ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 69. С. 166–176 *Ser. Mech.-Mat. 2008. Vol. 69. P. 166–176*

УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНЕ СКРУЧУВАННЯ ЦИЛІНДРА ЛОКАЛІЗОВАНИМ ПОВЕРХНЕВИМ НАВАНТАЖЕННЯМ ЗА ІСНУВАННЯ МЕЖОВОГО ШАРУ

Олександр АНДРЕЙКІВ, Ольга ГАЛАЗЮК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Запропоновано нову математичну модель напруженого стану в циліндрі при локалізованому поверхневому навантаженні та защемлених кінцях на безмежності, що призводить до його скручування. Доведено існування у цьому випадку дотичних напружень на ненавантаженій поверхні циліндра, що є механічним проявом існування там поверхневого межового шару.

Ключові слова: циліндр, кручення, напруження, межовий шар.

Класична математична модель осесиметричного деформування круглих циліндрів, які скручуються поверхневим навантаженням, побудована [1] на основі системи рівнянь рівноваги в напруженнях та умов сумісності в напруженнях Бельтрамі - Мічела. Цю модель уперше застосував Тимпе до задачі про кручення циліндра кругового поперечного перерізу поверхневим навантаженням. Проте розв'язок визначає такі характеристики напруженого стану, які не існують на поверхні циліндра, що є результатом некоректного формулювання задачі.

Далі для побудови математичної моделі осесиметричного кручення циліндра поверхневим навантаженням за відсутності дилатації запропоновано використати рівняння рівноваги у переміщеннях, які у розглядуваному випадку зводяться до одного рівняння стосовно двох не рівних нулю компонент вектора локального жорсткого повороту $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\mathbf{rot}\vec{u}$. Це дає змогу записати усі характеристики напруженого стану через одну гармонійну функцію, яку у циліндричних координатах для необмеженого циліндра можна подати інтегралом Фур'є, що сприяє ефективному розв'язанню так званих задач із частково детермінованими крайовими умовами.

Фізично коректні розв'язки таких задач уможливлюють створення практично важливих математичних моделей напружено-деформованого стану у циліндрах, які швидко обертаються, за раптового заклинювання їхніх кінців.

Зазначимо, що у класичному формулюванні крайових задач за локалізованих крайових умов необхідно їх довизначити поза областю задання. Як наслідок виникає задача зі змішаними або розривними крайовими умовами, в якій питання їхньої узгодженості на лінії зміни не розглядається. Це призводить до появи сингулярних ефектів [2], які суперечать гіпотезі суцільності та обмеженням лінійної моделі деформівного твердого тіла.

Подання характеристик напружено-деформованого стану в циліндрі інтегралами Фур'є спрощує процедуру виконання локалізованих крайових умов, оскільки це приводить до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, множину залежних від параметра розв'язків якого знаходять методом розривних інтегралів Фур'є [3]. Уведений параметр можна трактувати як приведену характеристику поверхневого межового шару і ним визначають клас необхідних довантажень, який виконує межовий шар для існування розв'язку задачі та гладкості деформування поверхні циліндра на лінії зміни крайових умов. Зазначимо, що наявність межового шару обґрунтовує існування поверхневої енергії.

1. **Формулювання задачі**. Пружний ізотропний циліндр з радіусом твірної $\boldsymbol{R}$ віднесемо до циліндричної системи координат $(\boldsymbol{R}\alpha,\beta,\boldsymbol{R}\gamma)$ і за умови незмінюваності об'єму $\theta(\alpha,\beta,\gamma)=\boldsymbol{div}\,\vec{\boldsymbol{u}}\equiv 0$, яка трапляється за відсутності дилатації, компоненти вектора пружного переміщення $\boldsymbol{R}\vec{\boldsymbol{u}}(\alpha,\beta,\gamma)$ в циліндричній системі координат будуть такими:

$$\boldsymbol{u}_\alpha(\alpha,\beta,\gamma)=0\,,\ \boldsymbol{u}_\beta=\boldsymbol{u}_\beta(\alpha,\gamma)\,,\boldsymbol{u}_\gamma(\alpha,\beta,\gamma)=0\,. \qquad .$$

