ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 69. С.85–91 *Ser. Mech.-Mat. 2008. Vol. 69. P.85–91*

УДК 517.956

ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ

Мирослава ПРОХОРЕНКО

Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11 36028 Рівне, Україна

Досліджено питання існування періодичних розв'язків хвильового рівняння з імпульсною дією у моменти часу, визначені самим розв'язком.

Ключові слова: імпульсні диференціальні рівняння в частинних похідних, коливання струни, коливання зі зворотною дією.

При моделюванні механічних, радіотехнічних, фізичних, біологічних та інших процесів виникає необхідність у вивченні диференціальних рівнянь з імпульсною дією [1]. Зокрема, диференціальні рівняння з імпульсною дією в задачах механіки використовували при дослідженні динаміки крокуючих апаратів [2]. В низці статей розглядали питання про існування періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними за наявності імпульсної дії у фіксовані моменти часу [3, 4].

Ця праця є продовженням досліджень [5, 6] та розглядає процес коливання струни з миттєвим збільшенням енергії у моменти, коли повна енергія струни досягає заданого критичного рівня. Тобто, моменти проведення імпульсної дії наперед не задані, а регулюються самим процесом. Для такої задачі досліджено існування простих (таких, які мають один імпульс на періоді) періодичних розв'язків.

1. Формулювання задачі. Коливання струни задамо рівнянням

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - bu - 2\nu u_t - 2cu_x \quad \left(0 \le x \le l,\ 0 \le t < \infty, a,b,c,\nu,l = const > 0\right), \tag{1}$$

та початковими і граничними умовами

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \psi_0(x) \quad (0 \le x \le l), \tag{2}$$

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = 0 \quad (0 \le t < \infty), \tag{3}$$

де $u(x,t)$ - зміщення струни в момент часу $t, h_1, h_2 = const > 0$, $\varphi_0 \in C^2[0,l]$,

$$\psi_0 \in C^1[0,l],\ \varphi_0\big|_{x=0,l} = \psi_0\big|_{x=0,l} = 0,\ \varphi_0''\Big|_{x=0,l} = 0.$$

За регулюючий функціонал візьмемо повну енергію коливання струни $E_u(t)$, яку визначають зі співвідношення [7]

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left((au_x)^2 + (u_t)^2\right)dx + \frac{a^2}{2}\left(h_1 u^2(0,t) + h_2 u^2(l,t)\right)$$

з критичним значенням $E_0 > 0$ та імпульсним законом

$$\begin{aligned} &(u(x,t+0) - u(x,t-0))\big|_{E_u(t)=E_0} = \alpha(x), \\ &(u_t(x,t+0) - u_t(x,t-0))\big|_{E_u(t)=E_0} = \beta(x) \quad (0 \le x \le l), \end{aligned} \tag{4}$$

де $\alpha \in C^2[0,l], \beta \in C^1[0,l]$ - задані функції, причому $\alpha|_{x=0,l} = \beta|_{x=0,l} = 0$, $\alpha''\Big|_{x=0,l} = 0$.

Отже, повне формулювання задачі складається зі співвідношень (1)-(4), причому рівності (1)-(3) справджуються тільки у випадку $E_u(t) \ne E_0$. Якщо $E_u(0) = E_0$, то в умові (4) розглядаємо $\varphi_0(x)$ замість $u(x,t-0)$, $\psi_0(x)$ замість $u_t(x,t-0)$ та 0 замість $t-0$.

Оскільки при дослідженні коливань струни (з врахуванням виконання загальноприйнятих фізичних законів) повна енергія її коливань у початковий момент набуває найбільшого значення, а з плином часу розсіюється, то при заданому E_0 можливі випадки:

а) $E_u(0) < E_0$, тоді імпульсів немає і $E_u(t) \to 0$ при $t \to +\infty$;

б) $E_u(0) \ge E_0$, тоді існує момент часу $t = t_* > 0$, коли виконується перший імпульс.

