ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 69. С. 227–234 *Ser. Mech.-Mat. 2008. Vol. 69. P. 227–234*

УДК 539.377

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У КОМПОЗИТНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ПРИ ЛОКАЛЬНОМУ НАГРІВІ

Уляна ЖИДИК

Національний університет “Львівська політехніка”,
вул. Ст. Бандери 12 79013 Львів, Україна

Досліджено температурні поля і напруження у циліндричних оболонках із композитних матеріалів. Для дослідження використали модель неоднорідних анізотропних оболонок, яка не накладає жодних обмежень на фізико-механічні характеристики анізотропного матеріалу.

Ключові слова: оболонка, анізотропний, композитний, температура, термопружність.

Дослідження температурних задач теорії оболонок здебільшого проводили для однорідних оболонок із ізотропного або слабо анізотропного матеріалів [4,5,7]. Використання композитних матеріалів із високою анізотропією трансверсальних фізико-механічних характеристик вимагає використання розширених моделей розрахунку оболонок [1,2].

Мета нашої праці – дослідити температурні поля і напруження у циліндричних оболонках із композитних матеріалів. Для дослідження використали модель неоднорідних анізотропних оболонок [2], яка не накладає жодних обмежень на фізико-механічні характеристики анізотропного матеріалу.

Вихідні рівняння термопружності. Розглянемо неоднорідну анізотропну кругову циліндричну оболонку сталої товщини $2h$. Точки простору оболонки віднесемо до ортогональної системи координат x,θ,z, де x – осьова; θ – кругова; z – радіальна координати. Початок координат помістимо у середній поверхні з радіусом R. Цим координатам надалі відповідатимуть індекси 1,2,3, а кома перед індексами 1,2 позначатиме частинні похідні за аргументами x і θ відповідно.

Нехай оболонка перебуває під дією зовнішнього силового навантаження, а також нагрівається джерелами тепла і зовнішнім середовищем шляхом конвективного теплообміну. Термопружну поведінку такої оболонки дослідимо на підставі рівнянь, які одержимо з загальних рівнянь термопружності і теплопровідності неоднорідних оболонок [2] без урахування дифузійних процесів, початкових деформацій та термомеханічної взаємодії.

Тоді компоненти деформації e_{ij} довільної точки оболонки через компоненти деформації середньої поверхні ε_{ij}, κ_{ij} набудуть вигляду

$$e_{11} = \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, \ \ e_{13} = \varepsilon_{13} + z\kappa_{13}, \ \ e_{33} = \varepsilon_{33},$$

$$e_{22} = (\varepsilon_{22} + z\kappa_{22}) \Big/ \left(1 + \frac{z}{R}\right), \; e_{23} = (\varepsilon_{23} + z\kappa_{23}) \Big/ \left(1 + \frac{x}{R}\right), \qquad (1)$$
$$e_{12} = \left(\varepsilon_{12} + z\kappa_{12} + z^2\omega_{12}\right) \Big/ \left(1 + \frac{z}{R}\right),$$

де компоненти деформації середньої поверхні через узагальнені переміщення u_i, γ_i виражаються формулами

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \; \varepsilon_{22} = \left(u_3 + u_{2,2}\right) \big/ R, \; \varepsilon_{33} = \gamma_3, \; \omega_{12} = \gamma_{2,1} \big/ R,$$
$$\varepsilon_{12} = u_{1,2} \big/ R + u_{2,1}, \; \varepsilon_{23} = \gamma_2 + \left(u_{3,2} - u_2\right) \big/ R, \; \varepsilon_{13} = \gamma_1 + u_{3,1}, \qquad (2)$$
$$\kappa_{11} = \gamma_{1,1}, \; \kappa_{12} = \gamma_{2,1} + \gamma_{1,2} \big/ R + u_{2,1} \big/ R, \; \kappa_{13} = \gamma_{3,1},$$
$$\kappa_{22} = \left(\gamma_3 + \gamma_{2,2}\right) \big/ R, \; \kappa_{23} = \gamma_{3,2} \big/ R.$$

Співвідношення між напруженнями і деформаціями для випадку анізотропного матеріалу з однією площиною пружної і теплової симетрії запишемо у скороченому вигляді [3]

$$\sigma_{ij} = c_{ij} e_{ij} - \beta_{ij}^t. \qquad (3)$$

Тут $c_{ij}\left(x, \theta, z\right)$ – пружні сталі; $\beta_{ij}^t\left(x, \theta, z\right) = c_{ij}\alpha_{ij}^t$ – коефіцієнти термопруж-ності; $\alpha_{ij}^t\left(x, \theta, z\right)$ – коефіцієнти теплового лінійного розширення.