За таких обставин рівняння Ламе

$$(\lambda+2\mu)\boldsymbol{grad}\,\boldsymbol{div}\,\vec{\boldsymbol{u}}-\mu\,\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{rot}\,\vec{\boldsymbol{u}}=0$$

зведеться до одного рівняння

$$\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial\gamma}-\frac{\partial\omega_\gamma}{\partial\alpha}=0 \tag{1}$$

стосовно компонент $\omega_\alpha(\alpha,\gamma)$ і $\omega_\gamma(\alpha,\gamma)$ вектора локального жорсткого повороту $\vec{\Omega}=\frac{1}{2}\boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{u}}$, які у циліндричній системі координат визначають компонентою $\boldsymbol{u}_\beta(\alpha,\gamma)$ вектора $\vec{\boldsymbol{u}}(\alpha,\gamma)$ так:

$$2\omega_\alpha(\alpha,\gamma)=-\frac{\partial\boldsymbol{u}_\beta}{\partial\gamma},\quad 2\omega_\gamma=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha\boldsymbol{u}_\beta),\quad \omega_\beta(\alpha,\gamma)\equiv 0\,. \tag{2}$$

Якщо ввести ключову функцію $\boldsymbol{Q}(\alpha,\gamma)$ таку, що $\boldsymbol{u}_\beta(\alpha,\gamma)=\dfrac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial\alpha}$, то за поданням (2) знайдемо, що

$$2\omega_\alpha(\alpha,\gamma)=-\frac{\partial^2\boldsymbol{Q}}{\partial\alpha\partial\gamma},\quad 2\omega_\gamma(\alpha,\gamma)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial\alpha}\right), \tag{3}$$

і, як наслідок, рівняння в частинних похідних (1) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial^2\boldsymbol{Q}}{\partial\gamma^2}\right]=0. \qquad (4)$$

Для виконання рівняння (4) достатньо прийняти, що шукана функція $\boldsymbol{Q}(\alpha,\gamma)$ є розв'язком рівняння Лапласа

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial^2\boldsymbol{Q}}{\partial\gamma^2}=0 \qquad (5)$$

в області $0\le\alpha\le 1$ і $0\le|\gamma|<\infty$.

За відомою функцією $\boldsymbol{Q}(\alpha,\gamma)$ та законом Гука віднайдемо ненульові компоненти тензора напружень і запишемо так:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma)=\mu\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{Q}}{\partial\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial\alpha}\right);\quad \sigma_{\beta\gamma}(\alpha,.\gamma)=\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{Q}}{\partial\alpha\partial\gamma}, \qquad (6)$$

де $\mu = \boldsymbol{E}\big/2(1+\nu)$ - модуль зсуву. Отже, у випадку кручення циліндра поверхневим навантаженням без дилатації його напружений стан визначають тільки дотичними напруженнями, рівень яких зумовлює появу пластичних деформацій (умова пластичності Треска-Мізеса) або спричиняє крихке руйнування.

Розв'язок рівняння Лапласа (5) подамо інтегралом Фур'є

$$\boldsymbol{Q}(\alpha,\gamma)=\int_0^\infty \boldsymbol{B}(\xi)\,\mathrm{I}_0(\xi\alpha)\cos\xi\gamma\,\boldsymbol{d}\xi, \qquad (7)$$

який обмежений в області $0\le\alpha\le 1$, а функція $\boldsymbol{B}(\xi)$ визначається крайовими умовами і забезпечує існування й обмеженість інтеграла в області ($0\le\alpha\le 1$, $0\le|\gamma|<\infty$).

