

УДК 539.3

АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОГО ПРУЖНОГО ВКЛЮЧЕННЯ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ ПРОСТОРИ

Георгій СУЛИМ¹, Роман РАБОШ²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

²Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача, НАН України
вул. Наукова, 3-б 79060 Львів, Україна

Розглянуто антиплоску статичну задачу для тонкого пружного включення у п'єзоелектричному просторі. Для розв'язування сформульованої задачі було використано метод функцій стрибка. Цей метод заснований на моделюванні включення стрибками векторів переміщень і напружень. Задачу звели до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язали з використанням методу колокацій.

Отримано вирази для узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень, електричної напруженості та електричної індукції у випадках пружного включення, тріщини й абсолютно жорсткого включення. Чисельні результати ілюструють вплив форми пружного включення і п'єзоелектричних властивостей матеріалу середовища на коефіцієнти інтенсивності.

Ключові слова: п'єзоелектричний простір, пружне включення, напружено-деформований стан, коефіцієнти інтенсивності напружень, коефіцієнт інтенсивності електричної індукції, коефіцієнт інтенсивності електричної напруженості.

1. Сучасна механіка деформівного твердого тіла розглядає напружено-деформований стан не лише суто механічних тіл, а й враховує у них вплив і взаємодію різних фізико-механічних полів. Спочатку це стосувалося лише теплового поля і наслідком цього було виникнення термопружності. Пізніше до цього додалися електричні та електромагнітні поля. Потреба у такому аналізі пов'язана зі шораз ширшим використанням у елементах інженерних об'єктів п'єзоелектричного ефекту, який полягає у зміні розмірів тіла (деформування) під час пропускання через нього електричного струму і навпаки – появі імпульсу струму внаслідок деформування середовища. Це явище не є рідкісним і останніми часами увага до його вивчення й урахування у механічних системах стрімко зросла [1–7]. Спричинене це, зокрема, і тим, що цей ефект використовують для конструювання так званих смарт-матеріалів (інтелектуальних матеріалів), властивості яких змінюються під час експлуатації виготовленого з них об'єкта чи робочого тіла, якнайліпше пристосовуючись до режимів навантажування та їхньої зміни.

Задачі електропружності для п'єзоелектричного середовища з тріщинами і отворами були розглянуті, наприклад, в [1–6]. У [7] розглянуто задачу про сфероїдне включення, а у праці [8] розглянуто задачу про тріщину між п'єзоелектричним круглим включенням і п'єзоелектричним середовищем. Проте питання концентрації механічних та електричних полів поблизу тонких пружних деформівних включень залишилося поза увагою дослідників.

Для розв'язування сформульованої задачі було використано метод функцій стрибка [9], за допомогою якого визначено залежності напруженого стану середовища від

функції стрибка і зовнішнього навантаження. Використавши граничний перехід в отриманих виразах для визначення напружень і переміщень на лінії контакту матриці з включенням і умови взаємодії пружного включення з навколишнім середовищем [9, 10], отримали систему сингулярних інтегральних рівнянь щодо шуканих функцій стрибка. Цей результат використано для дослідження концентрації механічних та електричних полів у випадку тонкого пружного включення в однорідному п'єзоелектричному просторі.

2. Формулювання задачі. Розглянемо п'єзоелектричний простір, віднесений до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$. Він складається з двох півпросторів, на межі поділу яких розташоване стрічкове пружне включення. У площині Ox_1x_2 межі поділу півпросторів відповідає лінія L , а серединній лінії включення – відрізок $L' = [-a; a] \subset L$. Вважаємо, що матеріали півпросторів відповідають кристалографічному класу $6mm$ і поляризовані вздовж осі Ox_3 . На безмежності діє однорідне поле дотичних напружень $\sigma_{23}^\infty = \tau$, $\sigma_{13}^{(k)\infty} = \tau_1^{(k)}$ й однорідне поле електричної напруженості $E_1^\infty, E_2^{(k)\infty}$ ($k = 1, 2$).

Згідно з [11] для поперечного перерізу розглядуваного простору (площина Ox_1x_2) виконуються визначальні співвідношення (1)–(2), рівняння рівноваги (3) і рівняння електростатики (4)–(5):

$$\sigma_{i3}^{(k)} = c_{44}^{(k)} \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x_i} - e_{15}^{(k)} E_i^{(k)}, \quad (1)$$

$$D_i^{(k)} = e_{15}^{(k)} \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x_i} + \varepsilon_{11}^{(k)} E_i^{(k)}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(k)}}{\partial x_2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial D_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2^{(k)}}{\partial x_2} = 0, \quad (4)$$

$$E_i^{(k)} = -\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, 2), \quad (5)$$

де $u_3^{(k)} = u_3^{(k)}(x_1, x_2)$, $\sigma_{i3}^{(k)} = \sigma_{i3}^{(k)}(x_1, x_2)$, $E_i^{(k)} = E_i^{(k)}(x_1, x_2)$, $D_i^{(k)} = D_i^{(k)}(x_1, x_2)$ – переміщення точок в напрямі осі x_3 , компоненти тензора напружень і векторів електричної напруженості та індукції відповідно; $c_{44}^{(k)}$ – пружна стала, виміряна за сталого електричного поля; $e_{15}^{(k)}$ – п'єзоелектрична стала; $\varepsilon_{11}^{(k)}$ – діелектрична проникність, виміряна за сталої деформації; $\varphi^{(k)}(x_1, x_2)$ – електростатичний потенціал; верхній індекс 1 відповідає верхньому півпростору, а 2 – нижньому.

