ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 69. С. 268–284 Ser. Mech.-Mat. 2008. Vol. 69. P. 268–284

УДК 517.95

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ АБСТРАКТНИХ НЕЯВНИХ СУБДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Юрій ДМИТРИШИН

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено задачу без початкових умов для абстрактного неявного невиродженого субдиференціального еволюційного включення. Визначено достатні умови для існування єдиного розв'язку цієї задачі без припущень на поведінку розв'язку і вихідних даних при $t \to -\infty$. Наведено приклад застосування цих абстрактних результатів до розв'язання задачі без початкових умов для одного неявного нелінійного параболічного рівняння з односторонніми крайовими умовами.

Ключові слова: задача без початкових умов, неявне еволюційне включення, нелінійне еволюційне рівняння, субдиференціал, існування, єдиність.

Існує багато праць присвячених вивченню задачі Коші для абстрактних неявних еволюційних включень вигляду

$$(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}))' + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) \ni \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ – монотонні (можливо багатозначні) оператори, що діють з банахового чи гільбертового простору $\boldsymbol{V}$ у спряжений $\boldsymbol{V}'$. Зазначимо, що ця задача у випадку нелінійних обмежених операторів $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, один з яких обов'язково субдиференціал, досліджена у [16]. Випадок нелінійного оператора $\boldsymbol{A}$ і лінійного однозначного неперервного оператора $\boldsymbol{B}$ розглянуто в [12, 17, 20]. Питання існування розв'язку задачі Коші для включення (1), коли оператор $\boldsymbol{A}$ – однозначний, а $\boldsymbol{B}$ – субдиференціал, вивчено в праці [18], а коли оператори $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ – субдиференціали – у [9, 11]. Існування періодичних розв'язків для включення (1), коли $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ – субдиференціали, досліджено в [10]. Щодо задачі без початкових умов, то вона для рівняння вигляду (1), тобто, коли оператор $\boldsymbol{A}$ – нелінійний і однозначний, а оператор $\boldsymbol{B}$ – лінійний і однозначний (можливо вироджений) вивчено у [13], а коли $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ (одиничний оператор) – у [1].

Мета нашої праці – дослідити задачі без початкових умов для неявного субдиференціального еволюційного включення вигляду

$$(\boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t}))' + \partial\Phi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})) \ni \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}'$ – лінійний монотонний оператор; $\boldsymbol{V}$ – дійсний рефлексивний банахів простір; $\partial\Phi$ – субдиференціал власного опуклого півнеперервного знизу функціонала $\Phi:\boldsymbol{V}\to[0,+\infty]$, $\boldsymbol{S}=(-\infty,\boldsymbol{T}]$ ($\boldsymbol{T}\in\mathbb{R}$) або $\boldsymbol{S}=\mathbb{R}$, і $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{S}\to\boldsymbol{V}'$ – задана функція. Наша мета – визначити достатні умови на вихідні дані $\boldsymbol{B}$ і Φ задачі (2), при яких вона має єдиний розв'язок без припущень на поведінку розв'язку та зростання функції $\boldsymbol{f}$ при $\boldsymbol{t}\to-\infty$. Зазначимо, що розглядатимемо лише випадок невиродженого включення (2), тобто, коли ядро оператора $\boldsymbol{B}$ складається тільки з нульового елемента.

Основні поняття і головний результат. Для довільного банахового простору $\boldsymbol{X}$ норму в ньому позначатимемо через $\|\cdot\|_{\boldsymbol{X}}$. Через $\boldsymbol{X}'$ позначатимемо простір спряжений до $\boldsymbol{X}$, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\boldsymbol{X}}$ – канонічний скалярний добуток між просторами $\boldsymbol{X}'$ та $\boldsymbol{X}$. Під $\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$, де $\boldsymbol{q}\in[1,+\infty]$ розумітимемо простір (класів еквівалентності) $\boldsymbol{X}$-значних функцій, вимірних за Бохнером на $\boldsymbol{S}$, звуження яких на будь-який відрізок $[\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2]\subset\boldsymbol{S}$ належить $\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2;\boldsymbol{X})$. Простір $\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$ – локально опуклий топологічний векторний простір стосовно системи півнорм $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2}(\boldsymbol{v})=\left(\int_{\boldsymbol{t}_1}^{\boldsymbol{t}_2}\|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\|^{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{X}}\,\boldsymbol{dt}\right)^{1/\boldsymbol{q}}$, якщо $\boldsymbol{q}\ne\infty$ та $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2}(\boldsymbol{v})=\operatorname{ess\,sup}_{\boldsymbol{t}\in[\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2]}\|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\|_{\boldsymbol{X}}$, $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2\in\boldsymbol{S}$, якщо $\boldsymbol{q}=\infty$. Через $D'(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$ позначатимемо простір $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{w}}$-значних розподілів на $\operatorname{int}\boldsymbol{S}$ [2]. Відомо, що простір $\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$ можна ототожнити з деяким підпростором в $D'(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$. Для $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$ позначатимемо через $\boldsymbol{v}'$ похідну в сенсі простору $D'(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$. Під $\boldsymbol{W}^{1,\boldsymbol{q}}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{q}\ne\infty$ розумітимемо локально опуклий топологічний векторний простір функцій $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$ таких, що $\boldsymbol{v}'\in\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$, стосовно системи півнорм $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2}(\boldsymbol{v})=\left(\int_{\boldsymbol{t}_1}^{\boldsymbol{t}_2}\|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\|^{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{X}}\,\boldsymbol{dt}+\int_{\boldsymbol{t}_1}^{\boldsymbol{t}_2}\|\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{t})\|^{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{X}}\,\boldsymbol{dt}\right)^{1/\boldsymbol{q}}$, $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2\in\boldsymbol{S}$. Використовуватимемо також позначення $\boldsymbol{H}^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})=\boldsymbol{W}^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$. Локально опуклий топологічний векторний простір неперервних функцій з $\boldsymbol{S}$ в $\boldsymbol{X}$, топологія якого визначається системою півнорм $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2}(\boldsymbol{v})=\sup_{\boldsymbol{t}\in[\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2]}\|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\|_{\boldsymbol{X}}$, $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2\in\boldsymbol{S}$, позначатимемо через $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$, а множину $\boldsymbol{X}$-значних абсолютно неперервних функцій на будь-якому відрізку з $\boldsymbol{S}$ – через $\boldsymbol{AC}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{X})$. Детальніше про простори векторнозначних функцій можна дізнатися в [2, 3, 7].

