$ при $t\in\mathbb{R}$ і $\Phi(t)=0$, якщо $t\ge 1$, $\Phi(t)=1$, якщо $t\le 0$, і $|\Phi'(t)|\le 2$ $\forall t\in\mathbb{R}$. Приймемо $h(x)\overset{\text{def}}{=}\Phi\Big(\frac{|x|-r_1}{r_2-r_1}\Big)$, $\varphi(x)\overset{\text{def}}{=}h^2(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$. Очевидно, що

$$|\nabla\varphi|^2=4h^2|\nabla h|^2\le\frac{16\varphi}{(r_2-r_1)^2}\le\frac{16\varphi}{\rho^2}. \qquad (46)$$

Використовуючи зауваження 1 з [3], приймемо в інтегральному співвідношенні (44) $\eta=we^{-\mu^2t}\varphi$. У результаті простих перетворень отримаємо рівність

$$\frac12\int\limits_{\Omega_\tau^{r_2}}w^2\varphi dx+\int\limits_{Q_\tau^{r_2}}\Big(\mu^2w^2\varphi+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}w_{x_i}w_{x_j}\varphi\Big)dxdt=-\int\limits_{Q_\tau^{r_2}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}w_{x_i}w\varphi_{x_j}dxdt-$$

$$-\int\limits_{Q_\tau^{r_2}}\sum_{i=1}^{n}b_iw_{x_i}w\varphi dxdt-\int\limits_{Q_\tau^{r_2}}cw^2\varphi dxdt-\int\limits_{Q_\tau^{r_2}}we^{-\mu^2t}\varphi\int\limits_0^tKwe^{\mu^2s}ds\,dxdt. \qquad (47)$$

Далі зробимо оцінки членів рівності (47), враховуючи оцінку (46), умови **(A), (B), (C), (K)** і використовуючи нерівності Гельдера та Коші. Отож, для кожного $\tau\in(0,\tau_2]$ матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau^{r_2}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}w_{x_i}w_{x_j}\varphi dxdt\overset{(\mathbf{A})}{\ge}a_0\int\limits_{Q_\tau^{r_2}}|\nabla w|^2\varphi dxdt; \qquad (48)$$

$$-\int\limits_{Q_\tau^{r_2}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}w_{x_i}w\varphi_{x_j}dxdt\le\int\limits_{Q_\tau^{r_2}}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}w_{x_i}^2\varphi_{x_j}\varphi\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}w^2\varphi^{-1}\Big)^{\frac12}dxdt\le$$

$$\le\frac{\varepsilon_1}{2}\int\limits_{Q_\tau^{r_2}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}w_{x_i}w_{x_j}\varphi dxdt+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int\limits_{Q_\tau^{r_2}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}w^2\varphi^{-1}dxdt\overset{(\mathbf{A}),(3)}{\le}$$

$$\leq \frac{\varepsilon_1 a_1}{2} \int\limits_{Q_\tau^{r_2}} |\nabla w|^2 \varphi dxdt + \frac{8a_1}{\varepsilon_1 \rho^2} \int\limits_{Q_\tau^{r_2}} w^2 dxdt, \tag{49}$$

де ε_1 – довільна додатна стала;

$$-\int\limits_{Q_\tau^{r_2}} \sum_{i=1}^n b_i w_{x_i} w\varphi dxdt \leq \int\limits_{Q_\tau^{r_2}} \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\varepsilon_2}{2} w_{x_i}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} b_i^2 w^2\Big)\varphi dxdt \overset{(\mathbf{B})}{\leq}$$

$$\leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int\limits_{Q_\tau^{r_2}} |\nabla w|^2 \varphi dxdt + \frac{b_0}{2\varepsilon_2} \int\limits_{Q_\tau^{r_2}} w^2 dxdt, \tag{50}$$

