

УДК 539.3

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ВАЛА І ТІЛА З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ ЗА НАЯВНОСТІ ЗАЗОРУ МІЖ НИМИ

Володимир НЕСТЕР, Георгій СУЛИМ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Запропоновано модель керування контактною взаємодією циліндричного вала з простором з циліндричною порожниною. У формулюванні задачі вимагається, щоб при заданому радіальному навантаженні береги щілини один стосовно одного в радіальному напрямі в межах розрізу розходились за певним заданим законом, а на продовженні розрізу взаємного зміщення берегів не було. Така задача зводиться до інтегральних рівнянь, розв'язувати які пропонують методом розривних інтегралів Фур'є. Віднайдено напружено-деформований стан у тілі, зроблено числовий аналіз розв'язків задачі та побудовано відповідні графіки.

Ключові слова: контактна взаємодія, реологічний шар, розривний інтеграл Фур'є, поверхня розриву.

Механіка контактних взаємодій деформівних твердих тіл (Contact Mechanics) є важливою складовою сучасної механіки суцільного середовища. Саме контактною взаємодією визначаються процеси зношування деталей, зокрема у машинобудуванні. Тут важливе значення має фактор руйнування матеріалів у зоні контакту, що визначається контактними умовами. Огляд праць, які пов'язані з механікою контактних взаємодій, зробили Ворович І.І. та Александров В.М. у монографії [2]. У [9] узагальнено літературні дані та результати досліджень авторів з питань визначення контактних напружень при внутрішньому контактуванні циліндричних тіл.

Числово-аналітичні методи і результати розв'язування для важливого кола неklasичних задач механіки контактних взаємодій для пружних тіл, зокрема для циліндра та простору з циліндричною порожниною, подано у праці [1]. Александров В.М. і Пожарський Д.А. для циліндричних тіл розглянули осесиметричні задачі. У цій праці запропоновано неосесиметричну неklasичну математичну модель контактної взаємодії пружного вала з циліндричною порожниною з урахуванням можливості існування реологічних шарів (зовнішніх) на контактуючих поверхнях. Внаслідок постулювання наявності внутрішнього реологічного шару (рис. 1) виникає неосесиметричність задачі. Зазначимо, що можливість існування поверхневих і внутрішніх реологічних шарів є фізично обґрунтованою. Оскільки на поверхні деформівного тіла відбуваються складні фізико-хімічні процеси, то такі поверхні за своїми властивостями відрізняються від середовищ, що до них пристають [10]. Поверхневий натяг на поверхнях рідин і твердих тіл є одним із проявів цього явища. Саме такі відмінності і можуть бути змодельовані шаром зі специфічними властивостями.

Проблема визначення напружено-деформованого стану у взаємодіючих тілах пов'язана з умінням розв'язувати контактні задачі коректним способом. Характерною особливістю контактних задач є те, що з математичного погляду вони здебільшого є задачами зі змішаними крайовими умовами і зводяться до інтегральних рівнянь, які потребують застосування специфічних методів розв'язування [1]. Сформульована у цій праці задача зводиться до інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, розв'язувати які пропонуємо методом розривних інтегралів Фур'є [4]. Віднайдено напружено-деформований стан у тілі, зроблено числовий аналіз розв'язків задачі та побудовано відповідні графіки.

Схему задачі зображено на рис. 1. Розглянуто необмежене пружне тіло з розрізом по дузі кола, що перебуває в умовах плоскої деформації. На берегах розрізу діє постійне радіальне навантаження величиною $2\mu P_0$. Припускаємо також існування на берегах розрізу межових шарів нульової товщини з певними реологічними властивостями, зведеною характеристикою яких є величина q ($0,5 < q < 1$) [3]. Поза фронтом розрізу

на продовженні дуги кола, а також на відрізку **OB** та півосі **BC** теж існують аналогічні реологічні шари з цією самою зведеною характеристикою q . Будемо вимагати, щоб за заданого радіального

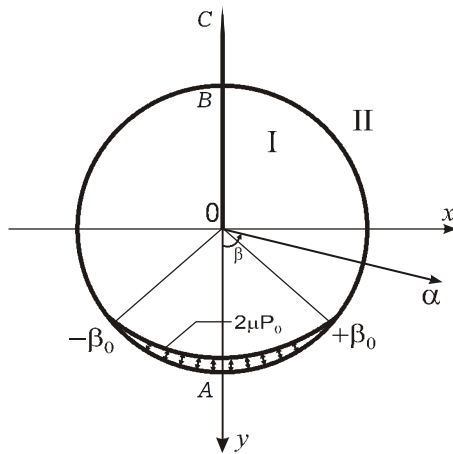


Рис. 1. Схеми задачі

навантаження береги щілини один стосовно одного в радіальному напрямі в межах розрізу розходились за певним заданим законом, а на продовженні розрізу взаємного зміщення берегів не було. На кутові переміщення на розрізі та поза ним не накладаються жодні умови і вони визначаються розв'язками задачі. Тобто, кутові переміщення можуть бути розривними при переході через поверхню $\alpha = 1$.