Вважатимемо, що $\boldsymbol{p}>2$ – деяке дійсне число, $\boldsymbol{p}':=\boldsymbol{p}/(\boldsymbol{p}-1)$. Нехай $\boldsymbol{V}$ – дійсний рефлексивний банахів простір, а $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}'$ – лінійний неперервний оператор такий, що $\langle\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle_{\boldsymbol{V}}=\langle\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1\rangle_{\boldsymbol{V}}$ для довільних $\boldsymbol{v}_1$,

$\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{V}$ і $\langle \boldsymbol{Bv},\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}} > 0$ для будь-якого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \setminus \{0\}$. Тоді білінійна форма $\langle \boldsymbol{B}\cdot,\cdot\rangle_{\boldsymbol{V}}$ визначає скалярний добуток, а функціонал $\langle \boldsymbol{B}\cdot,\cdot\rangle_{\boldsymbol{V}}^{1/2}$ – норму на $\boldsymbol{V}$. Позначимо поповнення простору $\boldsymbol{V}$ у нормі $\langle \boldsymbol{B}\cdot,\cdot\rangle_{\boldsymbol{V}}^{1/2}$ через $\boldsymbol{V_B}$. Очевидно, що вкладення $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{V_B}$ – щільне і для довільного $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ виконується нерівність $\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V_B}} \le \sqrt{\|\boldsymbol{B}\|_L} \cdot \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}}$. Через ототожнення функціоналів маємо щільне вкладення $\boldsymbol{V_B}' \subset \boldsymbol{V}'$, причому $\|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{V}'} \le \sqrt{\|\boldsymbol{B}\|_L} \cdot \|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{V_B}'}$ для кожного $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V_B}'$. Простори $\boldsymbol{V_B}$ та $\boldsymbol{V_B}'$ є гільбертовими. Оператор $\boldsymbol{B}$ має єдине лінійне неперервне продовження $\boldsymbol{B} : \boldsymbol{V_B} \to \boldsymbol{V_B}'$. Скалярний добуток на $\boldsymbol{V_B}'$ задовольняє умову

$$(\boldsymbol{w},\boldsymbol{Bv})_{\boldsymbol{V_B}'} = \langle \boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}}, \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V_B}', \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \tag{3}$$

звідки, взявши $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{Bv}$, маємо

$$\|\boldsymbol{Bv}\|_{\boldsymbol{V_B}'} = \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V_B}}, \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V_B}. \tag{4}$$

Отже, оператор $\boldsymbol{B} : \boldsymbol{V_B} \to \boldsymbol{V_B}'$ є рісовським ізоморфізмом. Обґрунтування цих фактів можна знайти в монографіях [21] та [22].

Надалі нам буде потрібне таке твердження.

Лема 2.1. ([13], **лема** 2.1) *Нехай* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V})$, $(\boldsymbol{Bv})' \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}'}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}')$. *Тоді* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V_B})$, $\boldsymbol{Bv} \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V_B}')$ *і функція* $\boldsymbol{t} \mapsto \|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\|^2_{\boldsymbol{V_B}} \equiv \|\boldsymbol{Bv}(\boldsymbol{t})\|^2_{\boldsymbol{V_B}'}$ *є абсолютно неперервною на кожному відрізку з* $\boldsymbol{S}$. *Відтак,*

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\|^2_{\boldsymbol{V_B}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\|\boldsymbol{Bv}(\boldsymbol{t})\|^2_{\boldsymbol{V_B}'} = 2\big\langle(\boldsymbol{Bv}(\boldsymbol{t}))',\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\big\rangle_{\boldsymbol{V}} \tag{5}$$

для м.в. $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}$.

Нехай функціонал $\Phi : \boldsymbol{V} \to [0,+\infty]$ – *опуклий*, тобто, для будь-яких векторів $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ і числа $0 \le \boldsymbol{t} \le 1$ виконується нерівність

$$\Phi(\boldsymbol{tv} + (1-\boldsymbol{t})\boldsymbol{w}) \le \boldsymbol{t}\Phi(\boldsymbol{v}) + (1-\boldsymbol{t})\Phi(\boldsymbol{w}),$$

та півнеперервний знизу, тобто

$$\boldsymbol{v_k} \xrightarrow{\boldsymbol{k}\to\infty} \boldsymbol{v} \quad \text{в } \boldsymbol{V} \quad \Rightarrow \quad \Phi(\boldsymbol{v}) \le \varliminf_{\boldsymbol{k}\to\infty}\Phi(\boldsymbol{v_k}).$$

Позначимо через $\mathrm{dom}(\Phi) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} : \Phi(\boldsymbol{v}) < +\infty\}$ *ефективну область* функціонала Φ. Вважатимемо, що $0 \in \mathrm{dom}(\Phi)$. *Субдиференціалом* функціонала Φ називатимемо відображення $\partial\Phi : \boldsymbol{V} \to 2^{\boldsymbol{V}'}$, визначене за правилом

$$\partial\Phi(\boldsymbol{v}) := \{\boldsymbol{v}^* \in \boldsymbol{V}' : \Phi(\boldsymbol{w}) \geq \Phi(\boldsymbol{v}) + \langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{V}} \ \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}\}$$

для кожного $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Ми ототожнюватимемо субдиференціал $\partial\Phi$ з його графіком, вважаючи, що елемент $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}^*] \in \partial\Phi$ тоді і лише тоді, коли $\boldsymbol{v}^* \in \partial\Phi(\boldsymbol{v})$. *Областю визначення* субдиференціала $\partial\Phi$ називатимемо множину $\boldsymbol{D}(\partial\Phi) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} : \partial\Phi(\boldsymbol{v}) \neq \varnothing\}$. Рокафеллар у праці [19, теорема A] довів, що субдиференціал $\partial\Phi$ є *максимальним монотонним оператором*, тобто

$$\langle \boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*, \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \rangle_{\boldsymbol{V}} \geq 0 \quad \forall\, [\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}^*] \in \partial\Phi,\ \boldsymbol{i} = 1, 2,$$

і для будь-якого елемента $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1^*] \in \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}'$

$$\langle \boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*, \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \rangle_{\boldsymbol{V}} \geq 0 \quad \forall\, [\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2^*] \in \partial\Phi \quad \Rightarrow \quad [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1^*] \in \partial\Phi.$$

Дамо означення розв'язку задачі (2).