За відомою функцією $\boldsymbol{B}(\xi)$ обчислимо компоненту $\boldsymbol{u}_\beta(\alpha,\gamma)$ вектора $\vec{\boldsymbol{u}}$

$$\boldsymbol{u}_\beta(\alpha,\gamma)=\int_0^\infty \xi\boldsymbol{B}(\xi)\,\mathrm{I}_1(\xi\alpha)\cos\xi\gamma\,\boldsymbol{d}\xi, \qquad (8)$$

а за поданням (6) нерівні нулю у цьому випадку компоненти тензора напружень

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma)=-\mu\int_0^\infty \xi^2\boldsymbol{B}(\xi)\,\mathrm{I}_2(\xi\alpha)\cos\xi\gamma\,\boldsymbol{d}\xi, \qquad (9)$$

$$\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma) = -\mu\int_0^\infty \xi^2 \boldsymbol{B}(\xi)\,\mathrm{I}_1(\xi\alpha)\sin\xi\gamma\,\boldsymbol{d}\xi, \tag{10}$$

де $\mathrm{I}_1(\xi\alpha)$ і $\mathrm{I}_2(\xi\alpha)$ - модифіковані функції Бесселя першого та другого порядку. За поданням (2) знайдемо компоненти вектора $\vec{\Omega}$

$$2\omega_\alpha(\alpha,\gamma) = \int_0^\infty \xi^2 \boldsymbol{B}(\xi)\,\mathrm{I}_1(\xi\alpha)\sin\xi\gamma\,\boldsymbol{d}\xi, \tag{11}$$

$$2\omega_\gamma(\alpha,\gamma) = \int_0^\infty \xi^2 \boldsymbol{B}(\xi)\,\mathrm{I}_0(\xi\alpha)\cos\xi\gamma\,\boldsymbol{d}\xi\,. \tag{12}$$

Аналіз виразів (8)-(12) свідчить про те, що характеристики напружено-деформованого стану є парними функціями змінної γ. Отже, для визначення характеристик напружено-деформованого стану циліндра треба сформулювати крайову задачу для визначення функцій $\boldsymbol{B}(\xi)$. Як нижче буде з'ясовано, мистецтво математичного моделювання визначається коректним формулюванням крайових умов, які правильно з'ясовують сутність фізичного явища. Зазначимо, що у випадку осесиметричного кручення циліндра існують, на відміну від осесиметричних задач для півпростору і простору, дві не рівні нулю компоненти вектора Ω.

Для визначення функції $\boldsymbol{B}(\xi)$ розглянемо таку задачу: нехай в області $0 \le |\gamma| \le \gamma_0$ на поверхні $\alpha = 1$ безмежного циліндра задана компонента $\omega_\gamma(1,\gamma)$ вектора $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{u}}$ локального жорстокого повороту навколо осі γ

$$2\omega_\gamma(1,\gamma) = \boldsymbol{f}(\gamma^2) \quad 0 \le |\gamma| \le \gamma_0\,, \tag{13}$$

що є парною функцією змінної γ. Оскільки відповідно до крайової умови (13) функція $\omega_\gamma(1,\gamma)$ є парною функцією змінної γ, то підстановкою подання (12) у крайову умову (13) одержимо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^\infty \xi^2 \boldsymbol{B}(\xi)\,\mathrm{I}_0(\xi\alpha)\cos\xi\gamma\,\boldsymbol{d}\xi = \boldsymbol{f}(\gamma^2) \quad 0 \le |\gamma| \le \gamma_0 \tag{14}$$

для визначення функції $\boldsymbol{B}(\xi)$.

Для розв'язання інтегрального рівняння (14) застосуємо метод [3] розривних інтегралів Фур'є, відповідно з яким функцію $\boldsymbol{B}(\xi)$ подамо узагальненим рядом Неймана

$$\xi^2 \boldsymbol{B}(\xi)\mathrm{I}_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)}{\xi^q}, \; {}^1\!/_2 < q < 1 \tag{15}$$

з невизначеними наперед коефіцієнтами a_n і параметром ${}^1\!/_2 < q < 1$.