З огляду на це, запропоновану задачу можна вважати моделлю керування контактною взаємодією циліндричного вала (рис. 1, область I) із простором з циліндричною

порожниною (рис. 1, область II) за допомогою реологічних шарів на їхніх поверхнях і лініях **OB** і **BC**. Умовами контакту цих тіл є рівність радіальних переміщень їхніх поверхонь поза зоною навантаження і допускається проковзування контактуючих поверхонь. Як зазначалося вище, в області навантаження взаємне розходження поверхонь є заданим за певним законом. Зокрема, в частковому випадку можна вимагати, щоб взаємного зміщення берегів в області навантаження і поза ним також не було. Можливість формулювання та розв'язання такої задачі з'ясовано у працях [5, 6, 8]. У нашій праці таке зміщення берегів задамо за законом

$f(\beta^2)(\beta_0^2 - \beta^2)^{r-\frac{1}{2}}$, де β_0 – величина кута в межах розрізу чи зони навантаження; r – параметр величини зміщення.

Подання розв'язків рівнянь статички пружного тіла через інтеграли Фур'є. Однорідне пружне тіло віднесемо до безрозмірної циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$ і вважатимемо, що під дією зовнішнього навантаження у ньому реалізується стан плоскої деформації. Тоді ненульові компоненти $Ru_\alpha(\alpha, \beta)$ і $Ru_\beta(\alpha, \beta)$ вектора пружного переміщення $\mathbf{u}(\alpha, \beta)$ будуть розв'язками системи рівнянь статички

$$k^2 \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{2}{\alpha} \frac{\partial \omega_\gamma}{\partial \beta} = 0, \quad k^2 \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + 2\alpha \frac{\partial \omega_\gamma}{\partial \alpha} = 0 \quad (1)$$

в полярних координатах (α, β) в області $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq |\beta| < \pi$ стосовно ключових функцій об'ємної деформації θ та єдиної ненульової компоненти ω_γ вектора локального жорсткого повороту $\Omega = 0,5 \text{rot } \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \theta &\equiv \text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}_\beta}{\partial \beta}, \\ \omega_\gamma &\equiv \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{u})_\gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha \mathbf{u}_\beta) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial \beta} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

У рівняннях (1) та співвідношеннях (2) введено такі позначення: $k^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$, де λ і μ – пружні сталі Ляме; ν – коефіцієнт Пуассона; R – радіус кола, що містить розріз у межах $-\beta_0 \leq \beta \leq \beta_0$.

Розв'язки рівнянь (1) подамо у вигляді інтегралів Фур'є і у випадку симетричного стосовно кутової координати β навантаження берегів розрізу в області $0 \leq \alpha \leq 1$ (рис. 1, область I) матимемо:

$$\begin{aligned} \theta^{(1)}(\alpha, \beta) &= 4 \int_0^\infty (\xi + 1) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) d\xi, \\ \omega_\gamma^{(1)}(\alpha, \beta) &= 2k^2 \int_0^\infty (\xi + 1) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi\beta) d\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

а в області $1 \leq \alpha < \infty$ (рис. 1, область II), зникаючі на безмежності значення

$$\begin{aligned} \theta^{(2)}(\alpha, \beta) &= 4 \int_0^\infty (\xi - 1) \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) d\xi, \\ \omega_\gamma^{(2)}(\alpha, \beta) &= -2k^2 \int_0^\infty (\xi - 1) \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta) d\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Маючи розв'язки (3) і (4), з системи рівнянь першого порядку (2) визначимо компоненти $\mathbf{u}_\alpha^{(i)}(\alpha, \beta)$ та $\mathbf{u}_\beta^{(i)}(\alpha, \beta)$ ($i = 1, 2$) вектора пружного переміщення і в області $0 \leq \alpha \leq 1$ запишемо їх так:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha^{(1)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \xi \mathbf{V}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \, d\xi - \alpha \int_0^\infty [(\mathbf{k}^2 - 1)\xi - 2] \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \, d\xi, \\ \mathbf{u}_\beta^{(1)}(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \xi \mathbf{V}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi\beta) \, d\xi + \alpha \int_0^\infty [(\mathbf{k}^2 - 1)\xi + 2\mathbf{k}^2] \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi\beta) \, d\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

а в області $1 \leq \alpha < \infty$ матимемо:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha^{(2)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \xi \mathbf{W}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) \, d\xi + \alpha \int_0^\infty [(1 - \mathbf{k}^2)\xi - 2] \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) \, d\xi, \\ \mathbf{u}_\beta^{(2)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \xi \mathbf{W}(\xi) \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta) \, d\xi + \alpha \int_0^\infty [(1 - \mathbf{k}^2)\xi + 2\mathbf{k}^2] \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta) \, d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

Функції $\mathbf{W}(\xi)$, $\mathbf{G}(\xi)$, $\mathbf{H}(\xi)$ і $\mathbf{V}(\xi)$ у виразах (5) і (6) – це довільні функції, які треба визначити з крайових умов задачі математичної фізики та умов обмеженості розв'язків.

