ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 45–51 *Is. 70. P. 45–51*

УДК 517.53

ПРО ПРАВИЛЬНЕ ЗРОСТАННЯ СУПЕРПОЗИЦІЇ РЯДУ ДІРІХЛЕ І ЗРОСТАЮЧОЇ ФУНКЦІЇ

Мирослава ДОЛИНЮК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ira0201@rambler.ru

Для додатного збіжного для всіх $x \geq 0$ ряду $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n e^{\tau(x)\beta_n}$, $F_n \geqslant 0$, $(n \geqslant 0)$, де $\tau(x)$ – зростаюча диференційовна функція, $\{\beta_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, отримано умови правильного зростання порядку $\rho > 0$ функції $\ln F(x)$.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, правильне зростання.

1. Вступ. *Повільно змінною функцією* називатимемо ([1]) кожну додатну вимірну на $[0; +\infty)$ функцію ℓ, для якої $\ell(2x) = (1 + o(1))\ell(x)$ $(x \to +\infty)$. Клас таких функцій позначатимемо через L. Через L^+ позначимо клас неспадних до $+\infty$ функцій $\ell \in L$. Нехай також L_ρ – *клас правильно зростаючих функцій порядку* $\rho \in (0; +\infty)$, тобто додатних неспадних функцій ℓ таких, що $\ell(x) = x^\rho \alpha(x)$, $\alpha \in L$. Питання про умови належності різних характеристик зростання цілих функцій до класів L та L_ρ природно виникають у зв'язку з дослідженнями з теорії розподілу значень. У статтях [2-4] автори шукали умови належності логарифмів максимуму модуля і характеристики Неванлінни цілої функції, центрального індексу і максимального члена її степеневого ряду до зазначених класів. У [5] знайдено умови належності функцій $\ln F(x)$ і $\ln \mu(x, F)$ до класів L^+ і L_ρ, $\rho \geq 1$, для функцій F, зображуваних збіжними для всіх $x \geqslant 0$ рядами вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad F_n \geqslant 0 \quad (n \geqslant 0), \tag{1}$$

де $\lambda = \{\lambda_n : n \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $\beta = \{\beta_n : n \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $\tau(x)$ – неспадна неперервно диференційовна на $[0, +\infty)$ функція така, що $\tau(0) = 0$ і $\tau(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$. Клас функцій вигляду (1) позначаємо через $S\ (\lambda, \beta, \tau)$.

Варто зазначити, що функції вигляду (1) є природним узагальненням степеневих рядів і рядів Діріхле.

Мета нашої праці – довести подібні твердження про належність до класу L_ρ у випадку $\rho \in (0;1)$.

Для $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$ і $x \geqslant 0$ позначимо $\mu(x,F) = \max\{F_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n} : n \geqslant 0\}$, а через $\nu(x) = \nu(x,F) = \sup\{n : \ F_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n} = \mu(x,F)\}$ – центральний індекс ряду. Не складно переконатись в такому: якщо $\sharp\{n : F_n > 0\} = +\infty$ і $\ln F \in L_\rho$, $0<\rho<1$, або $\ln\mu(\cdot,F) \in L_\rho$, то $\lambda_n \equiv 0$ $(n \geqslant 0)$. Справді, якщо $\ln\mu \in L_\rho$, $0<\rho<1$, то існує функція $\alpha \in L$ така, що $\ln\mu(x,F) = x^\rho\alpha(x)$. Але, тоді $\ln F_n + x\lambda_n + \tau(x)\beta_n \leqslant \ln\mu(x,F) = x^\rho\alpha(x)$ для всіх $x>0$ і $n \geqslant 0$. Звідси, $\frac{1}{x}\ln F_n + \lambda_n + \frac{\tau(x)}{x}\beta_n \leqslant \frac{\alpha(x)}{x^{1-\rho}}$, $x>0$, $n>1$. Зауважимо тепер таке: якщо $\alpha \in L$, то для кожного $c>0$

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x)x^{-c} = 0. \tag{2}$$

Звідси $\lambda_n = 0$ $(n \geq 0)$, а також $(\forall\ n):\ \beta_n \leq \varliminf\limits_{x\to+\infty} x^\rho\alpha(x)/\tau(x)$, тобто,

$$\gamma := \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\tau(x)}{x^\rho\alpha(x)} \leq 1/\beta^*, \qquad \beta^* := \sup\{\beta_n :\ n \geq 0\}. \tag{3}$$

Зокрема, якщо $\beta^* = +\infty$, то $\gamma = 0$. Подібно і у випадку $\ln F \in L_\rho$, позаяк $\mu(x,F) \leq F(x)$ $(x \geq 0)$.

Тому у випадку, коли $\ln\mu(x,F) \leq x^\rho\alpha(x)$ $(x \geq 0)$ і $\rho \in (0;1)$, ряд (1) переписуємо у вигляді суперпозиції ряду Діріхле і функції $\tau(x)$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n e^{\tau(x)\beta_n}, \tag{4}$$

де $\beta = (\beta_n)$ – послідовність попарно різних невід'ємних чисел, а $\tau(x)$ необхідно задовольняє умову (3). Як і в [6] вважатимемо, що виконується умова

$$(\forall\ n \geq 0):\ \beta_n < \beta^* := \sup\{\beta_m :\ m \geq 0\}. \tag{5}$$

З доведення леми 2 у статті [6] випливає, що за останньої умови для кожної функції f вигляду (4) центральний індекс $\nu(x,F) \nearrow +\infty$ $(x \to +\infty)$.

