ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ — VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2009. — Ser. Mech. Math. 2009.
Вип. 70. С. 122–127 — Is. 70. P. 122–127

УДК 517.53

БЛИЗЬКІСТЬ ДО ОПУКЛОСТІ ЦІЛОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ярослав МАГОЛА, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Досліджено близькість до опуклості цілого розв'язку лінійного диференціального рівняння

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} (a_{n-j}^{(j)} z^{j+1} + a_{n-j+1}^{(j)} z^j) w^{(j)} = 0.$$

Ключові слова: ціла функція, диференціальні рівняння, близькість до опуклості.

1. Вступ. Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Добре відомо [1, с. 203], що умова $\mathrm{Re}\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0 (z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою для опуклості функції f в $\mathbb{D}$. Функція f називається [1, с. 583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує така опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ, що $\mathrm{Re}\{f'(z)/\Phi'(z)\} > 0 (z \in \mathbb{D})$. Кожна близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція є однолистою в $\mathbb{D}$ і $f_1 \neq 0$ [1, с. 583]. Близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція f характеризується тим, що $f(\mathbb{D})$ – лінійно досяжна зовні область [1, с. 584], тобто $\mathbb{C}\setminus\overline{f(\mathbb{D})}$ можна заповнити проведеними з $\partial f(\mathbb{D})$ променями, які належать до $\mathbb{C}\setminus\overline{f(\mathbb{D})}$. Оскільки $f_1 \neq 0$, то звідси випливає, що функція (1) близька до опуклої в $\mathbb{D}$ тоді і лише тоді, коли близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ є функція $f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n/f_1) z^n$.

С. Шах [2], вивчаючи властивості цілих розв'язків диференціального рівняння

$$z^2 w'' + (a_1^{(1)} z^2 + a_2^{(1)} z) w' + (a_2^{(0)} z + a_3^{(0)}) w = 0, \tag{2}$$

довів таку теорему.

Теорема А. *Нехай* $a_2^{(1)} > 0$ *і* $-1 \leqslant a_1^{(1)} < 0$. *Якщо або* $a_3^{(0)} = 0$ *і* $-a_2^{(1)} \leqslant a_2^{(0)} < 0$, *або* $a_2^{(1)} + a_3^{(0)} = 0$ *і* $-a_2^{(1)} \leqslant 2a_2^{(0)} < 0$, *то диференціальне рівняння* (2) *має цілий розв'язок* (1) *такий, що всі похідні* $f^{(j)}$ $(j \in \mathbb{Z}_+)$ *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями і* $\ln M_f(r) = (1+o(1))|a_1^{(1)}|r$ *при* $r \to +\infty$, *де* $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Безпосереднім узагальненням рівняння (2) є лінійне диференціальне рівняння

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} (a_{n-j}^{(j)} z^{j+1} + a_{n-j+1}^{(j)} z^j) w^{(j)} = 0. \tag{3}$$

Мета нашої праці – дослідити властивості цілого розв'язку рівняння (3), тобто отримати аналог теореми А для $n \geqslant 3$.

2. Рекурентна формула для коефіцієнтів і зростання розв'язку. Припустимо, що функція (1) є розв'язком рівняння (3), і приймемо $a_1^{(n)} = 1$. Підставляючи (1) в (3) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z (для скорочення обсягу статті деталі опустимо), отримаємо таке твердження.

Лема 1. *Функція* (1) *є розв'язком рівняння* (3) *тоді і лише тоді, коли*

$$a_{n+1}^{(0)} f_0 = 0, \tag{4}$$

$$(a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)}) f_1 + a_n^{(0)} f_0 = 0 \tag{5}$$

і для $s \geqslant 2$

$$\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{s!}{(s-k)!} f_s + \sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} a_{n-k}^{(k)} \frac{(s-1)!}{(s-k-1)!} f_{s-1} = 0. \tag{6}$$

Для $s \geqslant n$ з (6) одержуємо

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(s-k)!} s f_s + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k}^{(k)}}{(s-k-1)!} f_{s-1} = 0. \tag{7}$$

Оскільки $a_1^{(n)} = 1$, то

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(s-k)!} = \frac{a_1^{(n)}}{(s-n)!} + \frac{a_2^{(n-1)}}{(s-n+1)!} + \dots + \frac{a_{n-1}^{(0)}}{s!} = \frac{1+o(1)}{(s-n)!}, \quad s \to \infty.$$

З іншого боку, якщо $a_1^{(n-1)} \neq 0$, то подібно

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k}^{(k)}}{(s-k-1)!} = \frac{(1+o(1)) a_1^{(n-1)}}{(s-n)!}, \quad s \to \infty.$$

Тому з (7) випливає асимптотична рівність $f_s = -\dfrac{(1+o(1))}{s} a_1^{(n-1)} f_{s-1} (s \to \infty)$, звідки звичайними методами неважко показати, що правильне таке твердження.