Компоненти тензора напружень знайдемо на підставі закону Гука за відомими виразами (5)-(6) для компонент вектора пружного переміщення. В області $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 2\mu \left\{ -(\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty (\xi + 1)(\xi - 2) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \, d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi(\xi - 1) \mathbf{V}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \, d\xi \right\}, \\ \sigma_{\beta\beta}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 2\mu \left\{ (\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty (\xi + 1)(\xi + 2) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \, d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi(\xi - 1) \mathbf{V}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \, d\xi \right\}, \\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 4\mu (\mathbf{k}^2 - 2) \int_0^\infty (\xi + 1) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \, d\xi, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 2\mu \left\{ (\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty \xi(\xi + 1) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi\beta) \, d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi(\xi - 1) \mathbf{V}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi\beta) \, d\xi \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

і в області $1 \leq \alpha < \infty$ відповідно

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(\alpha, \beta) &= 2\mu \left\{ (\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty (\xi - 1)(\xi + 2) \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi(\xi + 1) \mathbf{W}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi \right\}, \\
 \sigma_{\beta\beta}^{(2)}(\alpha, \beta) &= 2\mu \left\{ -(\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty (\xi - 1)(\xi - 2) \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi(\xi + 1) \mathbf{W}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi \right\}, \\
 \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}(\alpha, \beta) &= 4\mu(\mathbf{k}^2 - 2) \int_0^\infty (\xi - 1) \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi; \\
 \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\alpha, \beta) &= 2\mu \left\{ (\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty \xi(\xi - 1) \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta) \mathbf{d}\xi - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi(\xi + 1) \mathbf{W}(\xi) \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta) \mathbf{d}\xi \right\}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Для обмеженості розв'язків при $\alpha = 0$ необхідно вважати $\mathbf{V}(\xi) \equiv 0$. Вирази у формулах (5) та (7) перепишемо так:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_\alpha^{(1)}(\alpha, \beta) &= -\alpha \int_0^\infty [(\mathbf{k}^2 - 1)\xi - 2] \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi, \\
 \mathbf{u}_\beta^{(1)}(\alpha, \beta) &= \alpha \int_0^\infty [(\mathbf{k}^2 - 1)\xi + 2\mathbf{k}^2] \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi\beta) \mathbf{d}\xi; \\
 \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(\alpha, \beta) &= -2\mu(\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty (\xi + 1)(\xi - 2) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi, \\
 \sigma_{\beta\beta}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 2\mu(\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty (\xi + 1)(\xi + 2) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi, \\
 \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 4\mu(\mathbf{k}^2 - 2) \int_0^\infty (\xi + 1) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi, \\
 \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 2\mu(\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty \xi(\xi + 1) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi\beta) \mathbf{d}\xi.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Формули (6) та (8) залишаються без змін.

Формулювання крайової задачі та метод розривних інтегралів Фур'є. Нехай на берегах розрізу $\alpha = 1 \pm \mathbf{0}$ з кутом розкриття $0 \leq |\beta| \leq \beta_0$ діє постійне навантаження $2\mu\mathbf{P}_0$ (рис. 1). Будемо вимагати, щоб при цьому навантаженні береги щілини один стосовно одного в радіальному напрямі зміщувалися за законом $\mathbf{f}(\beta^2)(\beta_0^2 - \beta^2)^{\Gamma - \frac{1}{2}}$. Тоді крайові умови задачі запишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(\mathbf{1} - \mathbf{0}, \beta) &= \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{1} + \mathbf{0}, \beta) = -2\mu\mathbf{P}_0 \quad (0 \leq |\beta| \leq \beta_0), \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(\mathbf{1} - \mathbf{0}, \beta) &= \mathbf{g}(\beta^2), \quad \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{1} + \mathbf{0}, \beta) = \mathbf{h}(\beta^2) \quad (\beta_0 \leq |\beta| \leq \pi); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{1} - \mathbf{0}, \beta) - \mathbf{u}_{\alpha}^{(2)}(\mathbf{1} + \mathbf{0}, \beta) &= \mathbf{f}(\beta^2)(\beta_0^2 - \beta^2)^{\Gamma - \frac{1}{2}} \quad (0 \leq |\beta| \leq \beta_0), \\ \mathbf{u}_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{1} - \mathbf{0}, \beta) &= \mathbf{u}_{\alpha}^{(2)}(\mathbf{1} + \mathbf{0}, \beta) \quad (\beta_0 \leq |\beta| \leq \pi). \end{aligned} \quad (12)$$

Невідомі наперед функції $\mathbf{g}(\beta^2)$ і $\mathbf{h}(\beta^2)$ у крайовій умові на напруження (11) назвемо коригувальними. Саме вони забезпечуватимуть виконання крайової умови (12). Радіальні напруження $\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(\mathbf{1} - \mathbf{0}, \beta)$ і $\sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{1} + \mathbf{0}, \beta)$ ($\beta_0 \leq |\beta| \leq \pi$) та дотичні напруження $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{1} - \mathbf{0}, \beta)$ і $\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{1} + \mathbf{0}, \beta)$ ($0 \leq |\beta| \leq \pi$), що визначаються цими функціями, є механічним ефектом існування реологічних шарів або ж необхідним довантаженням для виконання умови (12).