Включення вважається абсолютно електропровідним і настільки тонким, що його вплив можна моделювати стрибком [9] вектора напружень і похідних від зміщень на L' . На решті лінії L контакт між півпросторами ідеальний

$$\sigma_{23}^{(2)} - \sigma_{23}^{(1)} = f_3(x_1) \quad (x_1 \in L'); \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_1} = f_6(x_1) \quad (x_1 \in L'); \quad (7)$$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)} \quad (x_1 \in L/L'); \quad (8)$$

$$E_1^{(1)} = E_1^{(2)}, \quad D_2^{(1)} = D_2^{(2)} \quad (x_1 \in L). \quad (9)$$

3. Розв'язування задачі. Згідно з [1] величини механічного та електричного полів розглядуваної задачі можна виразити через комплексні потенціали $\Psi_j^{(k)}(z)$ ($j, k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} u_3^{(k)} &= \operatorname{Re} \psi_1^{(k)}(z), \quad \varphi^{(k)} = \operatorname{Re} \psi_2^{(k)}(z), \\ \sigma_{13}^{(k)} - i\sigma_{23}^{(k)} &= c_{44}^{(k)} \Psi_1^{(k)}(z) + e_{15}^{(k)} \Psi_2^{(k)}(z), \\ D_1^{(k)} - iD_2^{(k)} &= e_{15}^{(k)} \Psi_1^{(k)}(z) - \varepsilon_{11}^{(k)} \Psi_2^{(k)}(z), \\ E_1^{(k)} - iE_2^{(k)} &= -\Psi_2^{(k)}(z), \\ \Psi_j^{(k)}(z) &= \frac{d\psi_j^{(k)}(z)}{dz}, \quad z = x_1 + ix_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для знаходження комплексних потенціалів $\Psi_j^{(k)}(z)$ ($j, k = 1, 2$) подамо їх у вигляді

$$\Psi_j^{(k)}(z) = \omega_j^{0(k)}(z) + \omega_j(z) \quad (z \in S^{(k)}; \quad j, k = 1, 2), \quad (11)$$

де $\omega_j(z)$ – функції, які голоморфні у кожній з півплощин $S^{(k)}$, зокрема і прямують до нуля на нескінченності, а $\omega_j^{0(k)}(z)$ – фундаментальні розв'язки у k -ій півплощині.

Фундаментальні розв'язки для такого випадку набувають вигляду [1]

$$\omega_1^{0(k)}(z) = \frac{\tau_1^{(k)} - i\tau + e_{15}^{(k)}(E_1^\infty - iE_2^{(k)\infty})}{c_{44}^{(k)}}, \quad \omega_2^{0(k)}(z) = iE_2^{(k)\infty} - E_1^\infty \quad (k = 1, 2). \quad (12)$$

Підставивши вирази (10) в умови (6)–(7), (9), враховуючи (11) та розв'язуючи відповідні задачі спряження, подібно до того як це зроблено в [12], отримаємо

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= \frac{it_6(z)A^{(k)} + t_3(z)}{B}, \\ \omega_2(z) &= \frac{it_6(z)(A^{(k)}(e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)}) - Be_{15}^{(1)}) + t_3(z)(e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})}{B(\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)})}, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned}
A^{(k)} &= \frac{c_{44}^{(l)} (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}) + e_{15}^{(l)} (e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}}, \\
B &= \frac{(c_{44}^{(2)} + c_{44}^{(1)}) (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}) + (e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})^2}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}}, \\
t_j(z) &= \frac{1}{\pi} \int_L \frac{f_j(t)}{t-z} dt \quad (z \in S^{(k)}; j = 3, 6; k, l = 1, 2; k \neq l). \quad (14)
\end{aligned}$$

Тоді, підставляючи вирази (11) у формули (10), з урахуванням (12), (13), (14) одержимо

$$u_3^{(k)} = \operatorname{Re} \left(\int \left(\frac{it_6(z)A^{(k)} + t_3(z)}{B} \right) dz + \frac{\tau_1^{(k)} - i\tau + e_{15}^{(k)} (E_1^\infty - iE_2^{(k)\infty})}{c_{44}^{(k)}} z \right), \quad (15,a)$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{(k)} &= \operatorname{Re} \int \left(\frac{it_6(z)(A^{(k)}(e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)}) - Be_{15}^{(l)}) + t_3(z)(e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})}{B(\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)})} dz - \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{Re}(z(iE_2^{(k)\infty} - E_1^\infty)) \right), \quad (15,b)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{13}^{(k)} - i\sigma_{23}^{(k)} = \frac{A^{(l)}}{B} t_3(z) + i \left(\frac{A^{(k)}A^{(l)}}{B} - \frac{e_{15}^{(l)}e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}} \right) t_6(z) + \tau_1^{(k)} - i\tau, \quad (15,б)$$

