ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 69. С. 93–97 *Ser. Mech.-Mat. 2008. Vol. 69. P. 93–97*

УДК 539.3: 536.424

МОДЕЛЮВАННЯ ФАЗОВОГО ТА НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ СТЕРЖНЯ ПРИ КРУЧЕННІ ЗА СТРУКТУРНИХ ЗМІН

Володимир АСТАШКІН[1], Олександр ГАЧКЕВИЧ[1,2], Олексій ОНИШКО[1], Богдан БОЖЕНКО[2,3]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б 79053 Львів, Україна
[2]Політехніка Опольська, вул. Станіслава Миколайчука, 5 45-271 Ополє, Польща
[3]Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15 79005 Львів, Україна

Запропоновано варіант математичної моделі для кількісного опису термомеханічної поведінки однокомпонентного твердого тіла, в якому під впливом зсувних напружень відбувається структурне перетворення. Прийнято, що ступінь повноти фазового перетворення залежить від інваріантів тензорів напружень і деформацій. Такий підхід дає змогу окремо врахувати вплив формозміни на фазовий склад системи. Як приклад досліджено кручення стержня колового перерізу зі сплаву з пам'яттю форми, яка перебуває в умовах, коли може відбуватися фазове перетворення. Обчислено розподіл залишкових напружень, зумовлених фазовими змінами.

Ключові слова: термомеханіка, інваріанти, структурні перетворення, кручення стержня, залишкові напруження.

У термомеханічних моделях для кількісного опису термомеханічних процесів у деформівних твердих тілах за параметри, які описують механічні процеси, звичайно приймають компоненти тензорів напружень і деформацій. Такий опис зручний, якщо зміни параметрів немеханічних процесів у системі (концентрація, фазовий склад, температура) пов'язані лише зі зміною об'єму. Також відомо, що існують такі процеси в твердих тілах, проходження яких суттєво залежить не лише від зміни об'єму (гідростатичного тиску), а й від зміни форми елемента об'єму, що пов'язана з другим інваріантом тензора напружень чи деформацій. Передусім це стосується фазових перетворень, які можуть відбуватись під впливом зсувних напружень.

Поведінку твердих тіл, в яких відбуваються згадані трансформації внутрішньої будови, зручно описувати за допомогою інваріантів тензорів напружень і деформацій, які можна розглядати як незалежні механічні параметри стану [1]. Інваріантний підхід дає змогу окремо врахувати вплив кульової (зміна об'єму) і девіаторної (зміна форми) частин тензорів напружень і деформацій на фазовий склад системи.

© Асташкін В., Гачкевич О., Онишко О. та ін., 2008

На підставі викладених вище міркувань були сформульовані головні положення макроскопічної термодинамічної моделі для кількісного опису процесу деформування ізотропних твердих тіл, в яких відбуваються фазові (структурні) перетворення, зумовлені впливом всестороннього розтягу – стиску та зсуву [2,3]. Були використані методи механіки суцільного середовища та термодинаміки нерівноважних процесів, які вже неодноразово застосовували раніше для побудови моделей деформівних твердих тіл [4,5].

Мета нашої праці – за допомогою цього підходу дослідити поведінку стержня кругового перерізу, виготовленого зі сплаву, в якому внаслідок дії зсувних напружень відбувається твердофазне мартенситне перетворення (найчастіше такі матеріали в літературі називають "сплавами з пам'яттю форми"). Описуємо, використовуючи сформульовану раніше відповідну математичну модель [6].