Задовольнивши крайові умови, отримуємо систему інтегральних рівнянь

$$-2\mu(\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^{\infty} (\xi + 1)(\xi - 2)\mathbf{H}(\xi) \cos(\xi\beta) d\xi = -2\mu\mathbf{P}_0, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} 2\mu \int_0^{\infty} [(\mathbf{k}^2 - 1)(\xi - 1)(\xi + 2)\mathbf{G}(\xi) - \xi(\xi + 1)\mathbf{W}(\xi)] \cos(\xi\beta) d\xi = \\ = -2\mu\mathbf{P}_0, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} -\int_0^{\infty} \{[(\mathbf{k}^2 - 1)\xi - 2]\mathbf{H}(\xi) + \xi\mathbf{W}(\xi) + [(1 - \mathbf{k}^2)\xi - 2]\mathbf{G}(\xi)\} \cos(\xi\beta) d\xi = \\ = \mathbf{f}(\beta^2)(\beta_0^2 - \beta^2)^{\Gamma - \frac{1}{2}}, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0 \end{aligned} \quad (15)$$

стосовно невідомих функцій $\mathbf{H}(\xi)$, $\mathbf{G}(\xi)$ і $\mathbf{W}(\xi)$.

Рівняння (13) після спрощення набуде вигляду

$$\int_0^{\infty} (\mathbf{k}^2 - 1)(\xi + 1)(\xi - 2)\mathbf{H}(\xi) \cos(\xi\beta) d\xi = \mathbf{P}_0 \quad (0 \leq |\beta| \leq \beta_0). \quad (16)$$

Це інтегральне рівняння Фредгольма першого роду стосовно функції

$\mathbf{H}(\xi)$ розв'яжемо методом розривних інтегралів Фур'є [4], відповідно до якого підінтегральну функцію подамо у вигляді узагальненого ряду Неймана

$$(\mathbf{k}^2 - 1)(\xi + 1)(\xi - 2)\mathbf{H}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \frac{\mathbf{J}_{2n-q+1}(\beta_0 \xi)}{\xi^q} \quad (17)$$

з наперед невизначеними коефіцієнтами \mathbf{a}_n і параметром \mathbf{q} , що є зведеною характеристикою постульованих реологічних шарів. Обмеження ($0,5 < \mathbf{q} < 1$) на цей параметр визначають з фізичної вимоги неперервності характеристик напружено-деформованого стану на краю зони навантаження $|\beta| = \beta_0$, зокрема, компоненти $\sigma_{\alpha\alpha}(\mathbf{1}, \beta)$ тензора напружень і $\omega_\gamma(\mathbf{1}, \beta)$ вектора локального жорсткого повороту

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \beta_0 - 0} \sigma_{\alpha\alpha}(\mathbf{1}, \beta) &= \lim_{\beta \rightarrow \beta_0 + 0} \sigma_{\alpha\alpha}(\mathbf{1}, \beta), \\ \lim_{\beta \rightarrow \beta_0 - 0} \omega_\gamma(\mathbf{1}, \beta) &= \lim_{\beta \rightarrow \beta_0 + 0} \omega_\gamma(\mathbf{1}, \beta). \end{aligned}$$

Подальші дослідження ґрунтуватимуться на властивостях розривного інтегралу Фур'є [7]. Вираз (17) підставимо в інтегральне рівняння (16) та, помінявши порядок сумування та інтегрування, отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{J}_{2n-q+1}(\beta_0 \xi) \cos(\xi \beta)}{\xi^q} d\xi = \mathbf{P}_0, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0.$$

Під знаком суми міститься розривний інтеграл Фур'є, обчисливши який в області $0 \leq |\beta| \leq \beta_0$ отримуємо алгебричне стосовно коефіцієнтів \mathbf{a}_n рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \frac{\Gamma(\mathbf{n} - \mathbf{q} + 1) \beta_0^{q-1} \mathbf{F}(\mathbf{n} - \mathbf{q} + 1; -\mathbf{n}; 1/2; \beta^2 / \beta_0^2)}{2^q \Gamma(\mathbf{n} + 1)} = \mathbf{P}_0.$$

Оскільки у цій формулі другим параметром гіпергеометричної функції Гаусса $\mathbf{F}(\mathbf{n} - \mathbf{q} + 1; -\mathbf{n}; 1/2; \beta^2 / \beta_0^2)$ є від'ємне ціле число, то вона вироджується у поліном степеня $2\mathbf{n}$ і відповідно до апроксимаційної теореми Вайерштрасса про наближення неперервної функції на скінченному інтервалі системою поліномів розв'язок цього рівняння буде таким:

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{P}_0 \cdot 2^q}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1 - \mathbf{q})}, \quad \mathbf{a}_n = 0 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}.$$

Тому згідно з поданням (17) функцію $\mathbf{H}(\xi)$ запишемо так:

$$\mathbf{H}(\xi) = \frac{\mathbf{P}_0 2^q \mathbf{J}_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1 - \mathbf{q}) \xi^q (\mathbf{k}^2 - 1)(\xi + 1)(\xi - 2)}. \quad (18)$$