$$\begin{aligned}
D_1^{(k)} - iD_2^{(k)} &= \frac{C^{(k)}}{B} t_3(z) + i \left(\frac{A^{(k)}C^{(k)}}{B} + \frac{e_{15}^{(l)}\varepsilon_{11}^{(k)}}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}} \right) t_6(z) + \\
&\quad + \frac{e_{15}^{(k)}}{c_{44}^{(k)}} (\tau_1^{(k)} - i\tau) + \left(\varepsilon_{11}^{(k)} + \frac{(e_{15}^{(k)})^2}{c_{44}^{(k)}} \right) (E_1^\infty - iE_2^{(k)\infty}), \quad (15,в)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1^{(k)} - iE_2^{(k)} &= -\frac{e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)}}{B(\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)})} t_3(z) + \frac{i(e_{15}^{(l)}B - A^{(k)}(e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)}))}{B(\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)})} t_6(z) + \\
&\quad + E_1^\infty - iE_2^{(k)\infty}, \quad (15,д)
\end{aligned}$$

де

$$C^{(k)} = \frac{e_{15}^{(k)}(\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}) - \varepsilon_{11}^{(k)}(e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}} \quad (k, l = 1, 2; k \neq l). \quad (16)$$

Для визначення невідомих функцій стрибка $f_3(x_1)$ і $f_6(x_1)$ треба скористатися крайовими умовами [9] взаємодії включення з навколишнім середовищем

$$c_{44}^e \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)_{2h} - \frac{1}{h} \int_{-a}^{x_1} [\sigma_{23}]_{2h} d\xi = \sigma_{13}^c(-a),$$

$$(\sigma_{23})_{2h} + \frac{c_{44}^e}{h} \int_{-a}^{x_1} \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right]_{2h} d\xi = w_-^* \frac{c_{44}^e}{h} \quad (x_1 \in [-a; a]), \quad (17)$$

де $h = h(x_1)$ – функція, яка визначає форму включення; c_{44}^e – модуль зсуву включення, а величини $\sigma_{13}^e(-a)$ і w_-^* визначаються з апіорних формул [9]; $[\sigma_{23}]_{2h} = \sigma_{23}^- - \sigma_{23}^+$, $(\sigma_{23})_{2h} = \sigma_{23}^- + \sigma_{23}^+$, $[\partial u_3 / \partial x_1]_{2h} = \partial u_3^- / \partial x_1 - \partial u_3^+ / \partial x_1$, $(\partial u_3 / \partial x_1)_{2h} = \partial u_3^- / \partial x_1 + \partial u_3^+ / \partial x_1$. Тут і надалі індекси плюс і мінус відповідно позначають граничні значення величин матриці на верхньому та нижньому краях серединної лінії включення.

Використання рівностей (15,а), (15,б) і формул Сохоцького-Племелі [13] дає змогу знайти вирази для стрибків і сум граничних значень напруження σ_{23} і похідної від зміщення u_3 по x_1

$$\begin{aligned} [\sigma_{23}]_{2h} &= f_3(x_1), \quad (\sigma_{23})_{2h} = C_1 t_6(x_1) + C_2 f_3(x_1) + F_\sigma, \\ \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right]_{2h} &= f_6(x_1), \quad \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)_{2h} = C_3 f_6(x_1) + C_4 t_3(x_1) + F_u, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} C_1 &= 2 \left(\frac{e_{15}^{(1)} e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}} - \frac{A^{(1)} A^{(2)}}{B} \right), \\ C_2 &= - \frac{\left((e_{15}^{(1)})^2 - (e_{15}^{(2)})^2 \right) + (c_{44}^{(1)} - c_{44}^{(2)}) (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)})}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}}, \\ C_3 &= \frac{A^{(2)} - A^{(1)}}{B}, \quad C_4 = \frac{2}{B}, \\ F_\sigma &= 2\tau, \quad F_u = \frac{\tau_1^{(1)}}{c_{44}^{(1)}} + \frac{\tau_1^{(2)}}{c_{44}^{(2)}} + \left(\frac{e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(1)}} + \frac{e_{15}^{(2)}}{c_{44}^{(2)}} \right) E_1^\infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Підставивши (18) в (17), отримуємо два сингулярних інтегральних рівняння стосовно функцій $f_3(x_1)$ і $f_6(x_1)$:

$$\begin{aligned} c_{44}^e (C_3 f_6(x_1) + C_4 t_3(x_1) + F_u) - \frac{1}{h} \int_{-a}^{x_1} f_3(\xi) d\xi &= \sigma_{13}^e(-a), \\ C_1 t_6(x_1) + C_2 f_3(x_1) + F_\sigma + \frac{c_{44}^e}{h} \int_{-a}^{x_1} f_6(\xi) d\xi &= w_-^* \frac{c_{44}^e}{h} \quad (x_1 \in [-a; a]). \end{aligned} \quad (20)$$