Означення 2.1. Функцію $\boldsymbol{u} : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{V}$ називатимемо *розв'язком* задачі (2), якщо вона задовольняє умови

1) $\boldsymbol{Bu} \in \boldsymbol{AC}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S}; \boldsymbol{V}')$;
2) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{D}(\partial\Phi)$ для м.в. $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}$;
3) існує функція $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{V}'$ така, що для м.в. $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}$ маємо $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) \in \partial\Phi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}))$ і
$$(\boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t}))' + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) \quad \text{в } \boldsymbol{V}'.$$

Тепер сформулюємо і доведемо основний результат цієї праці.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови:*

(i) *існує стала* $\boldsymbol{K}_1 > 0$ *така, що*
$$\Phi(\boldsymbol{v}) \geq \boldsymbol{K}_1 \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{p}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{dom}(\Phi);$$

(ii) *існують стала* $\boldsymbol{K}_2 > 0$ *і число* $\boldsymbol{q} \in (2, \boldsymbol{p}]$ *такі, що для будь-яких* $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{v}_1^* \in \partial\Phi(\boldsymbol{v}_1)$ *і* $\boldsymbol{v}_2^* \in \partial\Phi(\boldsymbol{v}_2)$ *справджується нерівність*
$$\langle \boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*, \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \rangle_{\boldsymbol{V}} \geq \boldsymbol{K}_2 \|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|_{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}}}^{\boldsymbol{q}}.$$

Тоді, якщо функція $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S}; \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}}')$, *то задача* (2) *має єдиний розв'язок* $\boldsymbol{u}$ *в класі функцій* $\{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S}; \boldsymbol{V}) : \boldsymbol{Bw} \in \boldsymbol{W}^{1,\boldsymbol{p}'}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S}; \boldsymbol{V}')\}$. *Крім того,* $\boldsymbol{Bu} \in \boldsymbol{H}^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S}; \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}}')$, $\Phi(\boldsymbol{u}(\cdot)) \in \boldsymbol{L}^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S})$ *і для кожного* $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}$ *функція* $\boldsymbol{u}$ *задовольняє оцінку*

$$\|Bu(t)\|^2_{V_B{}'} + \int_{t-1}^{t} \|(Bu(\tau))'\|^2_{V_B{}'} d\tau + \int_{t-1}^{t} \|u(\tau)\|^p_V d\tau + \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in[t-1,t]} \Phi(u(\tau)) \le$$
$$\le C_1 + C_2 \int_{t-2}^{t} \|f(\tau)\|^2_{V_B{}'} d\tau, \qquad (6)$$

де C_1, C_2 *– додатні сталі, що залежать лише від* K_1, $\Phi(0)$, p *і* $\|B\|_L$.

Доведення. Єдиність. Нехай u_1, $u_2 \in L^p_{\mathrm{loc}}(S;V)$ – два можливі розв'язки задачі (2) такі, що Bu_1, $Bu_2 \in W^{1,p'}_{\mathrm{loc}}(S;V')$. Тоді для кожного $i \in \{1,2\}$ з означення розв'язку задачі (2) випливає існування функції $g_i : S \to V'$ такої, що $g_i(t) \in \partial\Phi(u_i(t))$ і

$$(Bu_i(t))' + g_i(t) = f(t) \quad \text{в } V' \qquad (7)$$

для м.в. $t \in S$. Приймемо $w := u_1 - u_2$. З рівності (7) отримаємо для м.в. $t \in S$

$$(Bw(t))' + g_1(t) - g_2(t) = 0 \quad \text{в } V'. \qquad (8)$$

Помноживши (8) скалярно на w, одержимо

$$\big\langle (Bw(t))', w(t)\big\rangle_V + \langle g_1(t) - g_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle_V = 0$$

для м.в. $t \in S$. Звідси і леми 2.1. отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{V_B} + \langle g_1(t) - g_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle_V = 0$$

для м.в. $t \in S$. З останньої рівності, застосувавши до другого доданка умову (ii), отримаємо таку диференціальну нерівність:

$$\frac{1}{2}\frac{dy(t)}{dt} + (y(t))^{q/2} \le 0 \quad \text{для м.в. } t \in S,$$

де $y(t) = \|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{V_B}$. Звідси та леми 1.1 праці [1] випливає, що $y \equiv 0$ на S, тобто, $u_1(t) = u_2(t)$ для м.в. $t \in S$.

Існування. Доведення існування розв'язку задачі (2) проведемо у три кроки.

Крок 1 (*Апроксимація розв'язку*). Спочатку визначимо функціонал $\Phi_{V_B} : V_B \to [0,+\infty]$ за правилом: $\Phi_{V_B}(v) := \Phi(v)$, якщо $v \in V$, і $\Phi_{V_B}(v) := +\infty$ в іншому випадку. Зазначимо, що з умови (i), леми IV.5.2 та твердження IV.5.2 монографії [22] випливає, що Φ_{V_B} є власним опуклим півнеперервним знизу функціоналом на гільбертовому просторі V_B, $\mathrm{dom}(\Phi_{V_B}) = \mathrm{dom}(\Phi) \subset V$ і $\partial\Phi_{V_B} = \partial\Phi \cap (V \times V_B{}')$, де $\partial\Phi_{V_B} : V_B \to 2^{V_B{}'}$ – субдиференціал функціонала Φ_{V_B}. З неперервності вкладення $V \subset V_B$, умови (i) і твердження IV.1.4 монографії [22] випливає існування елемента $u_0 \in \mathrm{dom}(\Phi_{V_B})$ такого, що $\Phi_{V_B}(u_0) \le \Phi_{V_B}(v)$ для всіх $v \in V_B$. Тому з означення субдиференціала $\partial\Phi_{V_B}$ маємо $0 \in \partial\Phi_{V_B}(u_0)$.