В основу використовуваного термодинамічного підходу покладено гіпотезу локальної термодинамічної рівноваги. За параметри стану, що характеризують теплові процеси, вибрано абсолютну температуру T та питому ентропію S. Мартенситне перетворення описується [7] відносним вмістом мартенситу Ξ та питомою спорідненістю перетворення A. Механічні впливи [1], пов'язані зі зміною об'єму, враховуємо через інваріанти тензора напружень σ і тензора деформацій e; механічні впливи, пов'язані зі зміною форми тіла – відповідно через інваріанти σ_i та e_i, де $\sigma = \Pi_1 / 3$ – середній гідростатичний тиск; $e = I_1 / 3$ – відносна зміна середніх лінійних розмірів; $\sigma_i = \sqrt{3\Pi_2 - \Pi_1^2} / \sqrt{2}$; $e_i = \sqrt{3I_2 - I_1^2} / \sqrt{2}$ – інтенсивності напружень і деформацій; $\Pi_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ – 1-й інваріант тензора напружень; $I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – 1-й інваріант тензора деформацій; $\Pi_2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2\right)$ – 2-й інваріант тензора напружень; $I_2 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2\left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2\right)$ – 2-й інваріант тензора деформацій.

Обмежуємося розглядом випадку, коли у вихідному стані матеріал тіла описується певними початковими значеннями $\Xi = \Xi_0$, і внаслідок відповідних теплових і механічних впливів значення Ξ змінюються. За функцію термодинамічного стану вибираємо вільну енергію $F = \; = F(e, e_i, T, \Xi)$. Узагальнене рівняння Гіббса з використанням інваріантів тензорів напружень і деформацій модифікується до вигляду

$$dF = -SdT + \frac{3}{\rho}\sigma de + \frac{1}{\rho}\sigma_i de_i + Ad\Xi. \qquad (1)$$

Тут ρ – густина матеріалу.

Система лінійних рівнянь стану моделі у випадку малого відхилення від початкового рівноважного стану в припущенні, що природний стан є ненапруженим ($T = T_0$, $S = S_0$, $e = 0$, $\sigma = 0$, $e_i = 0$, $\sigma_i = 0$, $\Xi = \Xi_0$, $A = A_0$) запишемо так:

$$
\begin{aligned}
S &= S_0 + \frac{c_t}{T_0} t + \frac{1}{\rho} K \alpha e - K_{t\xi} \xi, \\
3\sigma &= K \left(e - \alpha t - \beta \xi \right), \\
\sigma_i &= G \left(e_i - \beta' \xi \right), \\
A &= A_0 + K_\xi \xi + K_{t\xi} t - \frac{1}{\rho} K \beta e - \frac{1}{\rho} G \beta' e_i,
\end{aligned} \tag{2}
$$

де $t = T - T_0, \quad \xi = \Xi - \Xi_0$.

Коефіцієнти в (2), (3) характеризують певні фізичні властивості матеріалу моделі. Окремі з них відомі і визначені експериментально, фізичний зміст інших такий: c_t – питома теплоємність; K – модуль всестороннього стиску; G – модуль зсуву; α – температурний коефіцієнт об'ємного розширення; $K_{t\xi}$ – коефіцієнт залежності спорідненості j-го перетворення від температури; β – коефіцієнт зміни об'єму при мартенситному перетворенні; β' – коефіцієнт зміни форми при мартенситному перетворенні; K_ξ – коефіцієнт залежності спорідненості мартенситного перетворення від ступеня повноти. Під час запису системи (2) враховано, що в літературі немає будь-яких відомостей про безпосередню залежність параметра σ_i від зміни об'єму та температури.

Розглянемо довгий стержень кругового перерізу радіуса R, виготовлений із сплаву з пам'яттю форми і навантажений моментом кручення M. Приймаємо, що у початковому стані матеріал стержня перебуває в аустенітній фазі (відносний вміст мартенситу $\Xi = 0$). Температура стержня постійна і є в інтервалі, в якому навіть незначні напруження можуть спричинити виникнення мартенситу [7]. Визначимо фазовий склад стержня, який сформується за дії такого навантаження.