У випадку включення в однорідному п'єзоелектричному просторі ($c_{44}^{(1)} = c_{44}^{(2)} = c_{44}$, $e_{15}^{(1)} = e_{15}^{(2)} = e_{15}$, $\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}$, $\tau_1^{(1)} = \tau_1^{(2)} = \tau_1$, $E_2^{(1)\infty} = E_2^{(2)\infty} = E_2^\infty$), на підставі (14)–(16) і (19) отримаємо

$$A^{(1)} = A^{(2)} = A = c_{44}(1 + k^2), B = 2A, \quad (21)$$

$$u_3 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \left(it_6(z) + \frac{1}{c_{44}(1 + k^2)} t_3(z) \right) dz + \operatorname{Re} u_3^0, \quad (22,a)$$

$$\varphi = \frac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}c_{44}(1 + k^2)} \operatorname{Re} \int t_3(z) dz + \operatorname{Re} \varphi^0, \quad (22,b)$$

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = \frac{1}{2} (t_3(z) + ic_{44}t_6(z)) + \sigma_{13}^0 - i\sigma_{23}^0, \quad (22,c)$$

$$D_1 - iD_2 = \frac{ie_{15}}{2} t_6(z) + D_1^0 - iD_2^0, \quad (22,d)$$

$$E_1 - iE_2 = -\frac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}c_{44}(1 + k^2)} t_3(z) + E_1^0 - iE_2^0, \quad (22,e)$$

$$C_1 = -c_{44}, C_2 = C_3 = 0, C_4 = \frac{1}{c_{44}(1 + k^2)},$$

$$F_\sigma = 2\tau, F_u = 2 \left(\frac{\tau_1 + e_{15}E_1^\infty}{c_{44}} \right), \quad (23)$$

$$u_3^0 = \frac{\tau_1 + e_{15}E_1^\infty}{c_{44}} z - \frac{\tau + e_{15}E_2^\infty}{c_{44}} iz, \varphi^0 = (iE_2^\infty - E_1^\infty)z, \sigma_{13}^0 - i\sigma_{23}^0 = \tau_1 - i\tau, \\ D_1^0 - iD_2^0 = \frac{e_{15}}{c_{44}} (\tau_1 - i\tau) + \varepsilon_{11}(1 + k^2)(E_1^\infty - iE_2^\infty), E_1^0 - iE_2^0 = E_1^\infty - iE_2^\infty, \quad (24)$$

де $k = \frac{e_{15}}{\sqrt{\varepsilon_{11}c_{44}}}$ – коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Тепер система (20) з урахуванням (23) поділяється на два незалежних рівняння

$$\frac{c_{44}^e}{c_{44}(1 + k^2)} t_3(x_1) - \frac{1}{h} \int_{-a}^{x_1} f_3(\xi) d\xi = \sigma_{13}^e(-a) - c_{44}^e F_u, \\ -c_{44} t_6(x_1) + \frac{c_{44}^e}{h} \int_{-a}^{x_1} f_6(\xi) d\xi = w_-^* \frac{c_{44}^e}{h} - F_\sigma \quad (x_1 \in [-a; a]), \quad (25)$$

де $\sigma_{13}^e(-a) = 2c_{44}^e \tau_1 / \max(c_{44}^e, c_{44})$, $w_-^* = 2\tau h / \max(c_{44}^e, c_{44})$.

Варто зазначити, що друге рівняння системи (25) не залежить від п'єзоелектричних властивостей матеріалу матриці і збігається з відповідним рівнянням суто пружної задачі [9].

Додаткові умови для розв'язування рівнянь (25) можна отримати з умови однозначності зміщень під час обходу навколо контуру включення та з умови глобальної рівноваги включення [9], які в цьому випадку набувають вигляду

$$\int_{-a}^a f_3(t) dt = 0, \int_{-a}^a f_6(t) dt = 0. \quad (26)$$

Система рівнянь (25) у загальному випадку може бути розв'язана з використанням методу колокацій [9], згідно з яким шукані функції подають у вигляді

$$f_j(t) = \frac{\sum_{n=0}^N A_{jn} T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t = \frac{x_1}{a} \quad (x_1 \in [-a; a]; j = 3, 6), \quad (27)$$

де $T_n(t) \equiv \cos(n \arccos(t))$ – многочлени Чебишова першого роду; A_{jn} – невідомі коефіцієнти розвинення.

Перейдемо до полярної системи координат з початком біля правого або лівого кінця включення $z = \pm(z_1 + a)$, $z_1 = re^{i\theta}$. Тут і надалі верхній знак беремо, якщо досліджуємо розподіл польових величин біля правого кінця включення, а нижній – біля лівого. Згідно з [12] для інтегралів типу Коші $t_j(z)$ ($j = 3, 6$) існують асимптотичні вирази

$$t_j(z) = \mp \left(\frac{p_j^\pm}{\sqrt{z_1}} - q_j^\pm + O(\sqrt{r}) \right), \quad p_j^\pm = \lim_{s_m \rightarrow 0} (\sqrt{s_m} f_j(t)),$$

$$q_j^\pm = \pm \lim_{s_m \rightarrow 0} \lim_{(t \in L')} t_j(t) \quad (j = 3, 6), \quad (28)$$

де $\sqrt{s_m}$ – дугова відстань від точки x на осі L' включення до його кінця, тобто в разі прямування до лівого краю $s_m = x + a$, а у разі прямування до правого краю – $s_m = a - x$.