2. **Методика побудови розв'язку**. Подальші дослідження ґрунтуватимуться на властивостях розривного інтеграла Фур'є

$$\int_0^{\infty} \frac{J_\nu(a\xi)\cos(b\xi)}{\xi^\lambda} d\xi =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{1-\lambda+\nu}{2}\right) F\left(\dfrac{1-\lambda+\nu}{2}; \dfrac{1-\lambda-\nu}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{b^2}{a^2}\right)}{2^\lambda a^{1-\lambda}\Gamma\left(\dfrac{\nu+\lambda+1}{2}\right)}; [0 < b < a] \\ \dfrac{\sqrt{\pi}a^\nu \Gamma\left(\dfrac{1-\lambda+\nu}{2}\right) F\left(\dfrac{1-\lambda+\nu}{2}; \dfrac{2-\lambda+\nu}{2}; \nu+1; \dfrac{a^2}{b^2}\right)}{2^\lambda b^{1-\lambda+\nu}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\dfrac{\lambda-\nu}{2}\right)}; [0 < a < b] \end{cases} \tag{16}$$

при ${}^1\!/_2 < \lambda < \nu + 1$ і

$$\int_0^{\infty} \frac{J_\nu(a\xi)\sin(b\xi)}{\xi^\lambda} d\xi =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{b\Gamma\left(\dfrac{2-\lambda+\nu}{2}\right) F\left(\dfrac{2-\lambda+\nu}{2}; \dfrac{2-\lambda-\nu}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{b^2}{a^2}\right)}{2^{\lambda-1} a^{2-\lambda}\Gamma\left(\dfrac{\nu+\lambda}{2}\right)}; [0 < b < a] \\ \dfrac{\sqrt{\pi}a^\nu \Gamma\left(\dfrac{2-\lambda+\nu}{2}\right) F\left(\dfrac{2-\lambda+\nu}{2}; \dfrac{1-\lambda+\nu}{2}; \nu+1; \dfrac{a^2}{b^2}\right)}{2^\lambda b^{\nu-\lambda+1}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\dfrac{1+\lambda-\nu}{2}\right)}; [0 < a < b] \end{cases} \tag{17}$$

при ${}^1\!/_2 < \lambda < \nu + 1$.

У виразах (16), (17) $\Gamma(x)$ — ґамма–функція; $F\left(a;b;c;x^2\right)$ - гіпергеометрична функція Гаусса, задана гіпергеометричним рядом

$$F\left(a;b;c;x^2\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)} \frac{x^{2k}}{k!} \tag{18}$$

з одиничним радіусом збіжності при $c - a - b > 0$, причому

$$F(a;b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

$$F\left(a;b;c;x^2\right) = \left(1-x^2\right)^{c-a-b} F\left(c-a;c-b;c;x^2\right). \tag{19}$$

Зауважимо, що при $a = -k$ або $b = -k$, де $k \in \mathbf{N_0}$ ряд (18) зводиться до полінома степеня $2k$, який можна виразити через поліноми Якобі [4].

Зазначимо такі властивості інтеграла Фур'є:

а) інтеграли (16), (17) неперервні в точці $|\alpha| = 1$ за умови $c - a - b > 0$;

б) інтеграли (16) і (17) тотожно дорівнюють нулю для всіх $|\alpha| > 1$, якщо відповідно $1 - \lambda - \nu = -2n$ і $\lambda + \nu = 2n$, $n \in \mathbf{N_0}$.

Якщо ряд (15) підставити в інтегральне рівняння (14), поміняти порядок підсумовування та інтегрування й обчислити за формулою (17) відповідний інтеграл, то інтегральне рівняння (14) в області $0 \le |\gamma| \le \gamma_0$ стане рядом за повною системою функцій

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+1)\gamma_0^{q-1} F\left(n-q+1;-n;\tfrac{1}{2};\gamma^2/\gamma_0^2\right)}{2^1\gamma_0^{2-q}\Gamma(n+1)} = f(\gamma^2)\ 0 \le |\gamma| \le \gamma_0, \tag{20}$$

оскільки $F\left(n-q+1;-n;\tfrac{1}{2};\gamma^2/\gamma_0^2\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}{2\Gamma(n+\tfrac{1}{2})} P_n^{(-\frac{1}{2};-q+\frac{1}{2})}\left(1 - 2\gamma^2/\gamma_0^2\right)$ є поліномами Якобі. Тому ряд (20) можна записати так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+1)\gamma_0^{q-1}\sqrt{\pi} P_n^{(-\frac{1}{2};-q+\frac{1}{2})}(1-2x^2)}{2^q\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2})} = f(\gamma_0^2 x^2) \quad 0 \le x \le 1$$