Тепер побудуємо послідовність функцій, що в певному сенсі апроксимують розв'язок задачі (2). Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $T \ge 0$, коли $S = (-\infty, T]$. Визначимо $S_k := S \cap \{t \in \mathbb{R} : t \ge -k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Для кожного числа $k \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу знаходження функції $\hat{u}_k \in L^2_{\mathrm{loc}}(S_k; V_B)$ такої, що $(B\hat{u}_k)' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S_k; V_B{}')$ і

$$(B\hat{u}_k(t))' + \partial\Phi_{V_B}(\hat{u}_k(t)) \ni f(t), \quad t \in S_k, \tag{9a}$$

$$B\hat{u}_k(-k) = Bu_0. \tag{9b}$$

Оскільки оператор B – рісовський ізоморфізмом гільбертового простору V_B на спряжений $V_B{}'$, то задача (9) еквівалентна задачі на знаходження функції $\hat{u}_k \in H^1_{\mathrm{loc}}(S_k; V_B)$ такої, що

$$\hat{u}'_k(t) + B^{-1} \circ \partial\Phi_{V_B}(\hat{u}_k(t)) \ni B^{-1}f(t), \quad t \in S_k, \tag{10a}$$

$$\hat{u}_k(-k) = u_0. \tag{10b}$$

Позаяк $u_0 \in \mathrm{dom}(\Phi_{V_B})$, то з [14, твердження 3.12] або [22, твердження IV.5.2] випливає існування єдиного розв'язку задачі (10), а отже, і задачі (9), такого, що $\hat{u}_k(t) \in D(\partial\Phi_{V_B})$ для м.в. $t \in S_k$. Зазначимо, що $D(\partial\Phi_{V_B}) \subset \mathrm{dom}(\Phi_{V_B})$, тому $\hat{u}_k(t) \in V$ для м.в. $t \in S_k$. Продовжимо функцію $\hat{u}_k$ на весь проміжок S, прийнявши її рівною u_0 на $(-\infty, -k]$ і позначимо це продовження через u_k. На підставі того, що $0 \in \partial\Phi_{V_B}(u_0)$ функція $u_k \in H^1_{\mathrm{loc}}(S; V_B)$, $(Bu_k)' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; V_B{}')$, для кожного $k \in \mathbb{N}$ є розв'язком задачі без початкових умов

$$(Bu_k(t))' + \partial\Phi_{V_B}(u_k(t)) \ni f_k(t), \quad t \in S, \tag{11}$$

де $f_k(t) = f(t)$ на S_k і $f_k(t) = 0$ на $(-\infty, -k]$. Крім того, $u_k(t) \in V$ для м.в. $t \in S$.

Для того, щоб показати збіжність послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ до розв'язку задачі (2) нам будуть потрібні деякі оцінки апроксимуючих розв'язків u_k, $k \in \mathbb{N}$.

Крок 2 (*Оцінки апроксимуючих розв'язків*). Нехай $k \in \mathbb{N}$ – яке-небудь число. Оскільки функція $u_k \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; V_B)$, $(Bu_k)' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; V_B{}')$ є розв'язком задачі (11), то існує функція $g_k \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; V_B{}')$ така, що для м.в. $t \in S$ маємо $g_k(t) \in \partial\Phi_{V_B}(u_k(t))$ і

$$(Bu_k(t))' + g_k(t) = f_k(t) \quad \text{в } V_B{}'. \tag{12}$$

Візьмемо функцію $\theta_1 \in C^1(\mathbb{R})$ таку, що $\theta_1(t) = 0$ при $t \in (-\infty, -1]$, $\theta_1(t) = \exp(\frac{t^2}{t^2-1})$ при $t \in (-1, 0)$, $\theta_1(t) = 1$ при $t \in [0, +\infty)$. Очевидно, що

$$\sup_{t\in(-1,+\infty)} \frac{\theta_1{}'(t)}{\theta_1^{\nu}(t)} < C_3(\nu) \tag{13}$$

для кожного $0 < \nu < 1$, де $C_3(\nu) > 0$ – стала, що залежить лише від ν.

Нехай t_1, $t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$, $\delta > 0$ – довільні дійсні числа. Приймемо $\theta(t) = \theta_1(\frac{t - t_1}{\delta})$ для кожного $t \in S$. Очевидно, що $\theta u_k \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; V_B)$. Домножимо (12) скалярно на θu_k та проінтегруємо за t від $t_1 - \delta$ до $\tau \in [t_1, t_2]$. У результаті отримаємо

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle (Bu_k)', u_k(t)\rangle_{V_B} dt + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle g_k(t), u_k(t)\rangle_{V_B} dt =$$
$$= \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle f_k(t), u_k(t)\rangle_{V_B} dt.$$

Звідси, застосувавши лему 2.1. до першого доданка, матимемо

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|^2_{V_B} dt + 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle g_k(t), u_k(t)\rangle_{V_B} dt =$$
$$= 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle f_k(t), u_k(t)\rangle_{V_B} dt. \tag{14}$$

Інтегруючи частинами перший доданок лівої сторони рівності (14), одержимо

$$\|u_k(\tau)\|^2_{V_B} + 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle g_k(t), u_k(t)\rangle_{V_B} dt =$$
$$= \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t)\|u_k(t)\|^2_{V_B} dt + 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle f_k(t), u_k(t)\rangle_{V_B} dt. \tag{15}$$

Оскільки $\partial\Phi_{V_B} \subset \partial\Phi$, то $g_k(t) \in \partial\Phi(u_k(t))$ для м.в. $t \in S$. Звідси і з означення субдиференціала $\partial\Phi$, врахувавши, що $0 \in \mathrm{dom}(\Phi)$, отримаємо

$$\Phi(u_k(t)) \le \langle g_k(t), u_k(t)\rangle_{V_B} + \Phi(0) \tag{16}$$

для м.в. $t \in S$. З (16) та умови (i), використовуючи нерівності Гельдера та Коші для першого доданка правої сторони (16), для м.в. $t \in S$ матимемо

$$K_1\|u_k(t)\|_V^p \le \frac{1}{2}\|g_k(t)\|_{V_B{}'}^2 + \frac{1}{2}\|u_k(t)\|_{V_B}^2 + \Phi(0).$$

Оскільки $u_k \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B)$ і $g_k \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B{}')$, то $u_k \in L^p_{\mathrm{loc}}(S;V)$.

Оцінимо тепер перший доданок правої сторони рівності (15), використовуючи (13), неперервність вкладення $V \subset V_B$ та нерівність Юнга

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t)\|u_k(t)\|_{V_B}^2\,dt \le \|B\|_L \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t)\|u_k(t)\|_V^2\,dt = \\
&= \|B\|_L \int_{t_1-\delta}^{\tau} \frac{\theta'(t)}{\theta^{2/p}(t)}\theta^{2/p}(t)\|u_k(t)\|_V^2\,dt \le \varepsilon\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\|u_k(t)\|_V^p\,dt + \\
&\quad + C_4\varepsilon^{-\frac{2}{p-2}}\int_{t_1-\delta}^{t_2} (\theta'(t)\theta^{-2/p}(t))^{\frac{p}{p-2}}\,dt \le \\
&\le \varepsilon\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\|u_k(t)\|_V^p\,dt + C_5(\delta\cdot\varepsilon)^{-\frac{2}{p-2}},
\end{aligned} \tag{17}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число; C_4 і C_5 – додатні сталі, що залежать лише від числа p і норми оператора B.