Тоді з врахуванням формул (28) із рівностей (22, a-d) отримаємо асимптотичні формули розподілу польових величин в околі країв включення

$$u_3 - u_3^0 = \pm \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{K_{3,1}^\pm}{c_{44}} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{K_{3,2}^\pm}{c_{44}(1+k^2)} \cos \frac{\theta}{2} \right) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \left(\frac{q_3^\pm}{c_{44}(1+k^2)} (a + r \cos \theta) - q_6^\pm r \sin \theta \right) + O(r^{3/2}),$$

$$\varphi - \varphi^0 = \mp \frac{\sqrt{2r} K_E^\pm}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \pm \frac{e_{15}(a + r \cos \theta)}{2e_{11}c_{44}(1+k^2)} q_3^\pm + O(r^{3/2}),$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{13} - \sigma_{13}^0 \\ \sigma_{23} - \sigma_{23}^0 \end{Bmatrix} = \frac{K_{3,1}^\pm}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} + \frac{K_{3,2}^\pm}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \pm \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_3^\pm \\ -c_{44} q_6^\pm \end{Bmatrix} + O(\sqrt{r}),$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 - D_1^0 \\ D_2 - D_2^0 \end{Bmatrix} = \frac{K_D^\pm}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \pm \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -e_{15} q_6^\pm \end{Bmatrix} + O(\sqrt{r}),$$

$$\begin{Bmatrix} E_1 - E_1^0 \\ E_2 - E_2^0 \end{Bmatrix} = \frac{K_E^\pm}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \pm \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -\frac{e_{15}}{c_{44}\varepsilon_{11}(1+k^2)} q_3^\pm \\ 0 \end{Bmatrix} + O(\sqrt{r}). \quad (29)$$

Тут $K_{3,1}^\pm$, $K_{3,2}^\pm$ – узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень; K_D^\pm і K_E^\pm – узагальнені коефіцієнти інтенсивності електричної індукції та напруженості. Відповідно до (28) вони залежать від функцій стрибка так:

$$\begin{aligned} K_{3,2}^\pm - iK_{3,1}^\pm &= \mp \sqrt{\frac{\pi}{2}} (p_3^\pm + ic_{44}p_6^\pm), \quad K_D^\pm = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} e_{15}p_6^\pm, \\ K_E^\pm &= \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e_{15}p_3^\pm}{c_{44}\varepsilon_{11}(1+k^2)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Підставивши вирази (27) у рівності (30), отримуємо такі залежності узагальнених коефіцієнтів інтенсивності від коефіцієнтів розвинення A_{jn} ($j = 3, 6; n = \overline{0, N}$):

$$\begin{aligned} K_{3,2}^\pm - iK_{3,1}^\pm &= \mp \frac{\sqrt{\pi a}}{2} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n (A_{3n} + ic_{44}A_{6n}), \\ K_D^\pm &= \pm \frac{e_{15}\sqrt{\pi a}}{2} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n A_{6n}, \quad K_E^\pm = \pm \frac{e_{15}\sqrt{\pi a}}{2\varepsilon_{11}c_{44}(1+k^2)} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n A_{3n}. \end{aligned} \quad (31)$$

Згідно з (25) значення сталих A_{3n} ($n = \overline{0, N}$) не залежать від зовнішнього навантаження σ_{23}^0 і зовнішнього електричного поля E_2^0 , а значення сталих A_{6n} ($n = \overline{0, N}$) не залежать від зовнішнього навантаження σ_{13}^0 , від зовнішнього електричного поля E_1^0 і E_2^0 , від п'єзоелектричної сталої і від діелектричної проникності простору.

Отже, згідно з (25) і (31) числові значення коефіцієнта $K_{3,1}^\pm$ збігаються з відповідними числовими значеннями для випадку пружного включення у суто пружному середовищі [9].

При $c_{44}^e = 0$ або $c_{44}^e = \infty$ і $h \rightarrow 0$ із (25) отримують результати для абсолютно електропровідної тріщини й абсолютно жорсткого, абсолютно електропровідного включення на лінії поділу матеріалів відповідно

$$f_3(x_1) = 0, \quad t_6(x_1) = \frac{2\sigma_{23}^0}{c_{44}} \quad (\text{необхідно, щоб } \sigma_{13}^c(-a) = 0); \quad (32)$$

$$f_6(x_1) = 0, \quad t_3(x_1) = -2(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)(1+k^2) \quad (\text{необхідно, щоб } w_-^* = 0). \quad (33)$$

Розв'язок інтегральних рівнянь (32), (33) згідно з [12] має вигляд:
для абсолютно електропровідної тріщини

$$f_6(x_1) = \frac{2\sigma_{23}^0 x_1}{c_{44}\sqrt{a^2 - x_1^2}}, f_3(x_1) = 0; \quad (34)$$

для абсолютно жорсткого й електропровідного включення

$$f_3(x_1) = \frac{-2(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)(1 + k^2)x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}, f_6(x_1) = 0. \quad (35)$$