Тепер розпишемо

$$\begin{aligned} E_u(t+0) &= \frac{1}{2}\int_0^l \left(a^2(u_x(x,t-0) + \alpha_x(x))^2 + (u_t(x,t-0) + \beta(x))^2\right)dx + \\ &+ \frac{a^2}{2}\left(h_2(u(l,t-0) + \alpha(l))^2 + h_1(u(0,t-0) + \alpha(0))^2\right) \ge \\ &\ge \frac{1}{4}\int_0^l \left(a^2\alpha_x^2(x) + \beta^2(x)\right)dx + \frac{a^2}{2}\left(h_2 u^2(l,t-0) + h_1 u^2(0,t-0)\right) - \\ &- \frac{1}{2}\int_0^l \left(a^2(u_x(x,t-0))^2 + (u_t(x,t-0))^2\right)dx \ge \frac{1}{4}\int_0^l \left(a^2\alpha_x^2(x) + \beta^2(x)\right)dx - E_0. \end{aligned}$$

Для забезпечення існування нескінченої послідовності імпульсів при заданих E_0, α, β вимагаємо виконання нерівності

$$E_0 < \frac{1}{8}\int_0^l \left(a^2\alpha_x^2(x) + \beta^2(x)\right)dx.$$

Означення. Періодичний розв’язок задачі (1)-(4) назвемо простим, якщо відстань між його сусідніми моментами імпульсів постійна і дорівнює періоду цього розв’язку.

2. Розв’язність задачі. За зазначених умов розв’язок задачі (1)-(3) перед моментом першого імпульсу має вигляд

$$u(x,t) = e^{\tilde{c}x-\nu t}\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_{0n}\cos\omega_n t + \psi_{0n}\sin\omega_n t)\sin(\tau_n x + \theta_n),$$

де

$$\tilde{c} = \frac{c}{2a^2},\ \omega_n = \sqrt{a^2\lambda_n^2 + b - \nu^2},\ \lambda_n^2 = \tau_n^2 + c^2,$$

$$\cos\omega_n t := \begin{cases} ch|\omega_n|t & (a^2\lambda_n^2 + b < \nu^2), \\ 1 & (a^2\lambda_n^2 + b = \nu^2), \end{cases} \quad \omega_n^{-1}\sin\omega_n t := \begin{cases} |\omega_n|^{-1} sh|\omega_n|t & (a^2\lambda_n^2 + b < \nu^2), \\ t & (a^2\lambda_n^2 + b = \nu^2), \end{cases}$$

λ_n та $X_n(x) = e^{\tilde{c}x}\sin(\tau_n x + \theta_n)$ - відповідно власні значення і власні функції задачі

$$X''(x) - 2\tilde{c}X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0,\ X'(0) - h_1 X(0) = 0,\ X'(l) + h_2 X(l) = 0,$$

τ_n - корені рівняння

$$ctg\tau l = \frac{\tau^2 + (\tilde{c} - h_1)(\tilde{c} + h_2)}{\tau(h_1 + h_2)},\ \theta_n = arctg\frac{\tau_n}{h_1 - \tilde{c}},$$

$$\varphi_{0n} = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \varphi(x)e^{\tilde{c}x}\sin(\tau_n x + \theta_n)dx,$$

$$\psi_{0n}\omega_n = \nu\varphi_{0n} + \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \psi(x)e^{\tilde{c}x}\sin(\tau_n x + \theta_n)dx,$$

$$\|X_n\|^2 = \frac{e^{2\tilde{c}l} - 1}{4\tilde{c}} - \frac{1}{4\left(\tau_n^2 + \tilde{c}^2\right)}\Big(e^{2\tilde{c}l}(\tau_n\sin 2(\tau_n l + \theta_n) + \tilde{c}\cos 2(\tau_n l + \theta_n)) -$$
$$-\tau_n\sin 2\theta_n - \tilde{c}\cos 2\theta_n).$$

Згідно з формулюванням задачі момент першого імпульсу t_1 шукаємо з рівняння

$$a^2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_{0n}\cos\omega_n t_1 + \psi_{0n}\sin\omega_n t_1)^2\left(\left(\frac{\tau_n^2}{\tilde{c}} + \tilde{c}\right)\left(e^{2\tilde{c}l} - 1\right) + \frac{\tilde{c}^2 - \tau_n^2}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2}(\tau_n\sin 2\theta_n + \right.$$
$$+\tilde{c}\cos 2\theta_n - e^{2\tilde{c}l}(\tau_n\sin 2(\tau_n l + \theta_n) + \tilde{c}\cos 2(\tau_n l + \theta_n))\Big) + \frac{\tau_n\tilde{c}}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2}(\tau_n\cos 2\theta_n -$$
$$-\tilde{c}\sin 2\theta_n + e^{2\tilde{c}l}(\tilde{c}\sin 2(\tau_n l + \theta_n) - \tau_n\cos 2(\tau_n l + \theta_n))\Big) + 4h_2\sin^2(\tau_n l + \theta_n) +$$