Далі оцінимо другий доданок правої сторони рівності (15), застосовуючи нерівність Юнга з $\eta > 0$

$$\begin{aligned}
&2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle f_k(t),u_k(t)\rangle_{V_B}\,dt \le \\
&\le \eta\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\|u_k(t)\|_V^p\,dt + C_6\eta^{\frac{1}{1-p}}\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\|f_k(t)\|_{V_B}^{p'}\,dt,
\end{aligned} \tag{18}$$

де $C_6 > 0$ – стала, що залежить від p і норми оператора B.

Оцінимо другий доданок лівої сторони рівності (15), використовуючи (16) та умову (i). У результаті матимемо

$$\begin{aligned}
&2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle g_k(t),u_k(t)\rangle_{V_B}\,dt \ge 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(\Phi(u_k(t)) - \Phi(0))\,dt \ge \\
&\ge \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(\Phi(u_k(t)) + K_1\|u_k(t)\|_V^p - 2\Phi(0))\,dt.
\end{aligned} \tag{19}$$

З (15), використовуючи (17)-(19), вибравши $\varepsilon = \eta = K_1/4$, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\|u_k(\tau)\|_{V_B}^2 + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(\Phi(u_k(t)) + \|u_k(t)\|_V^p)\,dt \le \\
&\le C_7\delta^{-\frac{2}{p-2}} + C_8\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\|f_k(t)\|_{V_B{}'}^{p'}\,dt + C_9\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\Phi(0)\,dt,
\end{aligned}$$

або, на підставі довільності $\tau \in [t_1,t_2]$ і означення θ,

$$\max_{t\in[t_1,t_2]}\|u_k(t)\|_{V_B}^2 + \int_{t_1}^{t_2} \|u_k(t)\|_V^p\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(u_k(t))\,dt \le$$

$$\leq 2C_7\delta^{-\frac{2}{p-2}} + 2C_8\int_{t_1-\delta}^{t_2} \|f_k(t)\|_{V_B'}^{p'} dt + 2C_9\Phi(0)(t_2 - t_1 + \delta), \tag{20}$$

де C_7, C_8 та C_9 – деякі додатні сталі, що залежать лише від K_1, p і норми оператора B.

З (20) та означення функції f_k, на підставі довільності t_1, $t_2 \in S$ та $\delta > 0$, випливає, що

послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – обмежена в просторі $C(S;V_B) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(S;V)$; (21)

послідовність $\{\Phi(u_k(\cdot))\}_{k=1}^{+\infty}$ – обмежена в просторі $L^1_{\mathrm{loc}}(S)$. (22)

Знайдемо оцінку похідної $(Bu_k)'$. Нехай t_1, t_2 і δ – довільні дійсні числа такі, що t_1, $t_2 \in S$, $t_1 < t_2$ і $\delta > 0$. Домножимо (12) скалярно на функцію $\theta(Bu_k)' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B{}')$ (функція θ – така ж, як і раніше) та проінтегруємо отриману рівність за t від $t_1 - \delta$ до $\tau \in [t_1,t_2]$

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\|(Bu_k(t))'\|_{V_B'}^2 dt + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\big(g_k(t),(Bu_k(t))'\big)_{V_B'} dt =$$
$$= \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\big(f_k(t),(Bu_k(t))'\big)_{V_B'} dt. \tag{23}$$

Оскільки $B : V_B \to V_B{}'$ – рісовський ізоморфізм і $u_k{}' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B)$, $(Bu_k)' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B{}')$, то, очевидно, що $(Bu_k)' = Bu_k{}'$ і для м.в. $t \in S$ виконується рівність

$$\big(g_k(t),(Bu_k(t))'\big)_{V_B'} = \Big\langle g_k(t),u_k{}'(t)\Big\rangle_{V_B}$$

(див. (3)). Врахувавши, що $g_k \in L^2(t_1 - \delta,t_2;V_B{}')$, з останньої рівності і леми IV.4.3 монографії [22] випливає, що функція $\Phi_{V_B}(u_k(\cdot)) \in AC([t_1 - \delta,t_2])$ і

$$\frac{d}{dt}\Phi_{V_B}(u_k(t)) = \big(g_k(t),(Bu_k(t))'\big)_{V_B'} \tag{24}$$

для м.в. $t \in (t_1 - \delta,t_2)$. Використовуючи (24), можемо оцінити другий доданок лівої сторони рівності (23)

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\big(g_k(t),(u_k(t))'\big)_{V_B'} dt = \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\frac{d}{dt}\Phi_{V_B}(u_k(t))dt =$$
$$= \Phi_{V_B}(u_k(\tau)) - \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t)\Phi_{V_B}(u_k(t))dt \geq$$
$$\geq \Phi_{V_B}(u_k(\tau)) - \max_{t\in[t_1-\delta,t_2]}\theta'(t)\int_{t_1-\delta}^{t_2} \Phi_{V_B}(u_k(t))dt. \tag{25}$$

Використовуючи нерівність Коші, оцінимо праву сторону (23)

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\big(f_k(t),(Bu_k(t))'\big)_{V_B{}'} dt \le$$
$$\le \frac{1}{2}\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\|f_k(t)\|^2_{V_B{}'} dt + \frac{1}{2}\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\|(Bu_k(t))'\|^2_{V_B{}'} dt. \tag{26}$$

З (23), нерівностей (25) і (26), врахувавши, що

$$\max_{t\in\,\mathrm{i}} \theta'(t) = \max_{t\in[t_1-\delta,t_1]} \theta'(t) < 3/\delta,$$

матимемо оцінку

$$\int_{t_1}^{\tau} \|(Bu_k(t))'\|^2_{V_B{}'} dt + \Phi_{V_B}(u_k(\tau)) \le$$
$$\le \int_{t_1-\delta}^{\tau} \|f_k(t)\|^2_{V_B{}'} dt + \frac{6}{\delta}\int_{t_1-\delta}^{t_2} \Phi_{V_B}(u_k(t))dt.$$

Звідси і означення функціонала Φ_{V_B}, за рахунок того, що $u_k \in L^p_{\mathrm{loc}}(S;V)$, маємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \|(Bu_k(t))'\|^2_{V_B{}'} dt + \max_{t\in[t_1,t_2]} \Phi(u_k(t)) \le$$
$$\le 2\int_{t_1-\delta}^{t_2} \|f_k(t)\|^2_{V_B{}'} + \frac{12}{\delta}\int_{t_1-\delta}^{t_2} \Phi(u_k(t))dt. \tag{27}$$