За відомою функцією $\mathbf{H}(\xi)$ і поданнями (9)-(10) обчислюють всі характеристики напружено-деформованого стану у внутрішній області тіла $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha^{(1)}(\alpha, \beta) &= -\frac{\mathbf{P}_0 2^q \alpha}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)(\mathbf{k}^2-1)} \int_0^\infty \frac{\mathbf{J}_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\xi^q} \frac{[(\mathbf{k}^2-1)\xi-2]}{(\xi+1)(\xi-2)} \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi, \\ \mathbf{u}_\beta^{(1)}(\alpha, \beta) &= \frac{\mathbf{P}_0 2^q \alpha}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)(\mathbf{k}^2-1)} \int_0^\infty \frac{\mathbf{J}_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\xi^q} \frac{[(\mathbf{k}^2-1)\xi+2\mathbf{k}^2]}{(\xi+1)(\xi-2)} \alpha^\xi \sin(\xi\beta) \mathbf{d}\xi, \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(\alpha, \beta) &= -\frac{2\mu \mathbf{P}_0 2^q}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)} \int_0^\infty \frac{\mathbf{J}_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\xi^q} \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi, \quad (19) \\ \sigma_{\beta\beta}^{(1)}(\alpha, \beta) &= \frac{2\mu \mathbf{P}_0 2^q}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)} \int_0^\infty \frac{\mathbf{J}_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\xi^q} \frac{(\xi+2)}{(\xi-2)} \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi, \\ \sigma_\gamma^{(1)}(\alpha, \beta) &= \frac{4\mu \mathbf{P}_0 2^q (\mathbf{k}^2-2)}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)(\mathbf{k}^2-1)} \int_0^\infty \frac{\mathbf{J}_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\xi^q (\xi-2)} \alpha^\xi \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\alpha, \beta) &= \frac{2\mu \mathbf{P}_0 2^q}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)} \int_0^\infty \frac{\mathbf{J}_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\xi^{q-1} (\xi-2)} \alpha^\xi \sin(\xi\beta) \mathbf{d}\xi. \end{aligned}$$

Для визначення невідомих функцій $\mathbf{G}(\xi)$ і $\mathbf{W}(\xi)$ та напружено-деформованого стану у зовнішній області тіла ($1 \leq \alpha < \infty$) треба розв'язати інтегральні рівняння (14), (15), які після спрощення набудуть вигляду

$$\int_0^\infty [(\mathbf{k}^2-1)(\xi-1)(\xi+2)\mathbf{G}(\xi) - \xi(\xi+1)\mathbf{W}(\xi)] \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi = -\mathbf{P}_0, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \{[(\mathbf{k}^2-1)\xi-2]\mathbf{H}(\xi) + \xi\mathbf{W}(\xi) + [(1-\mathbf{k}^2)\xi-2]\mathbf{G}(\xi)\} \cos(\xi\beta) \mathbf{d}\xi = \\ = -\mathbf{f}(\beta^2)(\beta_0^2 - \beta^2)^{r-\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Ці інтегральні рівняння Фредгольма першого роду, аналогічно до (16), розв'яжемо методом розривних інтегралів Фур'є [4]. Для цього підінтегральні функції подамо у вигляді таких узагальнених рядів Неймана:

$$(\mathbf{k}^2-1)(\xi-1)(\xi+2)\mathbf{G}(\xi) - \xi(\xi+1)\mathbf{W}(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{b}_n \frac{\mathbf{J}_{2n-q+1}(\beta_0 \xi)}{\xi^q}; \quad (22)$$

$$[(\mathbf{k}^2-1)\xi-2]\mathbf{H}(\xi) + \xi\mathbf{W}(\xi) + [(1-\mathbf{k}^2)\xi-2]\mathbf{f}\mathbf{G}(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{c}_n \frac{\mathbf{J}_{2n+r}(\beta_0 \xi)}{\xi^r} \quad (23)$$

з наперед невизначеними коефіцієнтами \mathbf{h}_n , \mathbf{c}_n та параметрами \mathbf{q} ($0,5 < \mathbf{q} < 1$) і \mathbf{r} ($\mathbf{r} > 3/2$).

Зазначимо, що за такого подання друга умова у формулі (12) згідно з виразом для розривного інтегралу Фур'є в області $|\beta| \geq \beta_0$ виконується автоматично.