і внаслідок формули ортогональності [4] поліномів Якобі знайдемо a_n

$$a_n = \frac{2^{q+1}(2n+2-q)\Gamma(n+1)}{\gamma_0^{-2+q}\sqrt{\pi}\Gamma\left(n-q+\tfrac{3}{2}\right)} \int_0^1 x^2(1-x^2)^{-q+\frac{1}{2}} f(\gamma_0^2 x^2) P_n^{(\frac{1}{2},-q+\frac{1}{2})}(1-2x^2)\,dx.$$

Тепер за відомими коефіцієнтами a_n, які за формулою (15) визначають функцію $B(\xi)$, можна за поданнями (8)-(12) обчислити усі характеристики напружено-деформованого стану в циліндрі, які залежатимуть від параметра $\tfrac{1}{2} < q < 1$. Зокрема,

$$u_\beta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)}{\xi^{q+1} I_0(\xi)} I_1(\xi\alpha)\cos\xi\gamma\, d\xi, \tag{21}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)}{\xi^{q} I_0(\xi)} I_2(\xi\alpha)\cos\xi\gamma\, d\xi, \tag{22}$$

$$\sigma_{\beta\gamma} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)}{\xi^q \mathrm{I}_0(\xi)} \mathrm{I}_1(\xi\alpha) \sin \xi\gamma d\xi \,. \quad (23)$$

Зазначимо, що обмеження на параметр q на відміну від розв'язку Тимпе забезпечує існування усіх невласних інтегралів на поверхні циліндра $\alpha = 1$ і їхню неперервність у точці $\gamma = \gamma_0$.

Для підтвердження цього факту обчислимо за поданням (12) компоненту $\omega_\gamma(1,\gamma)$ в області $\gamma_0 \le |\gamma| < \infty$. В результаті одержимо такий інтеграл:

$$2\omega_\gamma(1,\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)}{\xi^q} \cos \xi\gamma d\xi \,, \quad (24)$$

значення якого в області $\gamma_0 \le |\gamma| < \infty$ знайдемо за формулою (17) і запишемо так:

$$2\omega_\gamma(1,\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+1)\sqrt{\pi} F\left(n-q+1; n-q+\frac{3}{2}; 2n-q+2; \frac{\gamma_0^{\,2}}{\gamma^2}\right)}{\gamma_0^{\,-2n+q-1} 2^r \Gamma(2n-q+2)\Gamma\left(-n+q-\frac{1}{2}\right)|\gamma|^{2n-2p+2}} \,. \quad (25)$$

Оскільки в області $0 \le |\gamma| \le \gamma_0$ компонента $\omega_\gamma(1,\gamma)$ задана крайовою умовою (13), а в області $\gamma_0 \le |\gamma| < \infty$ визначається рядом (25), то відповідно до гіпотези суцільності [6] на лінії $\gamma = \gamma_0$ зміни крайових умов повинна виконуватися гранична рівність

$$\lim_{|\gamma| \to |\gamma_0| - \varepsilon} \omega_\gamma(1,\gamma) = \lim_{|\gamma| \to |\gamma_0| + \varepsilon} \omega_\gamma(1,\gamma) \,, \quad (26)$$

виконання якої забезпечує також виконання вимоги [5] неперервної залежності розв'язку крайової задачі від крайових умов. У цьому легко переконатися, якщо в рядах (20) і (25) обчислити за формулою підсумовування (19) значення гіпергеометричної функції Гаусса у точці $\gamma = \gamma_0$, яка виконується тільки за умови $q > 1/2$, оскільки за виконання цієї умови гіпергеометричний ряд (18) є збіжним у точці $x = 1$.

Отже, в межах запропонованої моделі напружений стан циліндра визначають тільки дотичними напруженнями $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma)$ і $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma)$, причому зрізуючі напруження $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma)$ вздовж радіуса мають закон розподілу (23). Відповідно до цього закону вони дорівнюють нулю на осі циліндра і, на відміну від моделі Кулона [1], нелінійно залежать від осьової координати γ.