З нерівності (27), на підставі (22) та означення функції f_k, з огляду на довільність t_1, $t_2 \in S$ та $\delta > 0$, випливає, що

послідовність $\{(Bu_k)'\}_{k=1}^{+\infty}$ – обмежена в просторі $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B{}')$,
(28)
послідовність $\{\Phi(u_k(\cdot))\}_{k=1}^{+\infty}$ – обмежена в просторі $L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(S)$. (29)

З (12), (28) та означення функції f_k отримуємо, що

послідовність $\{g_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – обмежена в просторі $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B{}')$. (30)

Крок 3 (*Граничний перехід*). Оскільки V – рефлексивний банахів простір, а V_B – гільбертів простір, то з (21), (28) та (30) (див., наприклад, [2, 7, 22]) випливає, що з послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ можна виділити підпослідовність, за якою ми збережемо позначення $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ таку, що

$u_k \xrightarrow{k\to\infty} u$ слабко в $L^p_{\mathrm{loc}}(S;V)$,
(31)
$u_k \xrightarrow{k\to\infty} u$ $*$-слабко в $L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(S;V_B)$, (32)

$$(Bu_k)' \xrightarrow{k\to\infty} (Bu)' \quad \text{слабко в } L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B{}'), \tag{33}$$

$$g_k \xrightarrow{k\to\infty} g \quad \text{слабко в } L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B{}'). \tag{34}$$

Звідси випливає, що $Bu \in H^1_{\mathrm{loc}}(S;V_B{}')$.

Покажемо, що

$$u_k \xrightarrow{k\to\infty} u \quad \text{сильно в } L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B), \tag{35}$$

Нехай l, $m \in ¥$ – довільні числа, а u_l, $u_m \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B)$, $(Bu_l)'$, $(Bu_m)' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B{}')$ – розв'язки задачі (11), що відповідають $k = l$ і $k = m$ відповідно. Тоді існують функції g_l, $g_m \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B{}')$ такі, що для м.в. $t \in S$ маємо $g_l(t) \in \partial\Phi_{V_B}(u_l(t))$, $g_m(t) \in \partial\Phi_{V_B}(u_m(t))$ і виконується (12) для відповідно $k = l$ та $k = m$. Візьмемо різницю між (12) для $k = l$ та (12) для $k = m$

$$(Bu_l(t))' - (Bu_m(t))' + g_l(t) - g_m(t) = f_l(t) - f_m(t) \quad \text{в } V_B{}' \tag{36}$$

для м.в. $t \in S$.

Нехай t_1, $t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$, $\delta > 0$ – довільні числа, а функція θ – така ж як і раніше. Домножимо (36) скалярно на $\theta(u_l - u_m)$ та проінтегруємо за t від $t_1 - \delta$ до $\tau \in [t_1,t_2]$. У результаті отримаємо

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle (Bw_{lm}(t))', w_{lm}(t)\rangle_{V_B} dt + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle g_l(t) - g_m(t), w_{lm}(t)\rangle_{V_B} dt =$$
$$= \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle f_l(t) - f_m(t), w_{lm}(t)\rangle_{V_B} dt,$$

де $w_{lm} := u_l - u_m$. Звідси, застосувавши лему 2.1. до першого доданка, а тоді проінтегрувавши його частинами, матимемо

$$\|w_{lm}(\tau)\|^2_{V_B} + 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle g_l(t) - g_m(t), w_{lm}(t)\rangle_{V_B} dt =$$
$$= \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t)\|w_{lm}(t)\|^2_{V_B} dt + 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle f_l(t) - f_m(t), w_{lm}(t)\rangle_{V_B} dt. \tag{37}$$

Використовуючи умову (ii), оцінимо другий доданок лівої сторони (37)

$$2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle g_l(t) - g_m(t), w_{lm}(t)\rangle_{V_B} dt \geq 2K_2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\|w_{lm}(t)\|^q_{V_B} dt. \tag{38}$$

Аналогічно, як при доведенні (17), оцінимо перший доданок правої сторони рівності (37)

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t)\|w_{lm}(t)\|^2_{V_B} dt \leq 2K_2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\|w_{lm}(t)\|^q_{V_B} dt + C_{10}\delta^{-\frac{2}{q-2}}, \tag{39}$$

де $C_{10} > 0$ – деяка стала, що залежить лише від q і K_2.

Використовуючи нерівність Гельдера, означення функції θ і неперервність вкладення $V \subset V_B$, оцінимо другий доданок правої сторони (37)

$$2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\langle f_l(t) - f_m(t), w_{lm}(t)\rangle_{V_B} dt \le$$
$$\le 2\sqrt{\|B\|_L}\left(\int_{t_1-\delta}^{t_2} \|f_l(t) - f_m(t)\|_{V_B'}^{p'} dt\right)^{1/p'} \left(\int_{t_1-\delta}^{t_2} \|w_{lm}(t)\|_V^p dt\right)^{1/p}. \quad (40)$$

З (37)-(40) і означення функції w_{lm}, на підставі довільності $\tau \in [t_1, t_2]$, отримаємо

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} \|u_l(t) - u_m(t)\|_{V_B}^2 \le C_{10}\delta^{-\frac{2}{q-2}} +$$
$$+2\sqrt{\|B\|_L}\left(\int_{t_1-\delta}^{t_2} \|f_l(t) - f_m(t)\|_{V_B'}^{p'} dt\right)^{1/p'} \left(\int_{t_1-\delta}^{t_2} \|w_{lm}(t)\|_V^p dt\right)^{1/p}. \quad (41)$$

Оскільки послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – обмежена в просторі $L^p_{\mathrm{loc}}(S;V)$, то з (41), врахувавши довільність чисел t_1, $t_2 \in S$, $\delta > 0$ і фундаментальність послідовності $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в просторі $L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S;V_B')$, випливає фундаментальність послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в просторі $C(S;V_B)$, а отже, і в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B)$. Звідси, використавши повноту простору $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V_B)$, отримаємо (35).

З (29), (35) і півнеперервності знизу функціонала Φ випливає, що функція $\Phi(u(\cdot)) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S)$.

Перейдемо в (12) до границі при $k \to \infty$, врахувавши (33), (34) і означення функції f_k. У результаті отримаємо

$$(Bu(t))' + g(t) = f(t) \quad \text{в } V_B' \text{ для м.в. } t \in S.$$

Для завершення доведення теореми залишилося лише показати, що $u(t) \in D(\partial\Phi)$ і $g(t) \in \partial\Phi(u(t))$ для м.в. $t \in S$.