Лема 2. *Якщо* $a_1^{(n-1)} \neq 0$, *то для цілого розв'язку* (1) *диференціального рівняння* (3) $\ln M_f(r) = (1+o(1))|a_1^{(n-1)}|r$ *при* $r \to +\infty$.

3. Близькість до опуклості. Як і в [2], використовуватимемо такий критерій Александера [3, с. 9].

Лема 3. *Якщо*

$$f(z) = z + \sum_{s=2}^{\infty} f_s z^s \tag{8}$$

і

$$1 \geqslant 2f_2 \geqslant 3f_3 \geqslant \dots \geqslant (s-1)f_{s-1} \geqslant sf_s \geqslant \dots \geqslant 0, \tag{9}$$

то f є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.

З огляду на лему 3, будемо спочатку шукати розв'язок диференціального рівняння (3) у вигляді (8). Тоді $f_0 = 0, f_1 = 1$, з (5) випливає рівність $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$, а з (6) для $s \geqslant 2$ маємо

$$sf_s = -\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k)}}{(s-k-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(s-k)!}} f_{s-1} = -\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k)}}{(s-k-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\min\{s,n\}} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(s-k)!} + \frac{a_{n+1}^{(0)}}{s!}} f_{s-1} =$$

$$= -\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k)}}{(s-k-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s-k-1)!} + \frac{a_{n+1}^{(0)}}{s!}} f_{s-1}. \tag{10}$$

Використовуючи (10), неважко довести таке твердження.

Лема 4. *Нехай $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$, $a_{n-k}^{(k)} \leqslant 0$, та $a_{n-k}^{(k+1)} \geqslant 0$ для всіх $0 \leqslant k \leqslant n-1$ і $\sum\limits_{k=1}^{n-1} |a_{n-k}^{(k)}|^2 > 0$. Тоді, якщо $|a_{n-k}^{(k)}| \leqslant a_{n-k}^{(k+1)}$ для всіх $0 \leqslant k \leqslant n-1$, то існує цілий розв'язок (8) диференціального рівняння (3) такий, що всі похідні $f^{(j)}$ $(j \in \mathbb{Z}_+)$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями.*

Доведення. З рівності (10) для $s \geqslant 2$ маємо

$$sf_s = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{|a_{n-k}^{(k)}|}{(s-k-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s-k-1)!} + \frac{a_{n+1}^{(0)}}{s!}} f_{s-1} \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s-k-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s-k-1)!}} f_{s-1} \leqslant (s-1)f_{s-1},$$

тобто виконується умова (9) і за лемою 3 функція (8) є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.

Нехай тепер $p \in \mathbb{N}$ – фіксоване число. Оскільки

$$f^{(p)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f_s^{(p)} z^s, \qquad f_s^{(p)} = \frac{(s+p)!}{s!} f_{s+p},$$

то похідна $f^{(p)}$ є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ тоді і лише тоді, коли функція

$$F_p(z) = \frac{f^{(p)}(z) - f_0^{(p)}}{f_1^{(p)}} = z + \sum_{s=2}^{\infty} f_{s,p} z^s$$

є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, де $f_{0,p} = 0$, $f_{1,p} = 1$ і для $s \geqslant 2$, з огляду на (8),

$$f_{s,p} = \frac{f_s^{(p)}}{f_1^{(p)}} = \frac{(s+p)!}{s!(1+p)!} \frac{f_{s+p}}{f_{1+p}} =$$

$$= -\frac{(s+p)!}{s!(1+p)!f_{1+p}} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s+p,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k)}}{(s+p-k-1)!}}{\displaystyle(s+p) \sum_{k=0}^{\min\{s+p,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s+p-k-1)!} + \frac{a_{n+1}^{(0)}}{(s+p)!}} f_{s+p-1} =$$

$$= -\frac{(s+p)!}{s!(1+p)!f_{1+p}} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s+p,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k)}}{(s+p-k-1)!}}{\displaystyle(s+p) \sum_{k=0}^{\min\{s+p,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s+p-k-1)!} + \frac{a_{n+1}^{(0)}}{(s+p)!}} \times$$

$$\times \frac{(s-1)!(1+p)!f_{1+p}}{(s+p-1)!} f_{s-1,p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s+p,n\}-1} \frac{|a_{n-k}^{(k)}|}{(s+p-k-1)!}}{\displaystyle s \sum_{k=0}^{\min\{s+p,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s+p-k-1)!}} f_{s-1,p} \leqslant \frac{f_{s-1,p}}{s},$$