Тоді з (22,а–д) і (30), з використанням (28), (34), (35), отримуємо:
для абсолютно електропровідної тріщини –

$$\begin{aligned} u_3 &= \operatorname{Re} \left(\frac{-i\sigma_{23}^0 \sqrt{z^2 - a^2}}{c_{44}} + \frac{\sigma_{13}^0 z}{c_{44}} + (E_1^0 - iE_2^0) \frac{ze_{15}}{c_{44}} \right), \\ \varphi &= \operatorname{Re} \varphi^0, \quad \sigma_{13} - i\sigma_{23} = \frac{-i\sigma_{23}^0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \sigma_{13}^0, \\ D_1 - iD_2 &= \frac{ie_{15}\sigma_{23}^0}{c_{44}} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) + D_1^0 - iD_2^0, \quad E_1 - iE_2 = E_1^0 - iE_2^0, \\ K_{3,1}^\pm &= K_{3,1}^{\pm\Gamma} \equiv \pm\sigma_{23}^0 \sqrt{\pi a}, \quad K_D^\pm = K_D^{\pm\Gamma} \equiv \pm \frac{e_{15}\sigma_{23}^0 \sqrt{\pi a}}{c_{44}}, \quad K_{3,2}^\pm = 0, \quad K_E^\pm = 0; \quad (36) \end{aligned}$$

для абсолютно жорсткого й електропровідного включення –

$$\begin{aligned} u_3 &= \operatorname{Re} \left(\frac{(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)\sqrt{z^2 - a^2}}{c_{44}} - \frac{\sigma_{23}^0 + e_{15}E_2^0}{c_{44}} iz \right), \\ \varphi &= \operatorname{Re} \left(\frac{e_{15}(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)(\sqrt{z^2 - a^2} - z)}{\varepsilon_{11}c_{44}} + \varphi^0 \right), \\ \sigma_{13} - i\sigma_{23} &= \frac{(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)(1 + k^2)z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - (\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)k^2 - e_{15}E_1^0 - i\sigma_{23}^0, \\ D_1 - iD_2 &= D_1^0 - iD_2^0, \quad E_1 - iE_2 = \frac{e_{15}(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)}{c_{44}\varepsilon_{11}} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) + E_1^0 - iE_2^0, \\ K_{3,1}^\pm &= 0, \quad K_D^\pm = 0, \quad K_{3,2}^\pm = K_{3,2}^{\pm\text{АЖ}} \equiv \pm(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)(1 + k^2)\sqrt{\pi a}, \\ K_E^\pm &= K_E^{\pm\text{АЖ}} \equiv \mp \frac{e_{15}(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)\sqrt{\pi a}}{\varepsilon_{11}c_{44}}. \quad (37) \end{aligned}$$

Треба зазначити, що розподіл електромеханічних полів (29) у п'єзоелектричному просторі з абсолютно електропровідною тріщиною збігається з відповідними результатами праць [4–6].

Зазначимо також, що у випадку пружного стрічкового включення у суто пружному однорідному просторі ($e_{15} = 0$), система рівнянь (25), а також вирази (29)–(31), (36)–(37) для зміщень, механічних напружень і узагальнених коефіцієнтів інтенсивності

$K_{3,1}^{\pm}$, $K_{3,2}^{\pm}$ збігаються з відповідними результатами, отриманими в [10]. Узагальнені коефіцієнти інтенсивності електричної напруженості та індукції, як і можна було очікувати, в цьому випадку дорівнюють нулю.

Для випадку пружного абсолютно електропровідного включення у п'єзоелектрику введемо нормовані коефіцієнти інтенсивності

$$K_{3,1}^{\pm 0} = \frac{K_{3,1}^{\pm}}{K_{3,1}^{\pm T}}, K_D^{\pm 0} = \frac{K_D^{\pm}}{K_D^{\pm T}}, K_{3,2}^{\pm 0} = \frac{K_{3,2}^{\pm}}{K_{3,2}^{\pm AJ}}, K_E^{\pm 0} = \frac{K_E^{\pm}}{K_E^{\pm AJ}}, \quad (38)$$

де $K_{3,1}^{\pm T}$, $K_D^{\pm T}$ – значення коефіцієнтів $K_{3,1}^{\pm}$ і K_D^{\pm} у випадку абсолютно електропровідної тріщини, а $K_{3,2}^{\pm AJ}$, $K_E^{\pm AJ}$ – значення коефіцієнтів $K_{3,2}^{\pm}$ і K_E^{\pm} у випадку абсолютно жорсткого й електропровідного включення. Тоді з рівностей (31), (36)–(38) отримаємо

$$K_{3,1}^{\pm 0} = K_D^{\pm 0} = \pm \frac{c_{44}}{2\sigma_{23}^0} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n A_{6n},$$

$$K_{3,2}^{\pm 0} = K_E^{\pm 0} = \mp \frac{1}{2(1+k^2)(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n A_{3n}. \quad (39)$$

4. Аналіз результатів. Числові обчислення зроблені для включення з використанням методу колокацій [9] при $a/h_0 = 10$ для різних значень відносної жорсткості включення $k = c_{44}^e / c_{44}$ і параметра форми q включення формально змінної товщини $h(x_1) = h_0 (1 - (x_1/a)^2)^{1/(2q)}$ ($q = 1$ – еліптичне включення, $q = 1000$ – практично прямокутне включення). За матеріал простору обрано п'єзокераміку [8] PZT-4 ($c_{44} = 2.56 \cdot 10^{10}$ Н/м², $e_{15} = 12.7$ Кл/м², $\epsilon_{11} = 64.6 \cdot 10^{-10}$ Кл/(Вм)).