Нехай $t \in S$, $h > 0$ – довільні числа, а $[v, v^*] \in \partial\Phi$ – будь-який елемент. Оскільки $g_k(\tau) \in \partial\Phi(u_k(\tau))$ для м.в. $\tau \in S$, то з монотонності субдиференціала $\partial\Phi$ випливає, що

$$\langle g_k(\tau) - v^*, u_k(\tau) - v\rangle_V \ge 0 \quad \text{для м.в. } \tau \in S.$$

Проінтегруємо цю нерівність за τ від $t-h$ до t

$$\int_{t-h}^{t} \langle g_k(\tau) - v^*, u_k(\tau) - v\rangle_V d\tau \ge 0. \quad (42)$$

Перейдемо тепер в (42) до границі при $k \to \infty$, використовуючи (34) і (35). У результаті отримаємо

$$\int_{t-h}^{t} \langle g_k(\tau) - v^*, u_k(\tau) - v \rangle_V \, d\tau \xrightarrow{k\to\infty}$$
$$\xrightarrow{k\to\infty} \int_{t-h}^{t} \langle g(\tau) - v^*, u(\tau) - v \rangle_V \, d\tau. \tag{43}$$

З теореми 2 монографії [4, с. 162] випливає, що

$$\lim_{h\to+0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} g(\tau) d\tau = g(t) \quad \text{для м.в. } t \in S,$$
$$\lim_{h\to+0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} u(\tau) d\tau = u(t) \quad \text{для м.в. } t \in S.$$

Тому, поділивши (43) на h і спрямувавши h до $+0$, одержимо

$$\langle g(t) - v^*, u(t) - v \rangle_V \geq 0 \quad \text{для м.в. } t \in S.$$

Звідси, на підставі максимальної монотонності $\partial\Phi$ і довільності $[v, v^*] \in \partial\Phi$ випливає, що $[u(t), g(t)] \in \partial\Phi$ для м.в. $t \in S$.

Оцінка розв'язку (6) випливає безпосередньо з оцінок (20) та (27), рівності (4), півнеперервності знизу функціонала Φ, збіжностей (31)-(33), (35) та теорем 1 (с. 173) і 9 (с. 179) монографії [4].

Приклад. У цьому пункті наведемо приклад застосування абстрактних результатів попереднього пункту до розв'язання задачі без початкових умов для одного неявного нелінійного параболічного рівняння з односторонніми крайовими умовами. Зауважимо, що більш загальні задачі без початкових умов можуть бути розв'язані подібним способом.

Отже, нехай Ω – обмежена область в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ з межею $\partial\Omega$, що є C^1 многовидом розмірності $n-1$ [22]; $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі; S – дійсна числова вісь або промінь $(-\infty, T]$, де $T \in \mathbb{R}$. Приймемо $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \partial\Omega \times S$. Розглянемо *задачу без початкових умов*: знайти функцію $u : \overline{\Omega} \times S \to \mathbb{R}$ таку, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \Delta_p u + |u|^{p-2} u = f(x,t) \quad \text{в } Q, \tag{44a}$$
$$u \geq 0, \quad |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu \geq 0 \quad \text{на } \Sigma, \tag{44b}$$
$$u \, |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu = 0 \quad \text{на } \Sigma, \tag{44c}$$

де $p > 2$ – дійсне число; $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ – псевдо лапсасіан (p-лапласіан); b і f – деякі задані дійснозначні функції. Якщо функція $u(x,t)$ – температура тіла Ω в точці x в момент часу t, а рівняння (44a) описує процес розподілу тепла в тілі Ω, то $|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu$ – керування тепловим потоком на межі $\partial\Omega$, яке підтримує температуру u невід'ємною на $\partial\Omega$. Крайові умови (44b) і (44c) показують, що потрібний стан отримують завдяки джерелам тепла, які розміщені на межі $\partial\Omega$, причому теплові потоки цих джерел дорівнюють нулю в кожній точці $\partial\Omega$, де температура u – строго додатна.

Приймемо $V := W^{1,p}(\Omega)$, де $W^{1,p}(\Omega)$ – простір Соболєва (див. [8]). Нехай $b \in L^q(\Omega)$, $b(x) > 0$ для м.в. $x \in \Omega$, де $q := p/(p-2)$. Визначимо оператор $B : V \to V'$, за правилом

$$\langle Bv, w \rangle_V := \int_\Omega b(x) v(x) w(x) dx, \quad v, w \in V.$$

Тоді маємо банахів простір $V_B{}' \equiv b^{1/2} L^2(\Omega) := \{b^{1/2} v : v \in L^2(\Omega)\}$ з нормою $\| w \|_{V_B{}'} := \left(\int_\Omega b^{-1}(x) w^2(x) dx \right)^{1/2}$, $w \in V_B{}'$ (див., наприклад, [22]).

Нехай $K := \{v \in V : \gamma v(x) \geq 0$ для м.в. $x \in \partial\Omega\}$, де $\gamma : V \to L^p(\partial\Omega)$ – оператор сліду. Множина K є замкненим опуклим конусом (див. [22, ст. 70]).

Нехай $f \in L^2_{\text{loc}}(S; b^{1/2} L^2(\Omega))$. За аналогією з [5, с. 294-295] і [22, с. 151] ведемо означення узагальненого розв'язку задачі (44).

Означення 3.1. Функцію $u \in L^p_{\text{loc}}(S; V)$, $bu \in H^1_{\text{loc}}(S; b^{1/2} L^2(\Omega))$ називатимемо *узагальненим розв'язком* задачі (44), якщо $u(t) \in K$ для м.в. $t \in S$ і правильна варіаційна нерівність

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t}(b(x) u(x,t)) + | u(x,t) |^{p-2} u(x,t) - f(x,t) \right) (v(x) - u(x,t)) dx + \\ + \int_\Omega | \nabla u(x,t) |^{p-2} \nabla u(x,t) \cdot (\nabla v(x) - \nabla u(x,t)) \geq 0 \qquad (45)$$

для м.в. $t \in S$ і всіх $v \in K$.

Тут і далі $u(x,t) := u(t)(x)$, $f(x,t) := f(t)(x)$.

Доведемо тепер існування єдиного узагальненого розв'язку задачі (44).

