ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 69. С. 256–261 *Ser. Mech-Mat. 2008. Vol. 69. P. 256–261*

УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНЕ ОСЕСИМЕТРИЧНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ШАРУВАТОМУ ПІВПРОСТОРІ, ЗУМОВЛЕНЕ ІМПУЛЬСНИМ НАГРІВАННЯМ

Ольга ТУРЧИН[1], **Ігор ТУРЧИН**[2]

[1]*Національний лісотехнічний університет України, вул. Генерала Чупринки, 103 79057 Львів, Україна*
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

З використанням методу поліномів Лагерра та інтегрального перетворення Ганкеля одержано аналітичний розв'язок плоскої нестаціонарної задачі теплопровідності для багатошарового півпростору при імпульсному осесиметричному нагріванні.

Ключові слова: нестаціонарна теплопровідність, шаруваті тіла, перетворення Ганкеля, поліноми Лагерра.

Дослідження нестаціонарного процесу теплопровідності в неоднорідних тілах і фізико-механічних явищ, що його супроводжують, є актуальним у зв'язку з багатьма проблемами сучасних технологічних завдань [1]. В сучасній літературі практично немає аналітичних підходів, що дають змогу вирішити сформульовану задачу та одержати достовірні числові результати для довільної кількості складових композитного тіла, їхніх фізико-механічних властивостей та виду теплового навантаження. Мета нашої праці - на основі методу інтегрального перетворення Лагерра [2] розробити методику побудови розв'язку нестаціонарних двовимірних задач теплопровідності для плоско-шаруватих композитів, які перебувають в умовах імпульсного температурного навантаження.

Розглянемо композит, віднесений до циліндричної системи координат r,z $(0 \le r < \infty;\ 0 \le z < \infty)$, що складається з M шарів різної товщини та з різними фізико-механічними властивостями (елемент з номером M - півпростір). У момент часу $t = 0$ на його граничній поверхні починає діяти імпульсне осесиметричне джерело тепла інтенсивності $q^*(r,t)$. Вважаючи, що початкова температура композита дорівнює нулю, температурне поле в ньому визначимо розв'язком початково-крайової задачі, яка в безрозмірних змінних ρ,γ,τ набуде вигляду:

$$\partial^2_{\rho\rho} T^{(i)} + \rho^{-1}\partial_\rho T^{(i)} + \partial^2_{\gamma\gamma} T^{(i)} = a_i^{-1}\partial_\tau T^{(i)},\ i = \overline{1,M}\,; \tag{1}$$

$$T^{(i)} = 0, \tau = 0,\ i = \overline{1,M}\,; \tag{2}$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_\gamma T^{(1)} = -q^*(\rho,\tau),\ \gamma = 0;\ \ \partial_\gamma T^{(M)} = T^{(M)} = 0,\ \gamma \to \infty; \tag{3}$$

$$T^{(i)} = T^{(i+1)},\ \ \tilde{\lambda}_T^{(i)} \partial_\gamma T^{(i)} = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} \partial_\gamma T^{(i+1)},\ \ \gamma = \gamma_i,\ \ i = \overline{1, M-1}, \tag{4}$$

де $\rho = r/d$, $\gamma = z/d$, $\tau = a_0 t/d^2$, $\tilde{a}_i = a_i/a_0$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)}/\lambda_T^{(0)}$, $\gamma_i = \sum\limits_{k=1}^{i} \tilde{h}_i$,

$\tilde{h}_i = h_i/d$, $\lambda_T^{(i)}, a_i$ - відповідно, коефіцієнти тепло- і температуропровідності, h_i - товщина i - го шару, $\lambda_T^{(0)}, a_o$, d – деякі розмірні величини, які визначають з міркувань зручності проведення числового аналізу.

Застосовуючи до рівнянь (1), крайових умов (3) та умов спряження (4) інтегральне перетворення Ганкеля-Лагерра, після врахування початкових умов (2) одержимо трикутну послідовність крайових задач

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \omega_i^2 \bar{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m^{(i)},\ \ i = \overline{1, M}, \tag{5}$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)} d_\gamma \bar{T}_n^{(1)} \Big|_{\gamma=0} = -\bar{q}_n(\xi),\ \bar{T}_n^{(M)} \Big|_{\gamma\to\infty} = 0, \tag{6}$$

$$\bar{T}_n^{(i)} = \bar{T}_n^{(i+1)};\ \ \tilde{\lambda}_T^{(i)} d_\gamma \bar{T}_n^{(i)} = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} d_\gamma \bar{T}_n^{(i+1)},\ \ \gamma = \gamma_i,\ \ i = \overline{1, M-1}. \tag{7}$$

У формулах (5)-(7) $\bar{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma) = \int\limits_0^\infty \rho \left[\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau} T^{(i)}(\rho,\gamma,\tau) L_n(\lambda\tau) d\tau \right] J_0(\rho\xi) d\rho$, $n = 0,1,2,\ldots$ - зображення за Лагерром і Ганкелем, $L_n(\cdot)$ -поліноми Лагерра, $\omega_i^2 = \xi^2 + \beta_i$, $\beta_i = \lambda/\tilde{a}_i$, λ - масштабний множник.