Вирази (22)–(23) підставимо в інтегральні рівняння (20)–(21) та, помінявши порядок сумування та інтегрування, отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{h}_n \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{J}_{2n-q+1}(\beta_0 \xi) \cos(\xi \beta)}{\xi^q} d\xi = -\mathbf{P}_0, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{J}_{2n+r}(\beta_0 \xi) \cos(\xi \beta)}{\xi^r} d\xi = -\mathbf{f}(\beta^2) (\beta_0^2 - \beta^2)^{r-\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0.$$

Обчисливши розривні інтеграли Фур'є в області $0 \leq |\beta| \leq \beta_0$, одержуємо такі рівняння стосовно коефіцієнтів \mathbf{h}_n і \mathbf{c}_n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{h}_n \frac{\Gamma(\mathbf{n} - \mathbf{q} + 1) \beta_0^{q-1} \mathbf{F}(\mathbf{n} - \mathbf{q} + 1; -\mathbf{n}; 1/2; \beta^2/\beta_0^2)}{2^q \Gamma(\mathbf{n} + 1)} = -\mathbf{P}_0, \quad (24)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n \frac{\Gamma(\mathbf{n} + 1/2) \beta_0^{r-1} \mathbf{F}(\mathbf{n} + 1/2; -\mathbf{n} - \mathbf{r} + 1/2; 1/2; \beta^2/\beta_0^2)}{2^r \Gamma(\mathbf{n} + \mathbf{r} + 1/2)} =$$

$$= -\mathbf{f}(\beta^2) (\beta_0^2 - \beta^2)^{r-\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

Рівняння (25) після відповідних спрощень набуде вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n \frac{\Gamma(\mathbf{n} + 1/2) \beta_0^{-r} \mathbf{F}(-\mathbf{n}; \mathbf{n} + \mathbf{r}; 1/2; \beta^2/\beta_0^2)}{2^r \Gamma(\mathbf{n} + \mathbf{r} + 1/2)} = -\mathbf{f}(\beta^2). \quad (26)$$

Без суттєвої втрати загальності, функцію $\mathbf{f}(\beta^2)$ у законі розходження берегів розрізу задамо сталою величиною $\mathbf{f}(\beta^2) = \mathbf{c} = \text{const}$. Тоді рівняння (26) запишемо так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n \frac{\Gamma(\mathbf{n} + 1/2) \beta_0^{-r} \mathbf{F}(-\mathbf{n}; \mathbf{n} + \mathbf{r}; 1/2; \beta^2/\beta_0^2)}{2^r \Gamma(\mathbf{n} + \mathbf{r} + 1/2)} = -\mathbf{c}. \quad (27)$$

Отож, остаточно отримали рівняння (24) і (27) для визначення коефіцієнтів \mathbf{h}_n та \mathbf{c}_n .

Оскільки у формулі (24) другим, а у формулі (27) – першим параметром гіпергеометричної функції Гауса є від'ємне ціле число, то вона вироджується у поліном степеня $2\mathbf{n}$ і відповідно до апроксимаційної

теореми Вайерштрасса про наближення неперервної функції на скінченному інтервалі системою поліномів розв'язок цих рівнянь буде таким:

$$\begin{aligned} b_0 &= -\frac{P_0 \cdot 2^q}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)}, \quad b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \\ c_0 &= -\frac{c \cdot 2^r \beta_0^r \Gamma(r+1/2)}{\sqrt{\pi}}, \quad c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Тому відповідно до подань (22)-(23) та виразу (18) на функції $\mathbf{G}(\xi)$ і $\mathbf{W}(\xi)$ отримаємо таку систему рівнянь:

$$(\mathbf{k}^2 - 1)(\xi - 1)(\xi + 2)\mathbf{G}(\xi) - \xi(\xi + 1)\mathbf{W}(\xi) = -\frac{P_0 \cdot 2^q J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q) \xi^q}; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} [(1 - \mathbf{k}^2)\xi - 2]\mathbf{G}(\xi) + \xi\mathbf{W}(\xi) &= -\frac{c \cdot 2^r \beta_0^r \Gamma(r+1/2) J_r(\beta_0 \xi)}{\xi^r \sqrt{\pi}} - \\ &- \frac{P_0 2^q J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q) \xi^q} \frac{[(\mathbf{k}^2 - 1)\xi - 2]}{(\mathbf{k}^2 - 1)(\xi + 1)(\xi - 2)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Для простоти подальших перетворень та числового обчислення введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\xi) &= (\mathbf{k}^2 - 1)(\xi - 1)(\xi + 2), \quad \mathbf{B}(\xi) = -\xi(\xi + 1), \quad \mathbf{D}(\xi) = -\frac{P_0 \cdot 2^q J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q) \xi^q}, \\ \mathbf{E}(\xi) &= (1 - \mathbf{k}^2)\xi - 2, \quad \mathbf{F}(\xi) = \xi, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mathbf{V}(\xi) = -\frac{c \cdot 2^r \beta_0^r \Gamma(r+1/2) J_r(\beta_0 \xi)}{\xi^r \sqrt{\pi}} - \frac{P_0 2^q J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q) \xi^q} \frac{[(\mathbf{k}^2 - 1)\xi - 2]}{(\mathbf{k}^2 - 1)(\xi + 1)(\xi - 2)}.$$

Відповідно до позначень (30) та формул (28)-(29) отримаємо таку систему рівнянь на невідомі функції $\mathbf{G}(\xi)$ і $\mathbf{W}(\xi)$:

$$\mathbf{A}(\xi) \cdot \mathbf{G}(\xi) + \mathbf{B}(\xi) \cdot \mathbf{W}(\xi) = \mathbf{D}(\xi),$$

$$\mathbf{E}(\xi) \cdot \mathbf{G}(\xi) + \mathbf{F}(\xi) \cdot \mathbf{W}(\xi) = \mathbf{V}(\xi).$$