$$+4h_1 \sin^2 \theta_n) + \sum_{n=1}^{\infty} ((\omega_n \psi_{0n} - \nu\varphi_{0n}) \cos \omega_n t_1 - (\nu\psi_{0n} + \omega_n \varphi_{0n}) \sin \omega_n t_1)^2 \left(\frac{e^{2\tilde{c}l} - 1}{\tilde{c}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2} \left(e^{2\tilde{c}l} (\tau_n \sin 2(\tau_n l + \theta_n) + \tilde{c} \cos 2(\tau_n l + \theta_n)) - \tau_n \sin 2\theta_n - \tilde{c} \cos 2\theta_n \right) \right) =$$

$$= 8e^{2\nu t_1} E_0.$$

Для $t > t_1$ розв'язуємо задачу (1)-(2), а замість умов (3), з урахуванням (4), одержуємо умови

$$u(x,t_1) = e^{\tilde{c}x} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\nu t_1} (\varphi_{0n} \cos \omega_n t_1 + \psi_{0n} \sin \omega_n t_1) + \alpha_n \right\} \sin(\tau_n x + \theta_n),$$

$$u_t'(x,t_1) = e^{\tilde{c}x} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\nu t_1} ((\omega_n \psi_{0n} - \nu\varphi_{0n}) \cos \omega_n t_1 - (\nu\psi_{0n} + \omega_n \varphi_{0n}) \sin \omega_n t_1) + \right.$$

$$\left. + \beta_n \right\} \sin(\tau_n x + \theta_n),$$

де

$$\alpha_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \alpha(x) e^{\tilde{c}x} \sin(\tau_n x + \theta_n) dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \beta(x) e^{\tilde{c}x} \sin(\tau_n x + \theta_n) dx, 0 \le x \le l.$$

Позначимо вирази у фігурних дужках відповідно φ_{1n} і ψ_{1n}. Тоді розв'язок задачі (1)-(4) при $t_1 < t < t_2$ матиме вигляд

$$u(x,t) = e^{\tilde{c}x - \nu t} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{1n} \cos \omega_n t + \psi_{1n} \sin \omega_n t) \sin(\tau_n x + \theta_n).$$

Продовжуючи подібно міркувати, одержимо вигляд розв'язку задачі (1)-(4) для $t_k < t < t_{k+1}$

$$u(x,t) = e^{\tilde{c}x - \nu t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_{k,n} \cos \omega_n t + \psi_{k,n} \sin \omega_n t \right) \sin(\tau_n x + \theta_n) \qquad (5)$$

та рівняння для знаходження наступного t_{k+1} моменту імпульсу

$$a^2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_{0n}\cos\omega_n t_{k+1}+\psi_{0n}\sin\omega_n t_{k+1})^2\left(\left(\frac{\tau_n^2}{\tilde c}+\tilde c\right)\left(e^{2\tilde c l}-1\right)+\frac{\tilde c^2-\tau_n^2}{\tau_n^2+\tilde c^2}(\tau_n\sin 2\theta_n+\right.$$
$$+\tilde c\cos 2\theta_n-e^{2\tilde c l}(\tau_n\sin 2(\tau_n l+\theta_n)+\tilde c\cos 2(\tau_n l+\theta_n)))\Big)+\frac{\tau_n\tilde c}{\tau_n^2+\tilde c^2}(\tau_n\cos 2\theta_n-$$
$$-\tilde c\sin 2\theta_n+e^{2\tilde c l}(\tilde c\sin 2(\tau_n l+\theta_n)-\tau_n\cos 2(\tau_n l+\theta_n)))\Big)+4h_2\sin^2(\tau_n l+\theta_n)+$$
$$+4h_1\sin^2\theta_n\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}((\omega_n\psi_{0n}-\nu\varphi_{0n})\cos\omega_n t_{k+1}-(\nu\psi_{0n}+\omega_n\varphi_{0n})\sin\omega_n t_{k+1})^2\left(\frac{e^{2\tilde c l}-1}{\tilde c}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\tau_n^2+\tilde c^2}\left(e^{2\tilde c l}(\tau_n\sin 2(\tau_n l+\theta_n)+\tilde c\cos 2(\tau_n l+\theta_n))-\tau_n\sin 2\theta_n-\tilde c\cos 2\theta_n\right)\right)=$$
$$=8e^{2\nu t_{k+1}}E_0, \tag{6}$$

де

$$\varphi_{k,n}=e^{-\nu t_k}\left(\varphi_{k-1,n}\cos\omega_n t_k+\psi_{k-1,n}\sin\omega_n t_k\right)+\alpha_n,$$
$$\psi_{k,n}=e^{-\nu t_k}\left(\left(\omega_n\psi_{k-1,n}-\nu\varphi_{k-1,n}\right)\cos\omega_n t_k-\left(\nu\psi_{k-1,n}+\omega_n\varphi_{k-1,n}\right)\sin\omega_n t_k\right)+\beta_n,$$
$$k=1,2\ldots.$$

Позначимо через T відстань між сусідніми моментами імпульсів простого періодичного розв'язку задачі (1)-(4).