Загальний розв'язок трикутної послідовності (5) згідно з результатами праці [2] подамо у вигляді алгебричної згортки

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma) = \sum_{j=0}^{n} \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi,\gamma) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi,\gamma) \right],\ i = \overline{1, M},\ n = 0,1,2,\ldots, \tag{8}$$

де $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$ та $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$ - довільні функції параметра перетворення ξ.

Безпосередня підстановка подання (8) у послідовності (5) після групування доданків біля довільних $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$ та $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$ дасть послідовність рівнянь

$$\sum_{j=0}^{n} A_{n-j}^{(i)}(\xi) \left[d_{\gamma\gamma}^2 G_j^{(i)}(\xi,\gamma) - \omega_i^2 G_j^{(i)}(\xi,\gamma) - \beta_i \sum_{k=0}^{j-1} G_k^{(i)}(\xi,\gamma) \right] +$$
$$+ \sum_{j=0}^{n} B_{n-j}^{(i)}(\xi) \left[d_{\gamma\gamma}^2 W_j^{(i)}(\xi,\gamma) - \omega_i^2 W_j^{(i)}(\xi,\gamma) - \beta_i \sum_{k=0}^{j-1} W_k^{(i)}(\xi,\gamma) \right] = 0,\ n = 0,1,2,\ldots$$

Внаслідок довільності $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$ та $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$ з останньої послідовності одержимо, що $G_j^{(i)}(\xi,\gamma)$ та $W_j^{(i)}(\xi,\gamma)$ є лінійно незалежними розв'язками трикутної послідовності звичайних алгебричних рівнянь

$$d_{\gamma\gamma}^2 G_j^{(i)}(\xi,\gamma) - \omega_i^2 G_j^{(i)}(\xi,\gamma) = \beta_i \sum_{k=0}^{j-1} G_k^{(i)}(\xi,\gamma) \tag{9}$$

$$d_{\gamma\gamma}^2 W_j^{(i)}(\xi,\gamma) - \omega_i^2 W_j^{(i)}(\xi,\gamma) = \beta_i \sum_{k=0}^{j-1} W_k^{(i)}(\xi,\gamma). \tag{10}$$

Враховуючи структуру послідовностей (9), (10) і незалежність їхніх фундаментальних розв'язків, подамо їх з використанням методу невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$G_j(\gamma,\omega_i) = \exp(-\omega_i\gamma)\sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^i \frac{(\omega_i\gamma)^k}{k!};\ W_j(\gamma,\omega_i) = \exp(\omega_i\gamma)\sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^i \frac{(-\omega_i\gamma)^k}{k!}. \tag{11}$$

Безпосередня підстановка розв'язків (11) в рівняння (9), (10) приводить до рекурентних співвідношень

$$a_{j,k+1}^i = 0.5\left(a_{j,k+2}^i - \frac{\beta_i}{\omega_i^2}\sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^i\right).$$

За відомих $G_j^{(i)}(\xi,\gamma)$ та $W_j^{(i)}(\xi,\gamma)$ довільні $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$ та $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$ одержимо задовольняючи крайові умови, умови спряження шарів та умови на безмежності. В результаті прийдемо до трикутної послідовності лінійних рівнянь

$$[b_{k,l}]\left\{A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, \dots, A_n^{(l)}, B_n^{(l)}, \dots, A_n^{(M)}\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{c_n^k\right\},\ B_n^{(M)} \equiv 0, n = 0,1,2,\dots. \tag{12}$$

У системах (12), внаслідок ідентичності умов спряження, структура матриці $[b_{k,l}]$ має вигляд

$$\begin{pmatrix}
b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & & & & \cdots & & \\
b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & 0 & & \cdots & & \\
b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & 0 & & \cdots & & \\
 & & & & & & \cdots & & \\
0 & \cdots & 0 & b_{2i,2i-1} & b_{2i,2i} & b_{2i,2i+1} & b_{2i,2i+2} & 0 & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & b_{2i+1,2i} & b_{2i+1,2i+1} & b_{2i+1,2i+2} & b_{2i+1,2i+2} & 0 & \cdots \\
 & & & & & & \cdots & & \\
0 & & & \cdots & & 0 & b_{2M-2,2M-3} & b_{2M-2,2M-2} & b_{2M-2,2M-1} \\
0 & & & \cdots & & 0 & b_{2M-1,2M-3} & b_{2M-1,2M-2} & b_{2M-1,2M-1}
\end{pmatrix}$$