Використовуючи її розв'язок

$$\mathbf{G}(\xi) = \frac{\mathbf{F}(\xi)\mathbf{D}(\xi) - \mathbf{B}(\xi)\mathbf{V}(\xi)}{\mathbf{F}(\xi)\mathbf{A}(\xi) - \mathbf{B}(\xi)\mathbf{E}(\xi)}; \quad \mathbf{W}(\xi) = \frac{\mathbf{A}(\xi)\mathbf{V}(\xi) - \mathbf{D}(\xi)\mathbf{E}(\xi)}{\mathbf{F}(\xi)\mathbf{A}(\xi) - \mathbf{B}(\xi)\mathbf{E}(\xi)} \quad (31)$$

та подання (6), (8), визначаємо всі характеристики напружено-деформованого стану в зовнішній області тіла $1 \leq \alpha \leq \infty$.

Отож, вирази (19) та (6), (8) з урахуванням подань (31) повністю визначають напружено-деформований стан у всій області $0 \leq \alpha \leq \infty$,

$0 \leq |\beta| < \pi$, що зайнята тілом.

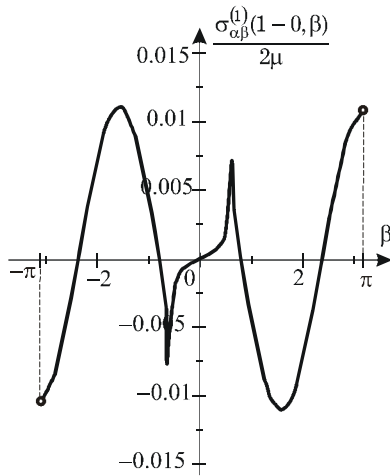


Рис. 2.

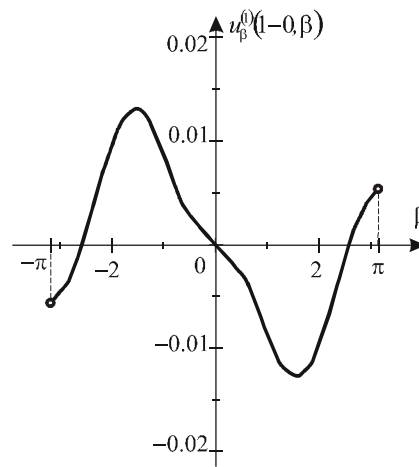


Рис. 3.

Числовий аналіз розв'язків задачі. Побудуємо графіки розподілу дотичних напружень і кутових переміщень на поверхні $\alpha = 1$, $0 \leq |\beta| < \pi$ контакту вала з циліндричною порожниною, а також – у внутрішньому реологічному шарі при зведеній характеристиці реологічних шарів $q = 0,75$ і таких даних: $k^2 = 3,5$ (матеріал – сталь), $\beta_0 = 0,2\pi$, $P_0 = 0,01$, $c = 0,01$, $r = 2$.

На рис. 2 та 3 зображено розподіл відповідно дотичних напружень і кутових переміщень у поверхневому реологічному шарі циліндричного вала (внутрішня задача) при $\alpha = 1 - 0$, $0 \leq |\beta| < \pi$. Для простору з циліндричною порожниною (зовнішня задача) графіки цих величин у поверхневому реологічному шарі при $\alpha = 1 + 0$, $0 \leq |\beta| < \pi$ побудовано на рис. 4 і 5.

Аналіз цих графіків свідчить про те, що при переході через поверхню $\alpha = 1$, $0 \leq |\beta| < \pi$, де постулювалося існування поверхневих реологічних шарів, дотичні напруження та кутові переміщення змінюються стрибково. Крім того, аналогічно змінюються радіальні напруження при переході через цю саму поверхню. За К. Труделом описані шари можна трактувати як поверхню розриву нульового порядку [12].

Крім того, на внутрішньому реологічному шарі при $0 \leq \alpha < \infty$, $\beta = \pm\pi$ дотичні напруження та кутові переміщення змінюють знак на протилежний, про що свідчать аналіз відповідних формул та графіки на рис. 6. Тут суцільна лінія відображає графік дотичних напружень у внутрішньому реологічному шарі при $0 \leq \alpha < \infty$, $\beta = \pi$, а штрихова – на поверхні $0 \leq \alpha < \infty$, $\beta = -\pi$.

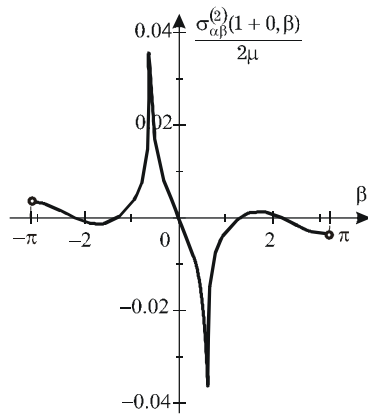


Рис. 4.