Теорема. Якщо функції φ_0,ψ_0 при заданому значенні E_0 задовольняють наведені в п. 1 умови, то задача (1)-(4) має, з точністю до довільного зсуву в часі, простий періодичний розв'язок.

Доведення. З (5) маємо, що розв'язок задачі (1)-(4) з деякими функціями φ_0,ψ_0 та E_0 буде простим T -періодичним з імпульсом при $t=0$ тоді, коли правильними будуть одночасно рівності

$$e^{-\nu T}(\varphi_{0n}\cos\omega_n T+\psi_{0n}\sin\omega_n T)+\alpha_n=\varphi_{0n},$$
$$e^{-\nu T}((\omega_n\psi_{0n}-\nu\varphi_{0n})\cos\omega_n T-(\omega_n\varphi_{0n}+\nu\psi_{0n})\sin\omega_n T)+\beta_n=\psi_{0n}.$$

Підставимо розв'язки $\varphi_{0n}=\varphi_n^*,\ \psi_{0n}=\psi_n^*$ одержаної системи у (5) та (6) і одержимо вигляд простого періодичного розв'язку

$$u^*(x,t)=e^{\tilde c x-\nu t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n^*\cos\omega_n t+\psi_n^*\sin\omega_n t\right)\sin(\tau_n x+\theta_n)\left(0<t<T,\ 0\le x\le l\right)$$

де

$$\varphi_n^*=D_n^{-1}\left(-\alpha_n\omega_n\cos\omega_n T+(\alpha_n\nu+\beta_n)\sin\omega_n T+\alpha_n e^{\nu T}\right),$$
$$\psi_n^*=-D_n^{-1}\left((\alpha_n\nu+\beta_n)\cos\omega_n T+\alpha_n\omega_n\sin\omega_n T-\beta_n e^{\nu T}\right),$$
$$D_n=e^{\nu T}+\nu\sin\omega_n T-(\omega_n+1)\cos\omega_n T+\omega_n e^{-\nu T}$$

та рівняння для знаходження періоду T

$$
\begin{aligned}
& a^2\sum_{n=1}^{\infty} D_n^{-2}\left(\alpha_n\omega_n-(\alpha_n\cos\omega_n T+\beta_n\sin\omega_n T)e^{\nu T}\right)^2\left(\left(\frac{\tau_n^2}{\tilde c}+\tilde c\right)\left(e^{2\tilde c l}-1\right)+\right.\\
& +\frac{\tilde c^2-\tau_n^2}{\lambda_n^2+\tilde c^2}\left(\tau_n\sin 2\theta_n+\tilde c\cos 2\theta_n-e^{2\tilde c l}(\tau_n\sin 2(\tau_n l+\theta_n)+\tilde c\cos 2(\tau_n l+\theta_n))\right)+\\
& +\frac{\tau_n\tilde c}{\tau_n^2+\tilde c^2}\left(\tau_n\cos 2\theta_n-\tilde c\sin 2\theta_n+e^{2\tilde c l}(\tilde c\sin 2(\tau_n l+\theta_n)-\tau_n\cos 2(\tau_n l+\theta_n))\right)+\\
& \qquad \left.+4h_2\sin^2(\tau_n l+\theta_n)+4h_1\sin^2\theta_n\right)+\sum_{n=1}^{\infty} D_n^{-2}\left((\omega_n\psi_{0n}-\nu\varphi_{0n})\cos\omega_n T-\right.\\
& \qquad \left.-(\nu\psi_{0n}+\omega_n\varphi_{0n})\sin\omega_n T\right)^2\left(\frac{e^{2\tilde c l}-1}{\tilde c}-\tau_n\sin 2\theta_n-\tilde c\cos 2\theta_n-\right.\\
& \qquad \left.-\frac{1}{\tau_n^2+\tilde c^2}\left(e^{2\tilde c l}(\tau_n\sin 2(\tau_n l+\theta_n)+\tilde c\cos 2(\tau_n l+\theta_n))\right)\right)=8e^{2\nu T}E_0. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Існування розв'язків рівняння (7) для $T\in(0,+\infty)$ еквівалентне відшуканню нулів функції