Коефіцієнти $b_{k,l}$ не залежать від n і набувають вигляду:

$$b_{1,1} = -\omega_1\,;\; b_{1,2} = \omega_1\,;\; b_{2i,2i-1} = e^{-\omega_i\gamma_i}\,;\;\; b_{2i,2i} = e^{\omega_i\gamma_i};\;\; b_{2i,2i+1} = -e^{-\omega_{i+1}\gamma_i}\,;$$

$$b_{2i,2i+2} = -e^{\omega_{i+1}\gamma_i}\,;\; b_{2i+1,2i-1} = -\tilde{\lambda}_T^{(i)}\omega_i e^{-\omega_i\gamma_i}\,;\;\; b_{2i+1,2i} = \tilde{\lambda}_T^{(i)}\omega_i e^{\omega_i\gamma_i};$$

$$b_{2i+1,2i+1} = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\omega_i e^{-\omega_{i+1}\gamma_i};\; b_{2i+1,2i+2} = -\tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\omega_{i+1} e^{\omega_{i+1}\gamma_i};\;\; i = \overline{1, M-1}.$$

Стовпець вільних членів c_n^k складається з комбінації $\bar{q}_n(\xi)$ і невідомих $A_m^{(i)}$, $B_m^{(i)}$, $m = \overline{0, n-1}$, одержаних при попередніх значеннях n .

Шляхом елементарних перетворень систему (12) можна звести до трикутного вигляду

$$\begin{pmatrix} b_{1,1}^* & b_{1,2}^* & 0 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & b_{2i-1,2i-1}^* & b_{2i-1,2i}^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{2i,2i}^* & b_{2i,2i+1}^* & b_{2i,2i+2}^* & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & b_{2i+1,2i+1}^* & b_{2i+1,2i+2}^* & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & 0 & b_{2M-1,2M-1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^1 \\ \vdots \\ A_n^{(i)} \\ B_n^{(i)} \\ \vdots \\ A_n^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n,1}^* \\ c_{n,2}^* \\ \vdots \\ c_{n,2i}^* \\ c_{n,2i+1}^* \\ \vdots \\ c_{n,2M-1}^* \end{pmatrix}, \tag{13}$$

де

$$b_{1,1}^* = -\omega_1\,;\; b_{1,2}^* = \omega_1;\;\; b_{2i,2i}^* = 2\tilde{\lambda}_T^{(i)}\omega_i \exp(\omega_i\gamma_i),\; i = \overline{1, M-1};$$

$$b_{2i,2i+1}^* = \exp(-\omega_{i+1}\gamma_i)\left(\tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\omega_{i+1} - \tilde{\lambda}_T^{(i)}\omega_i\right),\; i = \overline{1, M-1}\,;$$

$$b_{2i,2i+2}^* = -\exp(\omega_{i+1}\gamma_i)\left(\tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\omega_{i+1} + \tilde{\lambda}_T^{(i)}\omega_i\right),\; i = \overline{1, M-2};$$

$$\begin{aligned} b_{2i+1,2i+1}^* = \exp(-\omega_{i+1}\gamma_i)\, \Big[&\exp(-\omega_i\gamma_i)\left(\tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\omega_{i+1} - \tilde{\lambda}_T^{(i)}\omega_i\right)b_{2i-1,2i}^* - \\ &-\exp(\omega_i\gamma_i)\left(\tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\omega_{i+1} + \tilde{\lambda}_T^{(i)}\omega_i\right)b_{2i-1,2i-1}^*\Big],\; i = \overline{1, M-1}\,; \\ b_{2i+1,2i+2}^* = -\exp(\omega_{i+1}\gamma_i)\, \Big[&\exp(-\omega_i\gamma_i)\left(\tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\omega_{i+1} + \tilde{\lambda}_T^{(i)}\omega_i\right)b_{2i-1,2i}^* - \\ &-\exp(\omega_i\gamma_i)\left(\tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\omega_{i+1} - \tilde{\lambda}_T^{(i)}\omega_i\right)b_{2i-1,2i-1}^*\Big],\; i = \overline{1, M-2}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

З трикутної системи алгебричних (13), використовуючи «зворотний хід» і вигляд коефіцієнтів $b_{i,j}^*$, одержимо її рекурентний розв'язок для довільного значення M

$$A_n^{(M)} = \frac{c_{n,2M-1}^*}{b_{2M-1,2M-1}^*}; \quad B_n^{(i)} = \frac{1}{b_{2i,2i}^*}\left(c_{n,2i}^* - B_n^{(i+1)} b_{2i,\,2i+2}^* - A_n^{(i+1)} b_{2i,\,2i+1}^*\right);$$
$$A_n^{(i)} = \frac{1}{b_{2i-1,\,2i-1}^*}\left(c_{n,\,2i-1}^* - B_n^{(i)} b_{2i-1,\,2i}^*\right),\ i = \overline{M-1,\,1}\,. \tag{15}$$