Якщо у законі (22) розподілу дотичного напруження $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma)$ врахувати рівність $\mathrm{I}_2(\xi\alpha) = -\frac{2}{\xi\alpha}\mathrm{I}_1(\xi\alpha) + \mathrm{I}_0(\xi\alpha)$, то його можна записати так:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)\mathrm{I}_0(\xi\alpha)}{\xi^q \mathrm{I}_0(\xi)}\cos\xi\gamma d\xi - \frac{2}{\alpha}\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)\mathrm{I}_1(\xi)}{\xi^q \mathrm{I}_0(\xi)}\cos\xi\gamma d\xi\right\}$$

і, зокрема, на поверхні циліндра $\alpha = 1$

$$\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma) = \mu\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)}{\xi^q}\cos\xi\gamma d\xi - 2\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)\mathrm{I}_1(\xi)}{\xi^q \mathrm{I}_0(\xi)}\cos\xi\gamma d\xi\right\} \quad (27)$$

Зазначимо, що за умови $q > 1/2$ правильна формула підсумовування (19) гіпергеометричної функції Гаусса. Оскільки у поданні (27) перший доданок збігається з сумою подання (24), то вираз закону розподілу дотичного напруження $\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma)$ в області $0 \le |\gamma| \le 1$ такий:

$$\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma) = \mu\left\{f(\gamma^2) - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty}\frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)\mathrm{I}_1(\xi)}{\xi^q \mathrm{I}_0(\xi)}\cos\xi\gamma d\xi\right\} \quad (28)$$

і, відповідно, в області $\gamma_0 \le |\gamma| < \infty$

$$\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma) = \mu\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\gamma_0^{2n-q+1}\Gamma(n-q+1)\sqrt{\pi}}{2^q\,\Gamma(2n-q+2)\Gamma\left(-n+q-1/2\right)|\gamma|^{2n-2q+2}} \times$$
$$\times F\left(n-q+3/2; n-q+2; 2n-q+3; \gamma_0^2/\gamma^2\right) -$$
$$-2\mu\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty}\frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)\mathrm{I}_1(\xi)}{\xi^q \mathrm{I}_0(\xi)}\sin\xi\gamma d\xi\,. \quad (29)$$

Отож, дотичне напруження $\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma)$ на поверхні циліндра $\alpha = 1$ в області $\gamma_0 \le |\gamma| < \infty$ відповідно до виразу (29) складається з двох не тотожних доданків, тому ні за яких обставин не може дорівнювати нулю. Це дає змогу стверджувати: якщо на поверхні циліндра $\alpha = 1$ в області $0 \le |\gamma| \le \gamma_0$ задана компонента $\omega_\gamma(1,\gamma)$ вектора локального жорсткого повороту $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\vec{u}$, то в не навантаженій області $\gamma_0 \le |\gamma| < \infty$ поверхні циліндра $\alpha = 1$ існують дотичні напруження $\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma)$, що є механічним проявом існування межового шару з приведеною характеристикою $1/2 < q < 1$.

Отже, закон розподілу (29) визначає необхідне довантаження поверхні циліндра в області $\gamma_0 \le \gamma < \infty$ дотичними напруженнями, яке виконує межовий шар з приведеною характеристикою $1/2 < q < 1$ для забезпечення існування фізично коректного розв'язку задачі з неперервним розподілом характеристик напруженого стану на лінії $\gamma = \gamma_0$ поверхні циліндра.

У формулюванні Тимпе за відсутності зовнішнього навантаження поверхні циліндра в області $\gamma_0 \le \gamma < \infty$ вимагається рівність нулю дотичних напружень $\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma)$ у цій області. Можна показати, що за такої вимоги крайова задача про кручення циліндра поверхневим навантаженням в обмеженій області є некоректною і її розв'язок не існує.