Рівняння пружності для зусиль і моментів середньої поверхні оболонки запишемо їх у матричному вигляді

$$N = A\,\mathrm{E} + B\,\mathrm{K} - N^t,$$
$$M = B^*\,\mathrm{E} + D\,\mathrm{K} - M^t, \qquad (4)$$
$$Q = kG\,\Psi,$$

де N, M, Q і E, K, Ψ – матриці-стовпчики відповідно зусиль-моментів і компонентів деформації середньої поверхні оболонки; k – коефіцієнт зсуву [6]. Матриці жорсткості A, B, B^*, D, G і матриці температурних членів N^t, M^t мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11}/R & A_{12} & A_{13} + B_{13}/R & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} - B_{22}/R & A_{23} & A_{26} - B_{26}/R \\ A_{13} + B_{13}/R & A_{23} & A_{33} + B_{33}/R & A_{36} \\ A_{16} + B_{16}/R & A_{26} & A_{36} + B_{36}/R & A_{66} \\ A_{16} & A_{26} - B_{26}/R & A_{36} & A_{66} - B_{66}/R \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} + D_{11}/R & B_{12} & B_{16} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} - D_{22}/R & B_{26} - D_{26}/R & D_{26} \\ B_{13} + D_{13}/R & B_{23} & B_{36} & D_{36} \\ B_{16} + D_{16}/R & B_{26} & B_{66} & D_{66} \\ B_{16} & B_{26} - D_{26}/R & B_{66} - D_{66}/R & D_{66} \end{pmatrix};$$

$$B^* = \begin{pmatrix} B_{11} + D_{11}/R & B_{12} & B_{13} + D_{13}/R & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} - D_{22}/R & B_{23} & B_{26} - D_{26}/R \\ B_{16} + D_{16}/R & B_{26} & B_{36} + D_{36}/R & B_{66} \\ B_{16} & B_{26} - D_{26}/R & B_{36} & B_{66} - D_{66}/R \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} A_{44} + B_{44}/R & A_{45} & B_{44} + D_{44}/R & B_{45} \\ A_{45} & A_{55} - B_{55}/R & B_{45} & B_{55} - D_{55}/R \\ B_{44} + D_{44}/R & B_{45} & D_{44} & D_{45} \\ B_{45} & B_{55} - D_{55}/R & D_{45} & D_{55} \end{pmatrix};$$

$$N^t = \left[N_{11}^t + M_{11}^t/R \quad N_{22}^t \quad N_{33}^t + M_3^t/R \quad N_{12}^t + M_{12}^t/R \quad N_{12}^t \right]^T;$$

$$M_t = \left[M_{11}^t + L_{11}^t/R \quad M_{22}^t \quad M_{12}^t + L_{12}^t/R \quad M_{12}^t \right]^T,$$

де

$$N_{ij}^t = A_{ij}^t T_1 + B_{ij}^t T_2/h; \; M_{ij}^t = B_{ij}^t T_1 + D_{ij}^t T_2/h; \; L_{ij}^t = D_{ij}^t T_1;$$

$$\{A_{ii}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-h}^{h} c_{ij} \{1, z, z^2\} dz; \{A_{ij}^t, B_{ij}^t, D_{ij}^t\} = \int_{-h}^{h} \beta_{ij}^t \{1, z, z^2\} dz .$$

Рівняння руху:

$$\begin{gathered} N_{11,1} + N_{21,2}/R + q_1 = I_\rho \ddot{u}_1 + J_\rho \ddot{\gamma}_1, \\ N_{12,1} + N_{22,2}/R + N_{23}/R + q_2 = I_\rho \ddot{u}_2 + J_\rho \ddot{\gamma}_2, \\ N_{13,1} + N_{23,2}/R - N_{22}/R + q_3 = I_\rho \ddot{u}_3 + J_\rho \ddot{\gamma}_3, \\ M_{11,1} + M_{21,2}/R - N_{13} + m_1 = J_\rho \ddot{u}_1 + K_\rho \ddot{\gamma}_1, \\ M_{12,1} + M_{22,2}/R - N_{23} + m_2 = J_\rho \ddot{u}_2 + K_\rho \ddot{\gamma}_2, \end{gathered} \tag{5}$$

$$M_{13,1} + M_{23,2}/R - M_{22}/R - N_{33} + m_3 = J_\rho \ddot{u}_3 + K_\rho \ddot{\gamma}_3 .$$

Тут $\{I_\rho, J_\rho, K_\rho\} = \int_{-h}^{h} \rho\left(1 + z/R\right)\{1, z, z^2\}dz$; ρ– густина матеріалу; крапкою над функцією позначено операцію диференціювання за часом.