Знайшовши всі $A_n^{(i)}$ і $B_n^{(i)}$, а отже, за формулою (8) і $\bar{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma)$, розв'язок задачі (1)-(4) остаточно подамо у вигляді

$$T^{(i)}(\rho,\gamma,\tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^{\infty} \xi \bar{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma) J_0(\xi\rho) d\xi\right] L_n(\lambda\tau)\,. \tag{16}$$

Числовий аналіз проводили для півпростору з властивостями алюмінієвого стопа [4] ($a_2 = 11{,}9 \times 10^{-6}\,\text{м}^2/c$, $\lambda_T^{(2)} = 36\,\text{Вт}/(\text{м}\cdot K)$) та покриття виготовленого з кераміки [4] ($a_1 = 90{,}6 \times 10^{-6}\,\text{м}^2/c$, $\lambda_T^{(1)} = 222\ \text{Вт}/(\text{м}\cdot K)$).

Теплове навантаження границі композита було задано співвідношенням

$$q^*(\rho,\tau) = q^* S_+(1-\rho)(1-\rho^2)^2 S_+(2-\tau)((\tau-1)^2-1)^2\,,$$

де q^* - деяка розмірна величина; $S_+(g)$ - асиметрична функція Хевісайда . За d було взято радіус ділянки нагрівання і прийнято $h_1 = 0{,}5$.

На рис. 1 показано результати обчислення безрозмірного температурного поля $T^* = T^{(i)} d / q^*$ вздовж осі γ при $\alpha = 1$ в різні моменти безрозмірного часу, а на рис. 2 залежність безрозмірної температури в різних точках поверхні поділу матеріалів композита від часової змінної.

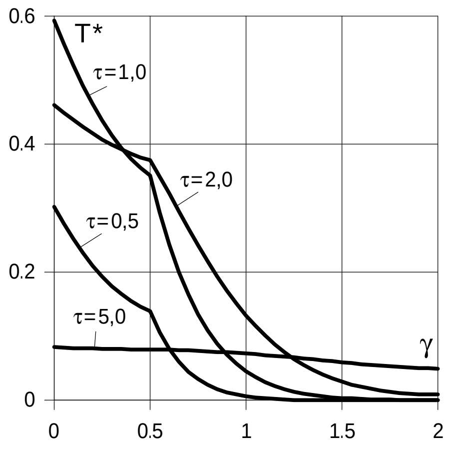

Рис. 1

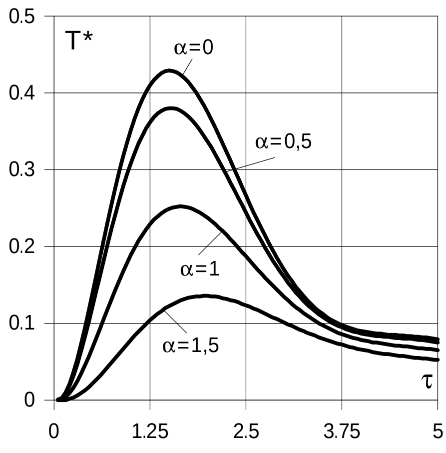

Рис. 2

Як видно з наведеного, найбільшого значення температурне поле набуває в центрі ділянки нагріву в моменти часу, які відповідають закінченню дії імпульсного нагріву. Причому для значень часової змінної $\tau > 5$ температурне поле за глибиною композита набуває практично лінійної залежності.

---

1. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992.
2. *Галазюк В.А.* Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку в часткових похідних з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
3. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М., 1955.
4. *Tanigawa Y.* Some Basic Thermoelastic Problems for Nonhomogeneous Structura1 Materials // Appl. Mech. Rev.,(ASME). – 1995. – Vol. 48, No. 6. – P. 287–300.
5. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М., 1979.

QUASISTATIC PROBLEM OF HEAT CONDUCTIVITY IN THE LAYERED HALFSPACE FROM IMPULSIVE HEATING

Olha Turchyn[1], Ihor Turchyn[2]

[1]National Forestry University of Ukraine,
General Chuprinka Str., 103 79057 Lviv, Ukraine
[21]Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

With the use of method of polynomials of Laguerre and integral transformation of Hankel the analytical decision of quasistatic problem of heat conductivity is got for the system of layer-halfspace at the impulsive symmetric heating.

Key words: heat conductivity, quasistatic problem, stratified bodies, polynomials of Laguerre.

Стаття надійшла до редколегії 08.06.2007
Прийнята до друку 19.11.2008