звідки за лемою 3 $f^{(p)}$ є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ функцією. Лему 4 доведено. □

Умови леми 1 виконуються також, якщо $a_{n+1}^{(0)} = 0$ і $a_n^{(0)} \neq 0$. Тоді, якщо $f_1 = 1$, то $f_0 = a_n^{(1)}/a_n^{(0)}$, і отже, розв'язок диференціального рівняння (3) треба шукати у вигляді

$$f(z) = \frac{a_n^{(1)}}{a_n^{(0)}} + z + \sum_{s=2}^{\infty} f_s z^s, \tag{11}$$

де коефіцієнти f_s для $s \geqslant 2$ визначаються рекурентною формулою (6), тобто тією ж рекурентною формулою (10), але з $a_{n+1}^{(0)} = 0$. Тому, повторюючи доведення леми 4, отримуємо таку лему.

Лема 5. *Нехай $a_{n+1}^{(0)} = 0$, $a_n^{(0)} < 0$ і $a_{n-k}^{(k)} \leqslant 0$ та $a_{n-k}^{(k+1)} \geqslant 0$ для всіх $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Тоді, якщо $|a_{n-k}^{(k)}| \leqslant a_{n-k}^{(k+1)}$ для всіх $0 \leqslant k \leqslant n-1$, то існує цілий розв'язок (11) диференціального рівняння (3) такий, що всі похідні $f^{(j)} (j \in \mathbb{Z}_+)$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями.*

Об'єднуючи леми 2, 4, і 5, у результаті отримаємо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $a_{n-k}^{(k)} \leqslant 0$, $a_{n-k}^{(k+1)} \geqslant 0$ *і* $|a_{n-k}^{(k)}| \leqslant a_{n-k}^{(k+1)}$ *для всіх* $0 \leqslant k \leqslant n-1$. *Припустимо, що* $a_1^{(n-1)} < 0$ *і або* $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$, *або* $a_{n+1}^{(0)} = 0$ *і* $a_n^{(0)} < 0$. *Тоді існує цілий розв'язок* (1) *диференціального рівняння* (3) *такий, що всі похідні* $f^{(j)}$ $(j \in \mathbb{Z}_+)$ *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями і* $\ln M_f(r) = (1+o(1))|a_1^{(n-1)}|r$ *при* $r \to +\infty$.

На завершення зауважимо, що для $n = 2$, враховуючи рівність $a_1^{(n)} = 1$, з теореми 1 отримуємо таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $a_2^{(1)} > 0$, $-1 \leqslant a_1^{(1)} < 0$ *і* $-a_2^{(1)} \leqslant a_2^{(0)} < 0$. *Якщо або* $a_3^{(0)} = 0$, *або* $a_2^{(1)} + a_3^{(0)} = 0$, *то диференціальне рівняння* (2) *має цілий розв'язок* (1) *такий, що всі похідні* $f^{(j)}(j \in \mathbb{Z}_+)$ *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями і* $\ln M_f(r) = (1+o(1))|a_1^{(1)}|r$ *при* $r \to +\infty$.

Цей наслідок дещо загальніший від теореми A, бо з умови $-a_2^{(1)} \leqslant 2a_2^{(0)} < 0$ випливає умова $-a_2^{(1)} \leqslant a_2^{(0)} < 0$.

---

1. *Markovitz H.M.* Portfolio Selection / *Markovitz H.M.* // Journal of Finance. – Vol. 7. – 1952 (March) – P. 77-91.
2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного / *Голузин Г.М.* – М., 1966.
3. *Shah S.M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II / *Shah S.M.* // J. Math. anal. and appl. – 1989. – Vol. 142. – P. 422-430.
4. *Goodman A.W.* Ivalent functions / *Goodman A.W.* // Mariner Publishing. Co., – Vol. II. – 1983.

CLOSE-TO-CONVEXITY OF ENTIRE SOLUTION OF A LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS

Yaroslav MAHOLA, Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Close-to-convexity of an entire solution of a linear differential equation

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} (a_{n-j}^{(j)} z^{j+1} + a_{n-j+1}^{(j)} z^j) w^{(j)} = 0$$

is investigated.

Key words: entire function, differential equation, close-to-convexity.

БЛИЗОСТЬ К ВЫПУКЛОСТИ ЦЕЛОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ярослав МАГОЛА, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Исследована близость к выпуклости целого решения линейного дифференциального уравнения

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} (a_{n-j}^{(j)} z^{j+1} + a_{n-j+1}^{(j)} z^j) w^{(j)} = 0.$$

Ключевые слова: целая функция, дифференциальные уравнения, близость к выпуклости.

Стаття надійшла до редколегії 20.03.2008

Прийнята до друку 12.06.2009