Для однозначності розв'язку системи (5) треба задати граничні умови. На кінцях оболонки $x = 0$ і $x = l$ необхідно задати по одній величині з кожної наступної пари $\{N_{11}, u_1\}$, $\{N_{12}, u_2\}$, $\{N_{13}, u_3\}$, $\{M_{11}, \gamma_1\}$, $\{M_{12}, \gamma_2\}$. У початковий момент часу $\tau = 0$ повинні бути задані значення узагальнених переміщень і швидкостей.

Підставляючи рівняння пружності (4) у рівняння руху (5) і враховуючи кінематичні співвідношення (2), одержимо систему рівнянь руху в переміщеннях, яку запишемо в операторній формі

$$L_{sp} y_p = b_s \quad (s, p = 1, 2, \ldots, 6) , \tag{6}$$

де $y_j = u_j$, $y_{3+j} = \gamma_j$ $(j = 1, 2, 3)$; L_{sp} – симетричні диференціальні операто-ри, які легко визначаються. Вільні члени b_s виражаються через температурні характеристики T_1, T_2 і поверхневі навантаження q_j, m_j .

Система рівнянь (6) разом з граничними та початковими умовами становить динамічну крайову задачу термопружності для неоднорідних анізотропних циліндричних оболонок у переміщеннях. За відомими переміщеннями визначаємо деформації зі співвідношень (2), а зусилля і моменти за рівняннями стану (4). Термонапруження в оболонці знаходимо за формулами (3).

Рівняння теплопровідності. Інтегральні характеристики температури, що входять у вільні члени системи (6), треба визначити з відповідних рівнянь теплопровідності при крайових умовах, заданих на поверхнях та на кінцях оболонки. У випадку конвективного теплообміну на поверхнях оболонки рівняння теплопровідності при лінійному законі розподілу температури по товщині, запишемо у вигляді

$$P_{(1)}^2 T_1 + P_{(2)}^2 T_2 + \lambda_{(1)}^{33} T_2/(Rh) - C_{(1)}\dot{T}_1 - C_{(2)}\dot{T}_2 = F_{(1)} ,$$
$$P_{(2)}^2 T_1 + P_{(3)}^2 T_2 - \lambda_{(1)}^{33} T_2/h^2 + \lambda_{(2)}^{33} T_2/(Rh) - C_{(2)}\dot{T}_1 - C_{(3)}\dot{T}_2 = F_{(2)} . \tag{7}$$

Тут введено позначення

$$P_{(k)}^2 = \lambda_{(k)}^{11}(\ldots)_{,11} + \lambda_{(k)}^{22}(\ldots)_{,22}/R^2 + 2\lambda_{(k)}^{12}(\ldots)_{,12}/R \quad (k = 1, 2, 3)$$
$$F_{(n)} = (T_1 - t_1^c)\,\varepsilon_n^t + (T_2 - t_2^c)\,\varepsilon_{3-n}^t - W_n^t \quad (n = 1, 2)$$
$$\left\{C_{(k)}, \lambda_{(k)}^{ij}\right\} = \int_{-h}^{h} \left\{c, \lambda^{ij}\right\}\left(\frac{z}{h}\right)^{k-1} dz \quad (k = 1, 2, 3)$$
$$\varepsilon_n^t = \left(\alpha_3^+ - (-1)\alpha_3^-\right); \; t_n^c = \frac{1}{2}\left(t_c^+ - (-1)^n\, t_c^-\right) \; (n = 1, 2)$$

W_1^t, W_2^t – інтегральні характеристики джерел тепла; λ^{ij} – коефіцієнти теплопровідності; t_c^+, t_c^- – температура навколишнього середовища на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки; α^+, α^- – коефіцієнти тепловіддачі з цих поверхонь; c – теплоємність.