де ε_2 – довільна додатна стала;

$$-\int\limits_{Q_\tau^{r_2}} cw^2 \varphi dxdt \leq c_0 \int\limits_{Q_\tau^{r_2}} w^2 \varphi dxdt \leq c_0 \int\limits_{Q_\tau^{r_2}} w^2 dxdt; \tag{51}$$

$$-\int\limits_{Q_\tau^{r_2}} we^{-\mu^2 t}\varphi \int\limits_0^t Kwe^{\mu^2 s} ds\, dxdt \leq \int\limits_{Q_\tau^{r_2}} |w|\varphi \int\limits_0^t |Kw| ds\, dxdt \overset{(\mathbf{K})}{\leq}$$

$$\leq K_0 \Big(\int\limits_{Q_\tau^{r_2}} w^2 \varphi dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{Q_\tau^{r_2}} \varphi\Big(\int\limits_0^t |w| ds\Big)^2 dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq K_0 \sqrt{T} \Big(\int\limits_{Q_\tau^{r_2}} w^2 \varphi dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{Q_\tau^{r_2}} \varphi \int\limits_0^\tau w^2 ds\, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq K_0 T \int\limits_{Q_\tau^{r_2}} w^2 dxdt. \tag{52}$$

На підставі оцінок (48)-(52) з (47) одержимо

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau^{r_2}} w^2 \varphi dx + \int\limits_{Q_\tau^{r_2}} \mu^2 w^2 \varphi dxdt + \Big(a_0 - \frac{\varepsilon_1}{2} a_1 - \frac{\varepsilon_2}{2}\Big) \int\limits_{Q_\tau^{r_2}} |\nabla w|^2 \varphi dxdt \leq$$

$$\leq \Big(\frac{8a_1}{\varepsilon_1 \rho^2} + \frac{b_0}{2\varepsilon_2} + c_0 + K_0 T\Big) \int\limits_{Q_\tau^{r_2}} w^2 dxdt. \tag{53}$$

Виберемо в (53) $\varepsilon_1 = \frac{a_0}{2a_1}$ й $\varepsilon_2 = \frac{a_0}{2}$ і в результаті, врахувавши, що $0 < \rho \leq 1$, отримаємо (45).

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1. Тоді при довільних r_1, r_2, τ_1 і τ_2 таких, що $0 < r_1 < r_2 \leq R_*$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq T$, для функції v правильна нерівність*

$$\int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}^{r_1}} v^2 dxdt \leq e^{-q + 2(\tau_2 - \tau_1)\mu^2} \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}^{r_2}} v^2 dxdt, \tag{54}$$

де сталі $q \in \mathbb{N}$ *і* $\mu \in \mathbb{R}_+$ *такі, що*

$$p \stackrel{def}{=} \frac{Mq^2}{\mu^2(r_2-r_1)^2} \le e^{-1}, \quad \frac{r_2-r_1}{q} \le 1. \tag{55}$$

Доведення. З нерівності (45) маємо

$$\int\limits_{Q^{r_1}_{\tau_1,\tau_2}} w^2(x,t)dxdt \le \frac{M}{\rho^2\mu^2} \int\limits_{Q^{r_2}_{\tau_1,\tau_2}} w^2(x,t)dxdt. \tag{56}$$

Нехай $\rho_q = \frac{r_2-r_1}{q}$, $r_1(j) = r_1 + j\rho_q$, $r_2(j) = r_1(j) + \rho_q$, $j = \overline{0, q-1}$. Приймемо в (56) $r_1 = r_1(j)$, $r_2 = r_2(j)$ та $\rho = \rho_q$. Отримаємо $\int\limits_{Q^{r_1(j)}_{\tau_1,\tau_2}} w^2dxdt \le \dfrac{M}{\rho_q^2\mu^2} \int\limits_{Q^{r_2(j)}_{\tau_1,\tau_2}} w^2dxdt$, тобто

$$\int\limits_{Q^{r_1(j)}_{\tau_1,\tau_2}} w^2dxdt \le p \int\limits_{Q^{r_1(j+1)}_{\tau_1,\tau_2}} w^2dxdt, \tag{57}$$

зауваживши, що $r_2(j) = r_1(j+1)$.