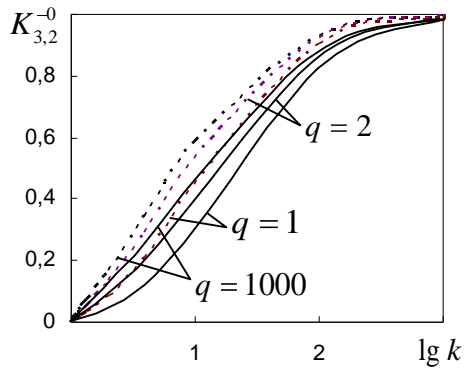


Рис. 1

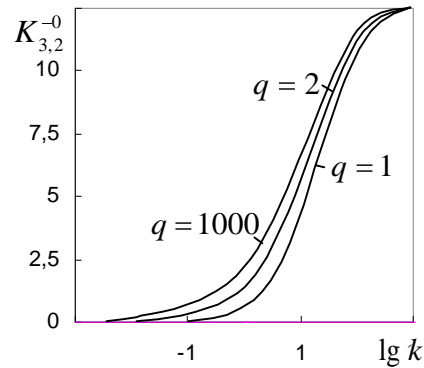


Рис. 2

На рис. 1 зображено залежності нормованого коефіцієнта інтенсивності $K_{3,2}^{-0}$ від параметрів k та q при суто силовому навантаженні ($\sigma_{13}^0 \neq 0$, $\sigma_{23}^0 = E_1^0 = 0$). Суцільні лінії відповідають випадку пружного включення у п'єзоелектричному просторі ($K_{3,2}^{\pm 0} = K_E^{\pm 0}$, $K_{3,1}^{\pm} = K_D^{\pm} = 0$), а штрихові – у суто пружному просторі ($K_E^{\pm} = K_{3,1}^{\pm} = K_D^{\pm} = 0$). В обох випадках цей коефіцієнт практично дорівнює нулю при $k \leq 1$. Для будь-якої форми включення зазначений коефіцієнт інтенсивності у п'єзоелектричному просторі менший, ніж відповідний коефіцієнт у пружному просторі.

На рис. 2 показано залежності однакових між собою коефіцієнтів $K_{3,2}^{-0}$, K_E^{-0} ($K_{3,1}^{\pm} = K_D^{\pm} = 0$) від k та q при суто електричному навантаженні ($E_1^{\infty} \neq 0$, $\sigma_{13}^0 = \sigma_{23}^0 = 0$) для випадку п'єзоелектричного середовища з пружним включенням. Ці коефіцієнти прямують до нуля при $k \rightarrow 0$. Для випадку пружного середовища з пружним включенням при суто електричному навантаженні всі узагальнені коефіцієнти інтенсивності дорівнюють нулю.

У табл. наведено деякі значення (у процентах) модуля відносної різниці $\Delta = K_{3,2}^{-0} \Big|_{q=1000} - K_{3,2}^{-0} \Big|_{q=1} / K_{3,2}^{-0} \Big|_{q=1000}$ між значеннями коефіцієнта $K_{3,2}^{-0}$ у випадку п'єзоелектричного простору з практично прямокутним включенням і з еліптичним включенням. Оскільки $K_{3,2}^{\pm 0} = K_E^{\pm 0}$, то значення відносної різниці є однаковими для коефіцієнтів $K_{3,2}^{-0}$ і K_E^{-0} . При суто механічному навантаженні та при суто електричному навантаженні модуль відносної різниці Δ зменшується при зростанні k від 96% при $k = 0.001$ до 1% при $k = 1000$.

Таблиця

k	$ \Delta $ ($\sigma_{13}^0 \neq 0$, $E_1^\infty = \sigma_{23}^0 = 0$)	$ \Delta $ ($E_1^\infty \neq 0$, $\sigma_{13}^0 = \sigma_{23}^0 = 0$)
0,001	95,85960961	95,85964053
0,01	95,16724715	95,16693891
0,1	90,44900194	90,4489518
0,7109024	76,67666065	76,67738232
0,8688884	74,42244657	74,4228174
1,1500004	70,9532294	70,95406045
3,929615	51,48495429	51,48645155
10	34,20938125	34,20721379
100	6,362637487	6,362672322
1000	0,707465894	0,709615691

5. Висновки.