Якщо використати циліндричну систему координат з віссю z, скерованою вздовж осі стержня, то відомо, що за такого навантаження відмінною від нуля буде тільки одна складова тензора напружень

$$
\sigma_{\theta z} = \frac{2Mr}{\pi R^4}. \tag{3}
$$

Необхідну умову проходження мартенситного перетворення визначаємо з умови мінімуму вільної енергії F за вмістом мартенситу Ξ за фіксованих значень деформації та температури [7], яка для цієї задачі зводиться до вигляду

$$
K_\xi \Xi + \frac{E \beta'}{3(1+\nu)\rho} e_i = 0. \tag{4}
$$

де E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

З умови (4) і третього з рівнянь (2) з врахуванням (3) одержимо розподіл мартенситу за товщиною стержня

$$\Xi = \frac{4\sqrt{3}(1+\nu)\beta' M r}{\pi R^4 \left[2(1+\nu)\rho K_\xi - E\left(\beta'\right)^2\right]}. \tag{5}$$

Якщо тепер зняти зі стержня прикладене навантаження $(M = 0)$, то для матеріалів з достатньо широкою петлею гістерезису (тобто таких, в яких без додаткових зовнішніх впливів обернене перетворення не відбувається) [7-9] досягнутий фазовий стан у стержні збережеться і відповідатиме (5). Оскільки, як відомо [8,9], перехід матеріалу з аустеніту в мартенсит супроводжується об'ємним ефектом, то в стержні будуть існувати спричинені фазовим перетворенням залишкові напруження. У нашому формулюванні задачі в цих напруженнях буде тільки одна складова, відмінна від нуля, розподіл якої в стержні матиме вигляд

$$\sigma_r = \frac{2\sqrt{3}(1+\nu)\beta'\left(\beta' - 2\beta\right) M r}{\pi R^4 (2-7\nu)\left[2(1+\nu)\rho K_\xi - E\left(\beta'\right)^2\right]}. \tag{6}$$

На підставі формул (4) і (5) проведено обчислення для деяких поширених сплавів з пам'яттю форми. Рис. 1 ілюструє розподіл мартенситу в стержні радіуса $R = 10$ см, спричинений дією моменту кручення $M = 50$ кН·м. На рис. 2 показаний розподіл залишкових напружень, які виникли внаслідок проходження цього перетворення. Лінії 1 відповідають сплаву NiTi [10]: $\rho = 6850$ кг/м^3, $\nu = 0,36$, $E = 116$ ГПа, $\beta = 0,5 \cdot 10^{-3}$, $\beta' = 2 \cdot 10^{-3}$, $K_\xi = 50$ м^2/с^2; лінії 2 – сплаву NiAl: $\rho = 7500$ кг/м^3, $\nu = 0,31$, $E = 173$ ГПа, $\beta = 0,8 \cdot 10^{-3}$, $\beta' = 2 \cdot 10^{-3}$ $K_\xi = 50$ м^2/с^2; лінії 3 – сплаву CuAlNi: $\rho = 8050$ кг/м^3, $\nu = 0,36$, $E = 110$ ГПа, $\beta = 0,3 \cdot 10^{-3}$, $\beta' = 10^{-3}$, $K_\xi = 30$ м^2/с^2; лінії 4 – сплаву CuZn: $\rho = 7920$ кг/м^3, $\nu = 0,31$, $E = 120$ ГПа, $\beta = 0,4 \cdot 10^{-3}$, $\beta' = 1,4 \cdot 10^{-3}$, $K_\xi = 30$ м^2/с^2.

Отож, з допомогою запропонованої моделі можна аналізувати напружено-

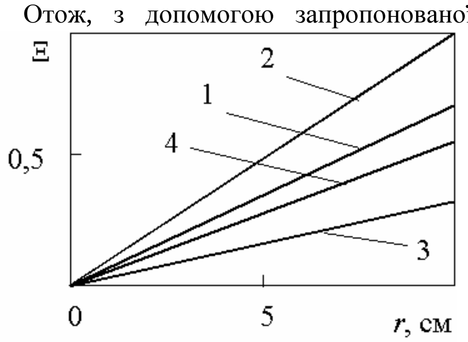

Рис.1.