Застосуємо послідовно нерівність (57), що відповідає $j = j_0 > 0$, для оцінки правої частини нерівності (57), що відповідає $j = j_0 - 1$, при $j_0 = 1, 2, \ldots, q-1$. У результаті матимемо

$$\int\limits_{Q^{r_1}_{\tau_1,\tau_2}} w^2dxdt \le p^q \int\limits_{Q^{r_2}_{\tau_1,\tau_2}} w^2dxdt. \tag{58}$$

Враховуючи, що $p \le e^{-1}$, отримаємо

$$\int\limits_{Q^{r_1}_{\tau_1,\tau_2}} w^2dxdt \le e^{-q} \int\limits_{Q^{r_2}_{\tau_1,\tau_2}} w^2dxdt. \tag{59}$$

Тепер згадаємо те, що $w(x,t) = v(x,t)e^{-\mu^2 t}$, $(x,t) \in Q^{R_*}_{\tau_1,\tau_2}$ і з нерівності (59) отримаємо (54).

5. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Нехай k – яке-небудь натуральне число. Позначимо через u^k функцію, яка в області $Q^{R_k}_T$ збігається з узагальненим розв'язком задачі (10)-(12) при $D = Q^{R_k}_T$, а на множині $Q_T \backslash Q^{R_k}_T$ дорівнює нулеві.

Оцінимо u^k. Для цього, використавши зауваження 1 праці [3], візьмемо $\eta = u^k$ в тотожності (13) для u^k. Отримаємо рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega^{R_k}_\tau} |u^k|^2dx + \int\limits_{Q^{R_k}_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u^k_{x_i}u^k_{x_j}dxdt = \int\limits_{Q^{R_k}_\tau} \Big[-\sum_{i=1}^n b_i u^k_{x_i}u^k - c|u^k|^2 -$$

$$-u^k \int\limits_0^t K(x,t,s)u^k(x,s)ds\Big]dxdt + \int\limits_{Q_\tau^{R_k}} fu^k dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^{R_k}} |u_0|^2 dx,\ \tau\in(0,T]. \quad (60)$$

Тоді аналогічно як при доведенні леми 1 отримаємо такі оцінки:

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_k}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u^k_{x_i} u^k_{x_j} dxdt \ge a_0 \int\limits_{Q_\tau^{R_k}} |\nabla u^k|^2 dxdt; \quad (61)$$

$$-\int\limits_{Q_\tau^{R_k}} \sum_{i=1}^n b_i u^k_{x_i} u^k dxdt \le \frac{\varepsilon_3}{2}\int\limits_{Q_\tau^{R_k}} |\nabla u|^2 dxdt + \frac{b_0}{2\varepsilon_3}\int\limits_{Q_\tau^{R_k}} u^2 dxdt, \quad (62)$$

де $\varepsilon_3 > 0$ – довільна стала;

$$-\int\limits_{Q_\tau^{R_k}} c|u^k|^2 dxdt \le c_0 \int\limits_{Q_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dxdt; \quad (63)$$

$$-\int\limits_{Q_\tau^{R_k}} u^k \int\limits_0^t K u^k ds dxdt \le K_0 T \int\limits_{Q_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dxdt; \quad (64)$$

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_k}} fu^k dxdt \le \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^{R_k}} |f|^2 dxdt. \quad (65)$$

На підставі (61)-(65) з (60) при $\varepsilon_3 = a_0$ матимемо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dx + \frac{a_0}{2}\int\limits_{Q_\tau^{R_k}} |\nabla u^k|^2 dxdt \le \Big(TK_0 + \frac{b_o}{2a_0} + c_0 + \frac{1}{2}\Big)\int\limits_{Q_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dxdt +$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\Omega_0^{R(k)}} |u_0|^2 dx + \int\limits_{Q_\tau^{R_k}} |f|^2 dxdt\Big), \quad (66)$$

З (66), зокрема, випливає

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dx \le F_k(\tau) + C_{10}\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_t^{R_k}} |u^k|^2 dxdt, \quad (67)$$

де $C_{10} = \mathrm{const} > 0$,

$$F_k(\tau) \overset{\mathrm{def}}{=} \Big(\int\limits_{\Omega_0^{R_k}} |u_0|^2 dx + \int\limits_{Q_\tau^{R_k}} |f|^2 dxdt\Big) \quad \forall \tau\in(0,T]. \quad (68)$$

Отже, застосувавши лему Гронуолла-Белмана до (67), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dx \le C_{11} F_k(T), \quad \tau \in (0,T]. \tag{69}$$

З (69) і (7) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dx \le C_{12} h_{a,\,\nu}(R_k), \tag{70}$$

де $C_{12} > 0$ – стала, яка від k не залежить.