Як приклад застосування одержаних вище результатів визначимо напружений стан у циліндрі, який закріплений нерухомо на безмежності і має постійний скрут $\omega_\gamma{}^0$ у циліндричному поясі $0 \le |\gamma| < \gamma_0$. Тоді для визначення коефіцієнтів $\boldsymbol{a_n}$ розвинення (15) відповідно до рівняння (20) одержимо

$$\sum_{\boldsymbol{n}=0}^{\infty} \boldsymbol{a_n} \frac{\Gamma(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{q}+1)\gamma_0{}^{\boldsymbol{q}-1}\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{q}+1; -\boldsymbol{n}; \tfrac{1}{2}; \gamma_0{}^2/\gamma^2\right)}{2^{\boldsymbol{q}}\,\Gamma(\boldsymbol{n}+1)} = \omega_\gamma{}^0 \qquad 0 \le |\gamma| \le \gamma_0,$$

і його розв'язок є таким:

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{2^{\boldsymbol{q}}\,\Gamma(1-\boldsymbol{q})\omega_\gamma{}^0}{\gamma_0{}^{\boldsymbol{q}-1}}, \quad \boldsymbol{a_n} = 0 \quad \forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}. \tag{30}$$

Тому у цьому випадку

$$\xi \boldsymbol{B}(\xi) = -\frac{2^{\boldsymbol{q}}\,\Gamma(1-\boldsymbol{q})\omega_\gamma{}^0}{\gamma_0{}^{\boldsymbol{q}-1}} \cdot \frac{\boldsymbol{J}_{2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{q}+1}(\xi\gamma_0)}{\xi^{\boldsymbol{q}+1}}$$

і обчислені формули визначення напружено-деформованого стану (8)-(12) набудуть вигляду

$$\boldsymbol{u}_\beta(\alpha,\gamma) = \frac{2^{\boldsymbol{q}}\,\Gamma(1-\boldsymbol{q})\omega_\gamma{}^0}{\gamma_0{}^{\boldsymbol{q}-1}} \int_0^\infty \frac{\boldsymbol{J}_{1-\boldsymbol{q}}(\xi\gamma_0)}{\xi^{\boldsymbol{q}+1}\mathrm{I}_0(\xi)} \mathrm{I}_1(\xi\alpha)\cos\xi\gamma\, \boldsymbol{d}\xi\,; \tag{34}$$

$$\mu^{-1}\cdot\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma) = \frac{2^{\boldsymbol{q}}\,\Gamma(1-\boldsymbol{q})\omega_\gamma{}^0}{\gamma_0{}^{\boldsymbol{q}-1}} \int_0^\infty \frac{\boldsymbol{J}_{1-\boldsymbol{q}}(\xi\gamma_0)}{\xi^{\boldsymbol{q}}\mathrm{I}_0(\xi)} \mathrm{I}_2(\xi\alpha)\cos\xi\gamma\, \boldsymbol{d}\xi\,; \tag{35}$$

$$\mu^{-1}\cdot\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma) = \frac{2^{\boldsymbol{q}}\,\Gamma(1-\boldsymbol{q})\omega_\gamma{}^0}{\gamma_0{}^{\boldsymbol{q}-1}} \int_0^\infty \frac{\boldsymbol{J}_{1-\boldsymbol{q}}(\xi\gamma_0)}{\xi^{\boldsymbol{q}}\mathrm{I}_0(\xi)} \mathrm{I}_1(\xi\alpha)\sin\xi\gamma\, \boldsymbol{d}\xi\,; \tag{36}$$

$$2\omega_\gamma(\alpha,\gamma) = \frac{2^{\boldsymbol{q}}\,\Gamma(1-\boldsymbol{q})\omega_\gamma{}^0}{\gamma_0{}^{\boldsymbol{q}-1}} \int_0^\infty \frac{\boldsymbol{J}_{1-\boldsymbol{q}}(\xi\gamma_0)}{\xi^{\boldsymbol{q}}\mathrm{I}_0(\xi)} \mathrm{I}_0(\xi\alpha)\cos\xi\gamma\, \boldsymbol{d}\xi\,; \tag{37}$$

$$2\omega_\alpha(\alpha,\gamma) = \frac{2^{\boldsymbol{q}}\,\Gamma(1-\boldsymbol{q})\omega_\gamma{}^0}{\gamma_0{}^{\boldsymbol{q}-1}} \int_0^\infty \frac{\boldsymbol{J}_{1-\boldsymbol{q}}(\xi\gamma_0)}{\xi^{\boldsymbol{q}}\mathrm{I}_0(\xi)} \mathrm{I}_1(\xi\alpha)\sin\xi\gamma\, \boldsymbol{d}\xi\,; \tag{38}$$

Аналіз розрахункових інтегралів у формулах (34)–(38) свідчить про те, що за виконання нерівності $\frac{1}{2} < \boldsymbol{q} < 1$ на параметр $\boldsymbol{q}$ усі вони існують і є неперервними на лінії $|\gamma| = \gamma_0$, що обмежує область задання крайових умов.