$$
\begin{aligned}
& f(T)=a^2\sum_{n=1}^{\infty} D_n^{-2}\left(\alpha_n\omega_n-(\alpha_n\cos\omega_n T+\beta_n\sin\omega_n T)e^{\nu T}\right)^2\left(\left(\frac{\tau_n^2}{\tilde c}+\tilde c\right)\left(e^{2\tilde c l}-1\right)-\right.\\
& -\frac{\tau_n^2-\tilde c^2}{\tau_n^2+\tilde c^2}\left(\tau_n\sin 2\theta_n+\tilde c\cos 2\theta_n-e^{2\tilde c l}(\tau_n\sin 2(\tau_n l+\theta_n)+\tilde c\cos 2(\tau_n l+\theta_n))\right)+\\
& +\frac{\tau_n\tilde c}{\tau_n^2+\tilde c^2}\left(\tau_n\cos 2\theta_n-\tilde c\sin 2\theta_n+e^{2\tilde c l}(\tilde c\sin 2(\tau_n l+\theta_n)-\tau_n\cos 2(\tau_n l+\theta_n))\right)+\\
& \left.+4h_2\sin^2(\tau_n l+\theta_n)+4h_1\sin^2\theta_n\right)+\sum_{n=1}^{\infty} D_n^{-2}\left((\omega_n\psi_{0n}-\nu\varphi_{0n})\cos\omega_n T-\right.\\
& \left.-(\nu\psi_{0n}+\omega_n\varphi_{0n})\sin\omega_n T\right)^2\left(\frac{e^{2\tilde c l}-1}{\tilde c}-\tau_n\sin 2\theta_n-\tilde c\cos 2\theta_n-\right.\\
& \left.-\frac{1}{\tau_n^2+\tilde c^2}\left(e^{2\tilde c l}(\tau_n\sin 2(\tau_n l+\theta_n)+\tilde c\cos 2(\tau_n l+\theta_n))\right)\right)-8e^{2\nu T}E_0, T\in(0,+\infty).
\end{aligned}
$$

Правильні границі $\lim\limits_{T\to+0} f(T)=-\infty$ та $\lim\limits_{T\to+\infty} f(T)=+\infty$. Звідси функція f на проміжку $(0,+\infty)$ за теоремою Больцано-Коші [7, с.168] має принаймні один нуль. Отож, кожному значенню E_0 відповідає принаймні один простий T — періодичний розв'язок задачі (1)-(4). Теорему доведено.

Автор висловлює вдячність В.М. Кириличу за консультації та обговорення результатів.

1. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive differential equations // World Scientific Series on Nonlinear Sciences. Ser. A Vol. 14 – Singapore; – New Jersey; – London; – Hong-Kong: World Scientific, 1995.
2. *Ларин В.Б.* Управление шагающими апаратами – К.: Наук. думка, 1980.
3. *Samoilenko V.Hr., Yelgondyev K.K.* On existence of periodical solutions for differential equations with impulsive effects // Journ. Facta Universitatis. Series: Mechanics, automatic control and robotics. – 1998. – № 2. P. 635–639.
4. *Елгондыев К.К., Хасанов М.* Колебания струны с импульсным воз-действием // Крайові задачі для диф. рівнянь: Зб. наук. пр. Чернівці: Прут, 2002. – Вип. 10. – С. 96–102.
5. *Myshkis A.D.* Vibrations of the string with energy dissipation and ipulsive feedback support // Nonlin. Anal., Theory, Meth & Appl. 1996. Vol. 26, № 7. P. 1271–1278.
6. *Мышкис А.Д.* Автоколебания струны с импульсной обратной связью // Дифференциальные уравнения. 1998. – Т. 34. № 12. С. 1640–1644.
7. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. -М.: Физматлит, 2003.
8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1.

PROBLEM WITH THE IMPULSE EXCITATION FOR THE MODELLING EQUATION OF OSCILLATIONS OF THE STRING

Myroslava Prokhorenko

National university of water management and nature resources use
Soborna Str, 11 33028 Rivne, Ukraine

The problem of existence of periodic solutions of a wave equation with an impulse excitation in the instants defined by a solution is investigated.

Key words: Impulsive partial differential equations, vibrations of string, vibrations with feedback.

Стаття надійшла до редколегії 27.05.2008
Прийнята до друку 19.11.2008