З (66) і (70) випливає оцінка

$$\|u^k\|_{C([0,T];L^2(\Omega^{R_k}))\cap L^2((0,T);H^1(\Omega^{R_k}))} \le C_{13}\sqrt{h_{a,\,\nu}(R_k)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{71}$$

Приймемо $u^{k+2,k+l} \stackrel{\mathrm{def}}{=} u^{k+2} - u^{k+l}$ для будь-яких $k \in \mathbb{N}$, $l > 2$. Очевидно, що функція $v = u^{k+2,k+l}$ задовольняє умови леми 1 при $R_* = R_{k+1}$. Звідси, взявши $r_1 = R_k$, $r_2 = R_{k+1}$ і $\mu = \sqrt{a_0}$, легко отримуємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_k}} |u^{k+2,k+l}|^2 dx + a_0 \int\limits_{Q_\tau^{R_k}} \Big[|u^{k+2,k+l}|^2 + |\nabla u^{k+2,k+l}|^2\Big] dxdt \le C_{14} \int\limits_{Q_\tau^{R_{k+1}}} |u^{k+2,k+l}|^2 dxdt, \tag{72}$$

де $C_{14} > 0$ – стала, яка від k і l не залежить.

Тепер доведемо фундаментальність послідовності $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ в $L^2_{\mathrm{loc}}(Q_{T_1})$, де T_1 – деяке число з проміжку $(0,T]$.

З леми 2 випливає така оцінка:

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_{k+1}}} |u^{k+2,k+3}|^2 dxdt \le e^{-q+2\tau\mu^2} \int\limits_{Q_\tau^{R_{k+2}}} |u^{k+2,k+3}|^2 dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{73}$$

Нехай $\lambda_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2[a]+4$, $g \stackrel{\mathrm{def}}{=} 8(Me)^{\frac{1}{2}}$, $T_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min\{T, (4g^2\lambda_1)^{-1}\}$. Візьмемо в (73) $\tau = T_1$, $q = \lambda_1\, 2^{2(k+3)}$, $\mu = \lambda_1\, g\, 2^{k+3}$. Тоді матимемо

$$\int\limits_{Q_{T_1}^{R_{k+1}}} |u^{k+2,k+3}|^2 dxdt \le e^{-\lambda_1 2^{2(k+3)} + 2(\lambda_1 g)^2 T_1 2^{2(k+3)}} \int\limits_{Q_{T_1}^{R_{k+2}}} |u^{k+2,k+3}|^2 dxdt. \tag{74}$$

Тепер застосуємо оцінку (70) до правої частини (74), врахувавши, що $|u^{k+2,k+3}| \le 2(|u^{k+2}|^2 + |u^{k+3}|^2)$. У результаті одержимо

$$\int\limits_{Q_{T_1}^{R_{k+1}}} |u^{k+2,k+3}|^2 dxdt \le 4C_{12} e^{-\lambda_1 2^{2(k+3)} + 2(\lambda_1 g)^2 T_1 2^{2(k+3)}} e^{a 2^{2(k+3)}} =$$

$$= C_{15} e^{(-\lambda_1 + 2(\lambda_1 g)^2 T_1 + a) 2^{2(k+3)}}, \tag{75}$$

де $C_{15} = 4C_{12} > 0$ – стала, яка від k не залежить.