1. Для абсолютно електропровідної тріщини:

а) коефіцієнт інтенсивності напружень $K_{3,1}^{\pm T}$ залежить від механічного навантаження σ_{23}^0 і збігається з відповідним коефіцієнтом, отриманим у [10] для випадку тріщини у пружному просторі;

б) коефіцієнт інтенсивності електричної індукції $K_D^{\pm T}$ залежить від механічного навантаження σ_{23}^0 , від п'єзоелектричної сталої і від модуля пружності матеріалу простору;

в) коефіцієнти інтенсивності напружень $K_{3,2}^{\pm}$ і електричної напруженості K_E^{\pm} дорівнюють нулю.

2. Для абсолютно жорсткого й електропровідного включення:

а) коефіцієнт інтенсивності напружень $K_{3,2}^{\pm AJ}$ і коефіцієнт інтенсивності електричної напруженості $K_E^{\pm AJ}$ не залежать від механічного навантаження σ_{23}^0 і від зовнішнього електричного поля E_2^0 ;

б) коефіцієнти інтенсивності напружень $K_{3,1}^{\pm}$ і електричної індукції K_D^{\pm} дорівнюють нулю.

3. Для пружного абсолютно електропровідного включення:

а) числові значення коефіцієнта $K_{3,1}^{\pm}$ збігаються з відповідними значеннями для випадку пружного включення у суто пружному середовищі [9] і не залежать від зовнішнього навантаження σ_{13}^0 , від зовнішнього електричного поля E_1^0 , E_2^0 , від п'єзоелектричної сталої і діелектричної проникності простору;

б) значення коефіцієнта K_D^{\pm} не залежать від зовнішнього навантаження σ_{13}^0 , від зовнішнього електричного поля E_1^0 , E_2^0 і діелектричної проникності простору;

в) значення коефіцієнтів $K_{3,2}^{\pm}$ і K_E^{\pm} не залежать від механічного навантаження σ_{23}^0 і зовнішнього електричного поля E_2^0 ;

г) модуль відносної різниці Δ між значеннями коефіцієнта $K_{3,2}^{-0}$ (коефіцієнта K_E^{-0}) у випадку практично прямокутного включення і у випадку еліптичного включення зменшується при зростанні k від 96% при $k = 0.001$ до 0.7% при $k = 1000$.

1. *Фильштинский Л.А.* Моделирование физических полей в кусочно-однородных деформируемых телах. Сумы, 2001.
2. *Li X.-F., Lee K.Y.* Effects of electric field on crack growth for a penny-shaped dielectric crack in a piezoelectric layer // J. Mech. Phys. Solids. 2004. Vol. 52. № 9. P. 2079–2100.
3. *Li R., Kardomateas G. A.* The Mode III Interface Crack in Piezo-Electro-Magneto-Elastic Dissimilar Bimaterials // J. Appl. Mech. 2006. Vol. 73. № 2. P. 220–227.
4. *Kwon S.M., Lee K.Y.* Analysis of stress and electric fields in a rectangular piezoelectric body with a center crack under anti-plane shear loading // Int. J. Solids Structures. 2000. Vol. 37. № 35. P. 4859–4869.
5. *Li S.* On global energy release rate of a permeable crack in a piezoelectric ceramic // J. Appl. Mech. 2003. Vol. 70. № 2. P. 246–252.
6. *Zhang T.-Y., Tong P.* Fracture mechanics for mode III crack in a piezoelectric material // Int. J. Solids Structures. 1996. Vol. 33. № 3. P. 343–359.
7. *Hou P.-F., Leung A.Y.T.* A spheroidal inclusion in an infinite magneto-electro-elastic material // Int. J. Eng. Sci. 2004. Vol. 42. № 11–12. P. 1255–1273.
8. *Wang X., Zhong Z. A.* conducting arc crack between a circular piezoelectric inclusion and an unbounded matrix // Int. J. Solids Structures. 2002. Vol. 39. № 24. P. 5895–5911.
9. *Божидарник В.В.* Двовимірні задачі теорії пружності й термopружності структурно-неоднорідних тіл. Львів, 1998.
10. *Сулим Г. Т.* Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 309–318.
11. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М., 1986.
12. *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* Элементы теории пластичности та міцності. Львів, 1999.
13. *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* Элементы теории пружности. Львів, 1994.

ANTI-PLANE PROBLEM FOR A THIN ELASTIC INCLUSION IN A PIEZOELECTRIC MEDIUM

Georgiy Sulym¹, Roman Rabosh²

¹*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

²*Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NASU
Naukova Str., 3-b 79060 Lviv, Ukraine*

The static anti-plane problem for a thin elastic inclusion in a piezoelectric medium is considered. As a solution procedure the method of discontinuities functions was used. This method is based on modelling the inclusion by discontinuities of displacement and stress vectors. The problem was reduced to the system of two singular integral equations, which was solved using collocation method.

Expressions for generalized stress intensity factors, electric field intensity factor and electric displacement intensity factor are obtained in the cases of elastic inclusion, crack and absolutely rigid inclusion. Numerical results illustrate the influence of the shape of elastic inclusion and piezoelectric properties of the medium on intensity factors.

Key words: piezoelectric space, elastic inclusion, stress-strain state, stress intensity factors, electric displacement intensity factor, electric field intensity factor.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.2007

Прийнята до друку 19.11.2008