3. **Числові результати та їхній аналіз**. На рис. 1 показано розподіл дотичних напружень $\left(\omega_\gamma{}^0 \mu\right)^{-1} \sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma)$ вздовж осі γ циліндра при фіксованих значеннях змінної α, який визначається виразом (35) при $\boldsymbol{q} = 0{,}75$ і $\gamma_0 = 1$. Аналіз графіків свідчить про те, що ці напруження досягають максимального значення на поверхні циліндра і змінюють знак біля межі області завантаження. За таких обставин біля поверхні циліндра можливе виникнення зон розшарування і появи тріщин.

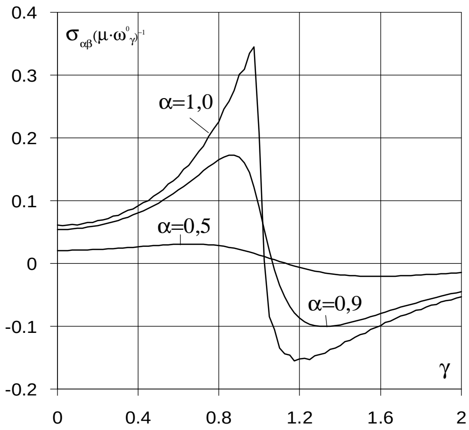

Рис.1

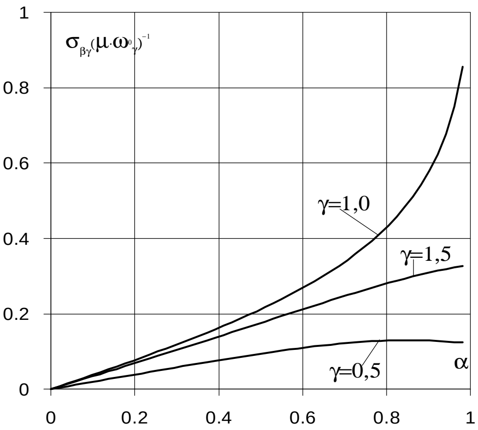

Рис.2.

На рис.2 показано розподіл зрізуючих напружень $\left(\omega_\gamma{}^0 \mu\right)^{-1} \sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma)$ при фіксованих значеннях γ вздовж радіуса циліндра при $\boldsymbol{q} = 0.75$ і $\gamma_0 = 1$. Аналіз цих графіків свідчить про те, що максимального значення ці напруження досягають у площині циліндра $\gamma = 1$ на його поверхні $\alpha = 1$.

---

1. *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тел. – М., 1963.
2. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 41, № 1. – 1998. - С. 12–34.
3. *Галазюк В.А., Сулим Г.Т.* Неклассическая модель деформирования тел с трещинами // Теор. и прикл. механика. – Харьков. – 2001. –Вып. 33. – С. 63–75.

4. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М., 1979.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М., 1964.
6. *Трусделл К.* Первоначальный курс механики сплошных сред. – М., 1975.

AXIS SYMMETRICAL CYLINDER TORSION BY THE LOCAL SURFASE LOADING OF THE CYLINDER IN THE CASE OF EXISTENCE OF THE BOUNDARY LAYER

Oleksandr Andreykiv, Olha Halazyuk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

A new mathematical model of stressed state in cylinder with restrained butt-ends on the infinity in the case of local surface loading which causes its torsion is presented. Also, the existence of tangential stress on the not loaded cylinder surface which provides the existence of the boundary layer is proved.

Key words: cylinder, torsion, stress, boundary layer.

Стаття надійшла до редколегії 27.09.2006
Прийнята до друку 19.11.2008