Антисиметрична шарувата оболонка з перехресним армуванням. Розглянемо оболонку, складену з парного числа ортотропних шарів з однаковою товщиною і властивостями, матеріальні осі яких орієнтовані почергово під кутами 0 і 90^o до осі оболонки (структура з поперечним армуванням). Такі оболонки належать до антисиметричних конструкцій з перехресним армуванням. Легко показати, що в цьому випадку коефіцієнти, які входять до системи (6), приймуть такі значення:

$$A_{11} = A_{22},\ A_{13} = A_{23},\ A_{44} = A_{55},\ A_{16} = A_{26} = A_{36} = A_{45} = 0,$$

$$B_{11} = -B_{22},\ B_{13} = -B_{23},\ B_{44} = -B_{55},\ B_{12} = B_{16} = B_{26} = B_{36} = B_{66} = B_{45} = 0\,,$$

$$D_{11} = D_{22},\ D_{44} = D_{55},\ D_{16} = D_{26} = D_{45} = 0\,,$$

$$A_{11}^t = A_{22}^t,\ B_{11}^t = -B_{22}^t,\ D_{11}^t = D_{22}^t,$$

$$A_{12}^t = B_{12}^t = B_{33}^t = D_{12}^t = \lambda_{(k)}^{12} = \lambda_{(2)}^{33} = C_{(2)} = 0\,.$$

Нехай краї оболонки шарнірно оперті і підтримуються за нульової температури. Тоді при $x = 0$ і $x = l$ повинні виконуватися умови

$$u_3 = u_2 = 0;\ \gamma_3 = \gamma_2 = 0;\ N_{11} = M_{11} = 0;\ T_1 = T_2 = 0\,. \qquad (8)$$

У початковий момент часу температура оболонки дорівнює нулю. Починаючи з часу $\tau = 0$, зовнішня поверхня $z = h$ нагрівається по прямокутній області зовнішнім середовищем, температура якого задана функцією

$$\begin{aligned} t_c^+\left(x,\theta,\tau\right) &= t^*\left[S_-(x - x_0 + d) - S_+(x - x_0 - d)\right]\times \\ &\times\left[S_-(\theta - \theta_0 + \eta) - S_+(\theta - \theta_0 - \eta)\right]\left[q_0 + \varepsilon\exp(-\omega\tau)\right], \end{aligned} \qquad (9)$$

де $t^*, q_0, \varepsilon, \omega$ – сталі величини; x_0 і θ_0 – відповідно осьова і колова координати середини зони нагріву; $2d$ – її ширина; 2η – кут розхилу зони нагріву;

$$S_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases};\quad S_-(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}\ \text{– одиничні функції.}$$

Внутрішня поверхня $z = -h$ оболонки омивається середовищем з нульовою температурою, $t_c^- = 0$. Коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь оболонки приймаємо такими, що дорівнюють $\alpha_t^+ = \alpha_t^- = \alpha_n$. Інерційних і поверхневих сил, а також джерел тепла немає.

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (6) і (7) з урахуванням температурного навантаження (9) знаходимо методом інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа відповідно до граничних умов (8).

За відомими переміщеннями і температурними характеристиками згідно з формулами (1) – (3) визначаємо компоненти термонапруженого стану оболонки.

Числові результати наведено для шаруватої ортотропної циліндричної оболонки, нагрітої по прямокутній області навколишнім середовищем (9) при $t^* - const\,; \varepsilon = 0;\ q_0 = 1;\ x_0 = \dfrac{l}{2};\ d = \dfrac{l}{4};\ \theta_0 = \dfrac{\pi}{2};\ \eta = \dfrac{\pi}{4}$.

Розміри оболонки прийнято такими: $l = 3R\,;\ h = 0.05R$, а коефіцієнт зсуву $k = \dfrac{5}{6}$ [6]. За матеріал оболонки взято високомодульний графітоепоксид, для якого характерні такі фізико-механічні властивості: $\nu_{12} = 0.25;\ \nu_{23} = 0.33;$

$$\nu_{13} = 0.25; E_1 = 20E_2\,; G_{12} = 0.5E_2\,; G_{23} = 0.2E_2\,;$$
$$\lambda_1 = 2\lambda_2\,;\ \alpha_1^t = 2\alpha_2^t;\ Bi = h\alpha_3^+ \big/ \lambda_{33} = 1\,.$$