Легко перевірити, що $-\lambda_1+2(\lambda_1 g)^2T_1+a<-1$. Отож, з нерівності (75) випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_{T_1}^{R_{k+1}}} |u^{k+2,k+3}|^2dxdt \le C_{15}e^{-4^{k+3}} \quad \forall k\in\mathbb{N}. \tag{76}$$

Очевидно, що виконується ланцюжок нерівностей

$$\|u^{k+2,\,k+l}\|_{L_2(Q_{T_1}^{R_{k+1}})} \le \|u^{k+2,\,k+3}\|_{L_2(Q_{T_1}^{R_{k+1}})} + \|u^{k+3,\,k+4}\|_{L_2(Q_{T_1}^{R_{k+2}})} + \ldots + \\ + \|u^{k+l-1,\,k+l}\|_{L_2(Q_{T_1}^{R_{k+l-2}})}. \tag{77}$$

Оцінимо праву частину (77), використовуючи нерівність (76). Матимемо

$$\int\limits_{Q_{T_1}^{R_{k+1}}} |u^{k+2,\,k+l}|^2dxdt \le C_{15}\Big(e^{-4^{k+3}}+e^{-4^{k+4}}+\ldots+e^{-4^{k+l}}\Big) =$$

$$= C_{15}\sum_{i=3}^{l}\Big(e^{-4^k}\Big)^{4^i} \le C_{15}\sum_{i=1}^{\infty}\Big(e^{-4^k}\Big)^{i} \le C_{15}\frac{e^{-4^k}}{1-e^{-4^k}} \le 2C_{15}e^{-4^k}. \tag{78}$$

З (72) і (78) маємо

$$\|u^{k+2\,k+l}\|_{C([0,T_1];L^2(\Omega^{R_k}))\cap L^2((0,T_1);H^1(\Omega^{R_k}))} \le C_{16}e^{-2^{2^{k-1}}}, \quad k,\,l\in\mathbb{N},\, l>2, \tag{79}$$

де $C_{16}>0$ – стала, яка від k і l не залежить.

Звідси випливає фундаментальність послідовності $\{u^k\}$ в просторі $C([0,T_1];L^2(\Omega^{R(k)}))\cap L^2((0,T_1);H^1(\Omega^{R(k)}))$. Отже, існує функція $u_1\in C([0,T_1];L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))\cap L^2((0,T_1);H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ така, що

$$u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_1 \quad \text{в } C([0,T_1];L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))\cap L^2((0,T_1);H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})). \tag{80}$$

Нагадаємо, що для u^k виконується рівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^k\eta dx + \int\limits_{Q_\tau}\Big[-u^k\eta_t+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u^k_{x_i}\eta_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u^k_{x_i}\eta+c(x,t)u^k\eta+$$

$$+\eta\int\limits_0^t K(x,t,s)u^k(x,s)ds\Big]dxdt = \int\limits_{\Omega_0}u_0\eta dx+\int\limits_{Q_T}f(x,t)\eta dxdt \tag{81}$$

для будь-якої функції $\eta\in C^1(\overline{Q_{T_1}})$ такої, що $\eta|_{S_{T_1}}=0$, $\operatorname{supp}\eta\subset\overline{Q_{T_1}^{R_k}}$.

Зафіксувавши η, спрямуємо k до $+\infty$. У результаті, враховуючи (80), отримаємо рівність (6) при $u=u_1$ і $T=T_1$.

Позначимо через $\|\cdot\|_k$ норму в просторі $C([0,T_1];L^2(\Omega^{R_k}))\cap L^2((0,T_1);H^1(\Omega^{R_k}))$. Тоді на підставі (71) і (79)отримаємо

$$\|u\|_k \le \|u-u^{k+2}\|_k+\|u^{k+2}\|_k \le \lim_{l\to\infty}\|u^{k+l}-u^{k+2}\|_k+$$

$$+\|u^{k+2}\|_k \le C_{16}e^{-2^{2^{k-1}}}+C_{13}\sqrt{h_{a,\,\nu}(R_{k+2})} \le C_{17}\sqrt{h_{16a,\,\nu}(R_k)}, \tag{82}$$

де $C_{17}>0$ – стала, що від k не залежить.

Якщо $T_1 = T$, то u_1 – узагальнений розв'язок задачі (3)-(5) в області Q_T. Якщо ж $T_1 < T$, то розглянемо задачу

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u + \int_{T_1}^{t} K(x,t,s)u(x,s)ds =$$

$$= f(x,t) - \int_{0}^{T_1} K(x,t,s)u_1(x,s)ds, \qquad (x,t) \in Q_{T_1,T}, \tag{83}$$

$$u(x,0) = u_1(x,T_1), \qquad x \in \Omega, \tag{84}$$

$$u|_{\partial\Omega\times(T_1,T)} = 0. \tag{85}$$

Тоді, міркуючи аналогічно, легко доводимо існування узагальненого розв'язку u_2 в області Q_{T_1,T_2}, де $T_2 = T_1 + \min\{T - T_1, (4g^2\lambda_2)^{-1}\}$, $\quad \lambda_2 = 2[16a] + 4$.

