ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 68. С. 68-71 Ser.Mech-Math. 2008. Vol. 68. P. 68-71

УДК 512.8

I_2-КІЛЬЦЯ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Андрій ГАТАЛЕВИЧ[1], **Марія КУЧМА**[2]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка,*
79000, Львів, вул. Університетська, 1
[2] *Львівський національний університет "Львівська Політехніка",*
79013, Львів, вул. Бандери, 12

Введено до розгляду новий клас кілець – I_2-кільця, який узагальнює I-кільця. Описано властивості та побудовано приклади таких кілець.

Ключові слова: I_2-кільце, ідемпотент, кільце елементарних дільників.

Асоціативне кільце R з $1 \neq 0$ називається I_2-кільцем, якщо для кожного елемента $a \in R$ такого, що $RaR = R$ правий ідеал aR містить ненульовий ідемпотент. Клас I_2-кілець досить широкий. Відомо, що локальні кільця, напівдосконалі кільця, напіврегулярні, напів π-регулярні кільця є I_2-кільцями [1, 2]. I_2-кільця узагальнюють I-кільця, які введені в праці [1]. Варто зазначити, що публікацій, присвячених I-кільцям, досить мало.

Твердження 1. *Кільце R є I_2-кільцем тоді і тільки тоді, коли для кожного $a \in R$ такого, що $RaR = R$ рівняння $xax = x$ має ненульовий розв'язок.*

Доведення. Нехай R – I_2-кільце і елемент $a \in R$, $RaR = R$ такий, що правий ідеал aR містить ідемпотент $e = e^2$. Тоді $e = ab$, де $b \in R$. Розглянемо добутки

$$bababab = (bab)(abab) = (bab)ab = b(abab) = bab.$$

Прийнявши $x = bab$, одержуємо $xax = x$. Отже, рівняння $xax = x$ має розв'язок.

Навпаки, нехай рівняння $xax = x$ має ненульовий розв'язок. Тоді

$$axax = ax, \quad ax = e, \quad e^2 = e.$$

Звідси випливає, що правий ідеал aR містить власний ідемпотент.

Твердження показує ліву-праву симетричність означення I_2-кільця.

Твердження 2. *Нехай R– I_2-кільце. Тоді для довільного $a \in R$ такого, що $RaR = R$ лівий ідеал Ra містить ненульовий ідемпотент.*

Доведення. Згідно з твердженням 1 рівняння $xax = x$ має ненульовий розв'язок. Тоді
$$xaxa = xa, \quad xa = e, \quad e^2 = e, \quad e \in R.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось у правильності твердження.

Твердження 3. *Нехай R – I_2-кільце і $e^2 = e \in R$. Тоді кільця eRe і $(1-e)R(1-e)$ є I_2-кільцями.*

Твердження 4. *Нехай R – редуковане I_2-кільце. Тоді ідемпотенти кільця R центральні.*

Доведення. Нехай $e^2 = e \in R$. Доведення є наслідком таких рівностей:
$$ex(1-e)ex = 0, \quad ex - exe = 0, \quad ex = exe, \quad (1-e)xe = 0, \quad xe - exe = 0$$
Отже, $xe = ex$.

Будемо позначати через $diag(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r)$ матрицю з елементами $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r$ по головній діагоналі і нулями на інших місцях. Матриці A і B називаються еквівалентними, якщо $B = PAQ$, де P, Q – оборотні матриці відповідних розмірів. Якщо матриця A еквівалентна до деякої діагональної матриці $diag(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r)$, де $\epsilon_i || \epsilon_{i+1}$ при довільному i=1,2,...r-1, то кажуть, що матриця A володіє діагональною редукцією. Елементи $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r$ називаються елементарними дільниками матриці A. Кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця над R володіє діагональною редукцією [3].

Теорема 1 дає клас прикладів I_2-кілець.

Теорема 1. *Нехай R–комутативна область елементарних дільників. Тоді кільце матриць $M_n(R)$ є I_2-кільцем для довільного $n \geqslant 2$.*

Доведення. Розглянемо матрицю $A \in M_n(R)$ таку, що $M(R)AM_n(R) = = M_n(R)$.

Оскільки R – кільце елементарних дільників, то згідно з вибором матриці A існують такі унімодулярні матриці P, Q, що
$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & x_{n-1} \end{pmatrix}.$$
Тоді одержуємо:
$$\left(AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} P \right)^2 =$$
$$= AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} PAQ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} P =$$

$$= AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}P = AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}P.$$

Легко бачити, що матриця $AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}P$ – шуканий ідемпотент в правому ідеалі $AM_n(R)$. Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай R – комутативна область елементарних дільників. Тоді довільна одинично регулярна матриця в кільці R_2 є ідемпотентною матрицею.*

Доведення. Нехай $A \in R_2$ і $AUA = A$, де U – оборотна. Матриця AU є ідемпотентною і згідно з [4, лема 3] має вигляд

$$AU = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді існує матриця $P = \begin{pmatrix} 1 & -\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, що $AUP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, або $AW = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Звідси одержуємо, що матриця A має вигляд $A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для деякого елемента Δ. Отже, матриця A є ідемпотентною.

Наслідок 1. *Нехай R - комутативна область Безу стабільного рангу 1. Тоді:*

1) кільце $M_n(R)$ є I_2-кільцем;

2) довільна регулярна матриця кільця $M_2(R)$ є ідемпотнтною.

Доведення. Оскільки комутативна область Безу стабільного рангу 1 є областю елементарних дільників [5], то згідно з теоремою 5 перше твердження очевидне. Оскільки стабільний ранг матричного кільця $M_n(R)$ дорівнює 1 [6], тоді згідно з [7] довільна регулярна матриця є одинично регулярною, а отже, за теоремою 6 є ідемпотентною.

---

1. *Джекобсон Н.* Строение колец. / *Джекобсон Н.* – М.: Инностранная литература, 1961. – 392 с.
2. *Nicholson W.K.* Lifting idempotents and exchange rings / *Nicholson W. K.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – №229. – P. 269-278.
3. *Kaplansky I.* Elementary divisor rings and modules / *Kaplansky I.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – №66. – P. 464–491.

4. *Дубровин Н.И.* Проективный предел колец с элементарными делителями / *Дубровин Н.И.* // Мат.сб. – 1982. – Т.119, №1. – С. 89-95.
5. *Гаталевич А.І.* Про дуо-кільця елементарних дільників / *Гаталевич А.І.* // Алгебра і топологія: Тематичний збірник наукових праць. – Львів, 1996. – С. 58-64.
6. *Васерштейн Л.И.* Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств / *Васерштейн Л.И.* // Функц. анализ. – 1971. – Т.49. – С. 17-27.
7. *Henriksen M.* On a class of regular rings, that are elementary divisor rings / *Henriksen M.* // Arch. der Math. – 1973. – V.24. – P. 133-141.

I_2-RINGS AND THEIR PROPERTIES

Andriy GATALEVICH[1]**, Mariya KUCHMA**[2]

[1] *Ivan Franko Nathional University of L'viv,*
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
[2] *L'viv Polytechnic Nathional University,*
79013, L'viv, Bandery Str., 12

It is introduced a new class of rings – I_2-rings, which are generalization of I-rings. We described the main properties and construct examples of these rings.

Key words: I_2-ring, elementary divisor ring, idempotent.

Стаття надійшла до редколегії 27.12.2006

Прийнята до друку 22.10.2008