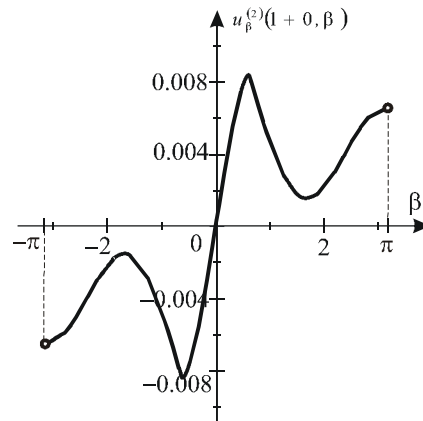


Рис. 5.

Оскільки на внутрішньому реологічному шарі дотичні напруження та кутові переміщення змінюються стрибково, то цей шар також можна вважати за К.Трусделом поверхнею розриву нульового порядку [12]. Або ж трактувати властивості реологічних шарів у вигляді знайдених переміщень і напружень як необхідне зовнішнє довантаження масиву для забезпечення заданих крайових умов (11)-(12).

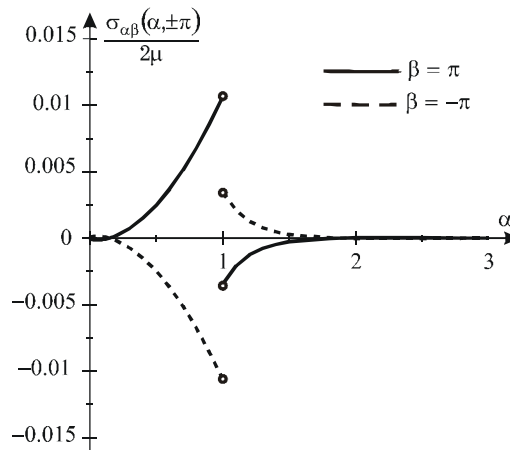


Рис. 6.

Аналіз розв'язку свідчить ще й про те, що постулювання поверхневих і внутрішніх шарів з певними властивостями і фізично обґрунтована вимога неперервності компонент вектора локального жорсткого повороту

$\Omega = 0,5\omega u$ на фронті розрізу (рис. 1) в комплексі забезпечують там регулярний розподіл напружень.

Запропоновану неklasичну математичну модель можна використати у новому напрямі механіки, який зараз інтенсивно розвивається – нано- та мікромеханіці. Бо з мініатюризацією механічних об'єктів зростає потреба враховувати, окрім зовнішніх сил, також і поверхневі явища, ефекти міжмолекулярної та міжатомної взаємодії, які внаслідок великої жорсткості твердих тіл можуть проявити себе переважно у мікро- та наномасштабах [10].

-
1. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. – М., 1998.
 2. Воронич И.И., Александров В.М. Механика контактных взаимодействий. – М., 2001.
 3. Галазюк В.А., Сулим Г.Т. Рівновага дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – №4. – С. 17–33.
 4. Галазюк В.А., Сулим Г.Т. Некласична модель деформування тіл з тріщинами // Вісник Дніпропетровського національного ун-ту. – 2001. – „Механіка”. Вип.4. Т.1 – С. 39–49.
 5. Галазюк В.А., Сулим Г.Т., Нестер В.Р. Эффект реологических шарів у пружному просторі з щілиною по дузі кола // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Вип. 7. – Львів, 2007. – С. 7–16.
 6. Галазюк Виталий, Сулым Георгий, Нестер Владимир. Напряженно-деформированное состояние в теле с разрезом по дуге окружности с учетом реологических слоев // Materiały IV Międzynar. Symp. Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji. – (Augustów, Polska, 30 maja – 2 czerwca 2007 r.) – S. 115–119.
 7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1963.
 8. Нестер В., Галазюк В., Сулим Г. Эффекты реологических слоев в модели тела с разрезом по дуге окружности // Материалы междунар. науч. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики». – (Тула, Россия, 19-23 ноября 2007 г.) – С. 194–195.
 9. Панасюк В.В., Теплий М.Й. Деякі контактні задачі теорії пружності. – К., 1975.
 10. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів, 2007.

11. *Теплый М.И.* Контактные задачи для областей с круговыми границами. – Львов, 1983.
12. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / Пер. с англ. – М., 1975.

CONTACT INTERACTION BETWEEN CYLINDRICAL SHAFT AND
SPACE WITH CYLINDRICAL CAVITY IN THE PRESENCE OF GAP
BETWEEN THEM

Volodymyr Nester, Georgiy Sulym

Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

The management model of contact interaction between cylindrical shaft and space with cylindrical cavity has been proposed. In the statement of problem crack faces within cut in a radial direction separate according to certain adjusted rule. On a cut continuation the reciprocal displacement of faces is absent. This problem reduces to the integral equations, which solves by the method of disconnected Fourier integrals. The stress-strain state in a body has been investigated, numerical analysis of problem solution has been made and corresponding graphs have been drawn.

Key words: contact interaction, rheological layer, disconnected Fourier integral, rupture face.

Стаття надійшла до редколегії 28.05.2008
Прийнята до друку 19.11.2008