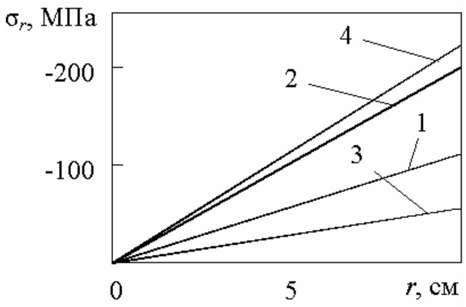

Рис. 2.

деформований стан елементів конструкцій, виготовлених зі сплавів з пам'яттю форми, при мартенситному перетворенні з врахуванням того, що утворення мартенситу спричинене зсувними напруженнями, а зміна об'єму, спричинена цим перетворенням, призводить до виникнення залишкових напружень.

1. *Гольденблат И.И.* Нелинейные проблемы теории упругости. – М., 1969.
2. *Асташкін В., Гачкевич О., Онишко О., Боженко Б.* Моделювання з використанням інваріантів тензорів напружень і деформацій термомеханічних процесів у деформівних твердих тілах при врахуванні структурних перетворень // Машинознавство. – 2003. – № 11. – С. 14–17.
3. *Асташкин В., Боженко Б., Будз С., Онышко А.* Моделирование с ис-пользованием инвариантов тензоров напряжений и деформаций термомеханических процессов в твердых телах при технологическом нагреве // Projektowanie procesow i systemow technologicznych. – Lublin: Societas Scientarium Lublinensis, 2003. – С. 164–170.
4. *Підстригач Я.С., Бурак Я.Й.* Деякі аспекти побудови нових моделей механіки твердого тіла з урахуванням електромагнітних процесів // Вісн. АН УРСР. – 1970. – № 12. – С. 18–31.
5. *Асташкин В.И., Бурак Я.И., Онышко А.Е.* Термодинамическое описа-ние неравновесных процессов в деформируемых телах в области структурных превращений // Термодинамика необратимых процес-сов. – М.: Наука, 1987. – С. 177–185.
6. *Онишко О., Боженко Б., Новацький В.* Моделювання термомеханічних явищ в матеріалах з пам’яттю форми // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, 2003. – С. 71–73.
7. *Асташкін В.І., Будз С.Ф., Онишко О.Є.* Кількісний опис фізико-механічних процесів у матеріалах з пам’яттю форми // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. - № 4. – С. 60–66.
8. *Лихачёв В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П.* Эффект памяти формы. – Изд-во Ленингр. ун-та, 1987.
9. Сплавы с эффектом памяти формы / Под ред. Х. Фунакубо. – М., 1990.
10. *Онишко О.Є., Асташкін В.І.* Розрахунок фазового та напруженого стану консольного елемента давача температури при дії силового навантаження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 2. – С. 142–145.

MODELLING OF BEAM PHASE AND STRESS STATE UNDER TORSION DURING STRUCTURAL CHANGES

Volodimir Astashkin[1], Oleksandr Gachkevich[1,2], Oleksiy Onishko[1], Bogdan Bogenko[2,3]

[1]*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,*
Naukova Str., 3b 79053 Lviv, Ukraine
[2]*Technical University of Opole,*
Stanislawa Mikolajchuka Str., 5 45-271 Opole, Poland
[3]*Center of mathematical modeling,*
Dudayeva Str., 15 79005 Lviv, Ukraine

A model for quantitative description of a thermomechanical behavior of deformable solids allowing for structure transformations with use of stress and strain tensor invariants is proposed. Such approach takes into account the influence both of volume and shape changes on the system phase structure. As example, torsion of round beam made of shape memory alloy is investigated. The distribution of residual stresses induced by phase changes is obtained.

Key words: thermo-mechanics, invariant, structural transformations, twisting of bar, remaining tensions.

Стаття надійшла до редколегії 27.11.2007
Прийнята до друку 19.11.2008