Визначимо функціонали Ψ, I_K, $\Phi : V \to [0, +\infty]$ за правилом

$$\Psi(v) = \frac{1}{p} \int_\Omega | \nabla v(x) |^p dx + \frac{1}{p} \int_\Omega | v(x) |^p dx, \quad v \in V,$$

$$I_K(v) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } v \in K, \\ +\infty, & \text{в іншому випадку}, \end{cases} \quad v \in V,$$

$$\Phi(v) = \Psi(v) + I_K(v), \quad v \in V.$$

Очевидно, що функціонал Φ є власним опуклим і півнеперервним знизу. Розглянемо субдиференціальне включення в просторі $\boldsymbol{V}'$

$$\left(\boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t})\right)' + \partial\Phi\left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\right) \ni \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}. \tag{46}$$

Оскільки функціонал Ψ – диференційований за Гато, то згідно з [6, твердження 2.4.3] включення (46) можна переписати у вигляді

$$(\boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t}))' + \Psi'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})) + \partial \boldsymbol{I}_K(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})) \ni \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}, \tag{47}$$

де $\Psi' : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ – похідна Гато функціонала Ψ. Врахувавши, що для будь-яких $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ маємо

$$\left\langle \Psi'(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w}\right\rangle_{\boldsymbol{V}} = \int_\Omega |\nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|^{\boldsymbol{p}-2}\, \nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} + \\ + \int_\Omega |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|^{\boldsymbol{p}-2}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} \tag{48}$$

і, що $\partial\boldsymbol{I}_K(\boldsymbol{v}) := \{\boldsymbol{v}^* \in \boldsymbol{V}' : \langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}} \le 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in K\}$ (див. [6, ст. 62]), можемо включення (47) переписати у вигляді варіаційної нерівності (45).

Отже, для того, щоб довести існування єдиного узагальненого розв'язку задачі (44), використавши теорему 2.1, достатньо показати, що функціонал Φ задовольняє умови (i) і (ii) цієї теореми.

Безпосередньо з означення функціонала Φ випливає, що

$$\Phi(\boldsymbol{v}) \ge \boldsymbol{K}_3\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{p}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},$$

де $\boldsymbol{K}_3 > 0$ – деяка стала, що залежить лише від числа $\boldsymbol{p}$. Нехай $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}^* \in \partial\Phi(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}})$, $\boldsymbol{i} = 1,2$. Тоді з означення функціонала Φ і рівності (48), використавши при цьому монотонність субдиференціала $\partial\boldsymbol{I}_K$ і нерівність $(|\boldsymbol{r}_1|^{\boldsymbol{p}-2}\boldsymbol{r}_1 - |\boldsymbol{r}_2|^{\boldsymbol{p}-2}\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) \ge 2^{2-\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^{\boldsymbol{p}}$ правильну для всіх $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2 \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ (див., наприклад, [15, лема 3.6]), отримаємо

$$\langle \boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*, \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\rangle_{\boldsymbol{V}} \ge \boldsymbol{K}_4\|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\|_{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}}}^{\boldsymbol{p}},$$

де $\boldsymbol{K}_4$ – додатна стала, що залежить лише від $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{b}$. Отож, з теореми 2.1. випливає існування єдиного розв'язку $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{bu} \in \boldsymbol{H}^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{b}^{1/2}\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, включення (46), тому і єдиного узагальненого розв'язку задачі (44).

Отже, ми довели теорему.

Теорема 3.1. *Задача* (44) *має єдиний узагальнений розв'язок.*

---

1. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды семинара им. И. Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3–44.

2. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М, 1978.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1: Общая теория. – М., 1962.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М., 1967.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
6. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. – М., 1989.
7. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М., 1969.
8. *Adams R. A., Fournier J. J. F.* Sobolev spaces. – Oxford, 2003.
9. *Aizicovici S., Hokkanen* V.-M. Doubly nonlinear equations with unbounded operators // Nonlinear Anal. – 2004. – 58, №5-6. – P. 591–607.
10. *Aizicovici S., Hokkanen V.-M.* Doubly nonlinear periodic problems with unbounded operators // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – 292, №2. – P. 540–557.
11. *Akagi G.* Doubly nonlinear evolution equations governed by time-dependent subdifferentials in reflexive Banach spaces // J. Differ. Equations. – 2006. – 231, №1. – P. 32–56.
12. *Barbu V., Favini A.* Existence for an implicit nonlinear differential equation // Nonlinear Anal. – 1998. – 32, №1. – P. 33–40.
13. *Bokalo M., Dmytryshyn Yu.* Problems without initial conditions for degenerate implicit evolution equations // Electron. J. Differ. Equations. – 2008. – 2008, №4. – P. 1–16.
14. *Brezis H.* Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. – Amsterdam, London: North-Holland Publishing Comp., 1973.
15. *Bystrom J.* Sharp constants for some inequalities connected to the p-Laplace operator // J. Inequal. Pure and Appl. Math. – 2005. – 6, №2. – P. 1–8.
16. *DiBenedetto E., Showalter R. E.* Implicit degenerate evolution equations and applications // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – 12, №5. – P. 731-751.
17. *Kuttler K. L.* Non-degenerate implicit evolution inclusions // Electron. J. Differ. Equations. – 2000. – 2000, №34. – P. 1-20.
18. *Maitre E., Witomski P.* A pseudo-monotonicity adapted to doubly nonlinear elliptic–parabolic equations // Nonlinear Anal. – 2002. – 50, №2. – P. 223–250.

19. *Rockafellar R. T.* On the maximal monotonicity of subdifferential mappings // Pacific J. Math. – 1970. – 33, №1. – P. 209–216.

20. *Rulla J., Showalter R. E.* Diffusion in partially fissured media and implicit evolution systems // Adv. Math. Sci. Appl. – 1995. – 5, №1. – P. 163–191.

21. *Showalter R. E.* Hilbert space methods for partial differential equations, volume 1 of Monographs and Studies in Mathematics. – Pitman, London-San Francisco, Calif. – Melbourne, 1977.

22. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations, volume 49 of Mathematical Surveys and Monographs. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997.

THE PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR ABSTRACT IMPLICIT SUBDIFFERENTIAL EVOLUTION INCLUSIONS

Yuriy DMYTRYSHYN

Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

We study the problem without initial conditions for an abstract implicit subdifferential evolution inclusion. The sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution for this problem without assumptions on the behaviour of the solution and data-in as $t \to -\infty$ are established. We also present an example where our abstract result applies to the problem without initial conditions for an implicit nonlinear parabolic equation with unilateral boundary conditions.

Key words: problem without initial condition, implicit evolution inclusion, nonlinear evolution equation, subdifferential, existence, uniqueness.

Стаття надійшла до редколегії 02.09.2008
Прийнята до друку 19.10.2008