Далі легко показати, що "склейка" функцій u_1 і u_2, тобто функція $\widehat{u_2}(x,t)$, $(x,t) \in Q_{T_2}$, яка визначена за правилом

$$\widehat{u_2}(x,t) = u_1(x,t) \text{ для майже всіх } (x,t) \in Q_{T_1} \text{ і}$$

$$\widehat{u_2}(x,t) = u_2(x,t) \text{ для майже всіх } (x,t) \in Q_{T_1,T_2}$$

і буде шуканим узагальненим розв'язком розглянутої задачі. Якщо $T_2 < T$, то можна цей процес продовжити. У результаті ми дійдемо висновку про правильність нашого твердження.

Доведення теореми 2. Нехай існують два узагальнені розв'язки u^1 та u^2 задачі (3)-(5). Розглянемо функцію $v = u_1 - u_2$. Застосувавши лему 2 до v, отримаємо

$$\int_{Q_\tau^{r_1}} v^2 dxdt \leq e^{-q+2\tau\mu^2} \int_{Q_\tau^{r_2}} v^2 dxdt, \tag{86}$$

де r_1, r_2 – довільні числа, $0 < r_1 < r_2$ та $q \in \mathbb{N}$ і $\mu > 0$ такі, що $\dfrac{r_2 - r_1}{q} \leq 1$, $\dfrac{Mq^2}{\mu^2(r_2 - r_1)^2} \leq e^{-1}$.

Тепер, вибравши $r_1 = R_k$, $r_2 = R_{k+1}$, $q = \lambda_1 2^{2(k+1)}$, $\tau = T_1$, $\mu = g\lambda_1 2^{k+1}$, де $k \in \mathbb{N}$ і $\lambda_1 = 2[a] + 4$ (так як у доведенні теореми 1) і, врахувавши (9), з (86) матимемо

$$\int_{Q_{T_1}^{R_k}} v^2 dxdt \leq C_{18} e^{-4^{k+1}}, \tag{87}$$

де $C_{18} > 0$ – деяка стала.

Перейшовши в (87) до границі при $k \to \infty$, отримаємо, що $v = 0$ майже всюди в $Q_T \bigcap \{(x,t) : 0 \le t \le T_1\}$. Проводячи послідовно міркування для скінченної кількості множин $Q_T \bigcap \{(x,t) : T_1 \le t \le 2T_1\}$, $Q_T \bigcap \{(x,t) : 2T_1 \le t \le 3T_1\}$, ..., $Q_T \bigcap \{(x,t) : mT_1 \le t < T_0\}$, де $m \in \mathbb{N}$ таке, що $mT_1 < T_0 \le (m+1)T_1$, отримаємо, що $v = 0$ майже всюди в Q_T.

1. *Тихонов А.Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности / *Тихонов А.Н.* // Матем. сб. – 1935. – Т. 42, №2. – С. 199-215.
2. *Олейник О.А.* Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделёфа для общих параболических систем дифференциальных уравнений / *Олейник О.А, Радкевич Е.В.* // Функ. анализ. – 1974. – Т. 8, №4. – С. 59-70.
3. *Лавренюк С.* Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з нелокальною дією / *Лавренюк С., Оліскевич М.* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 99-113.
4. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенних дифференциальных уравнений / *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* // М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.

MIXED PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH DISLOCATED ACTION

Taras BOKALO

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska Str., 1

We examined mixed problem for parabolic equation
$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u + \int_0^t K(x,t,s)u(x,s)ds = f(x,t)$$
in an unbounded domain and have obtained some conditions of existence and uniqueness of solution for this problem.

Key words: parabolic equation, dislocated term.

Стаття надійшла до редколегії 26.12.2007

Прийнята до друку 22.10.2008