Введемо безрозмірні величини

$$x' = x\big/ l\ ;\ N_1' = N_{11}\big/\left(t^* E_1 h \alpha_t^t\right)\,;\ N_2' = N_{22}\big/\left(t^* E_1 h \alpha_t^t\right)\,.$$

На рис. 1, 2 показано розподіл безрозмірних нормального N_1' і колового N_2' зусиль вздовж твірної $\left(0.5 \le x' \ge 1\right)$. Для заданих параметрів характер поведінки зусиль для оболонок з різною кількістю шарів і однорідної оболонки якісно подібний, але відрізняється величиною. Зміна зусиль має коливний характер. При переході від нагрітої зони до не нагрітої вони міняють знак. Колове зусилля знак міняє більше разів, ніж зусилля нормальне.

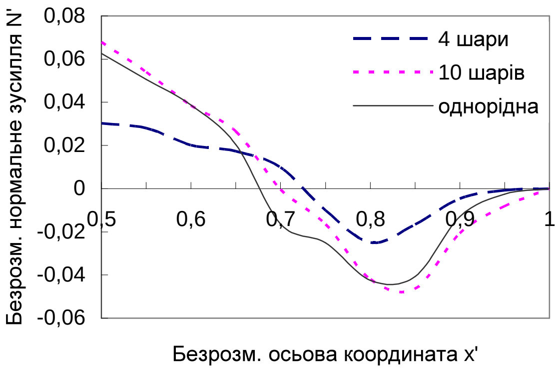

Рис. 1

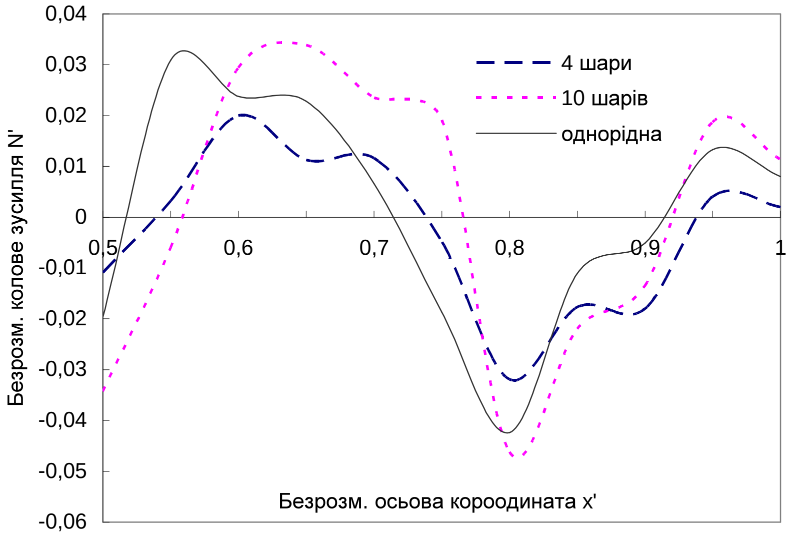

Рис. 2

---

1. *Василенко А. Т., Голуб Г. П., Григоренко Я. М.* К определению температурных напряжений в слоистых анизотропных оболочках по уточненной теории // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 4. – С. 327–330.
2. *Жидик У. В*. Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анізотропних оболонок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 72–75.
3. *Новацкий В*. Вопросы термоупругости. – М., 1962.
4. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – К., 1978.
5. *Huang C. L., Woo H. K.* Thermal stresses and displacements induced in a finite orthotropic cylindrical thin shells by an instantaneous thermal shock // J. Thermal Stresses. – 1980. – 3, No. 2 – P. 277–293.
6. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates // J. Appl. Mech. – 1945. – 12. – P. 426–446.
7. *Shirakawa K.* Dynamic response of on orthotropic cylindrical shell to rapid heating // J. Sound and Vibr. – 1982. – 83, No. 1 – P. 27–35.

THERMAL STRESSES OF COMPOSITE CYLINDRICAL SHELLS UNDER LOCAL HEATING

Ulyana Zhydyk

Lviv Polytechnic National University
12 St. Bandera St., 79013 Lviv, Ukraine

For heterogeneous anisotropic shells the non-stationary equations thermoelasticity and heat conduction equations are proposed. The solution to quasistatic problems for a freely supported finite composite cylindrical shell is obtained.

Key words: shell, anisotropic, composite, temperature, thermoelasticity.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.2007
Прийнята до друку 19.11.2008