Нехай тепер $\varkappa_n \nearrow +\infty$ $(1 \leq n \to +\infty)$ – послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(x,F)$ занумерована так, що

$$\mu(x,F) = F_n \exp\{\tau(x)\beta_n\} \tag{6}$$

для всіх $x \in [\varkappa_n;\varkappa_{n+1}]$ у випадку $\varkappa_n < \varkappa_{n+1}$, а також $\varkappa_{n+1} = \ldots = \varkappa_{n+p}$, якщо $\nu(\varkappa_{n+1}-0) = n$ і $\nu(\varkappa_{n+1}) = n+p$, $p>1$. Добре відомо, що тоді при $n \geq 1$

$$\tau(\varkappa_n) = \frac{\ln(F_{n-1}/F_n)}{\beta_n - \beta_{n-1}} \nearrow +\infty \quad (n \to +\infty). \tag{7}$$

У цьому випадку $(\ln\mu(x,F))' = \tau'(x)\beta_{\nu(x,F)}$ для всіх $x \in (\varkappa_n;\varkappa_{n+1})$ і всіх $n \geqslant 0$.
І, отже, для всіх $x > x_0$ правильна рівність ([7])

$$\ln\mu(x,F) = \ln\mu(x_0,F) + \int_{x_0}^{x} \beta_{\nu(t)}d\tau(t). \tag{8}$$

Зауваження 1. Зауважимо, що у випадку, коли $\beta^* := \sup\{\beta_n :\ n \geq 0\} < +\infty$, $\ln\mu(x,F) = (1+o(1))\ln F(x) = (1+o(1))\beta^*\tau(x)$ $(x \to +\infty)$ і, отже, $\ln\mu(\cdot,F) \in L_\rho \Leftrightarrow \Leftrightarrow \ln F(\cdot) \in L_\rho \Leftrightarrow \tau \in L_\rho$. Тому надалі вважатимемо, що $\beta^* = +\infty$.

2. Допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай $\rho > 0$, $\tau(x)$ – неперервно диференційовна функція така, що $x^2\tau'(x) \nearrow$ $(x \to +\infty)$, а також послідовність $\beta = (\beta_n)$ така, що виконується умова (5) з $\beta^* = +\infty$. Тоді такі твердження рівносильні:*

1) $\ln\mu(\cdot, F) \in L_\rho$;

2) $\psi(x)/\ln\mu(x, F) \to \rho$ $(x \to +\infty)$, де $\psi(x) = x\tau'(x)\beta_{\nu(x)}$;

3) $\psi \in L_\rho$.

Доведення. Повторюємо міркування з доведення відповідного твердження з [5].

3) $\Rightarrow$ 2). Оскільки для довільної додатної повільно змінної функції ψ_0 виконується

$$\int_0^r x^{\rho-1}\psi_0(x)dx \sim \frac{r^\rho}{\rho}\psi_0(r) \quad (r \to +\infty),$$

а з умови 3 випливає, що $\psi(x) = x^\rho\psi_0(x)$, де ψ_0 - повільно змінна функція, то

$$\frac{\psi(r)}{\ln\mu(r, F)} = \frac{\psi(r)}{\ln\mu(x_0, F) + \int_{x_0}^r \psi(t)/tdt} \sim \frac{r^\rho\psi_0(r)}{\int_0^r x^{\rho-1}\psi_0(x)dx} \sim \rho \quad (r \to +\infty).$$

2) $\Rightarrow$ 1). З рівності (8) за допомогою 2 отримуємо, що

$$\ln\mu(x, F) \sim \int_{x_0}^x \frac{\psi(t)}{t}dt \sim \rho\int_{x_0}^x \frac{\ln\mu(t, F)}{t}dt := \rho x^\rho\psi_1(x) \quad (x \to +\infty). \tag{9}$$

Оскільки функція ψ_1 неперервно-диференційовна при $x > x_0$, то достатньо перевірити, чи $x\psi_1'(x)/\psi_1(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$. Використовуючи співвідношення (9), при $x \to +\infty$ отримуємо

$$\frac{x\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} = \frac{x(x^{-\rho}\int_{x_0}^x \frac{1}{t}\ln\mu(t, F)dt)'}{\psi_1(x)} = \frac{x^{-\rho}\ln\mu(x, F) - x\rho x^{-\rho-1}\int_{x_0}^x \frac{1}{t}\ln\mu(x, F)dt}{\psi_1(x)} =$$

$$= \frac{\ln\mu(x, F)}{x^\rho\psi_1(x)} - \frac{\rho\int_{x_0}^x \frac{1}{t}\ln\mu(t, F)dt}{x^\rho\psi_1(x)} = \frac{\ln\mu(x, F)}{\int_{x_0}^x \frac{1}{t}\ln\mu(t, F)dt} - \rho = \rho + o(1) - \rho = o(1).$$

1) і 2) $\Rightarrow$ 3).

Оскільки з умови 2 випливає, що для вимірної функції

$$\alpha_2(x) = \psi(x)/\ln\mu(x, F) \to \rho \quad (x \to +\infty),$$

а за умовою 1, $\ln\mu(x, F) = x^\rho\alpha(x)$, $\alpha \in L$, то $\psi(x) = x^\rho\alpha_1(x)$, $\alpha_1 = \alpha \cdot \alpha_2 \in L$, тобто, $\psi \in L_\rho$.

Отже, для завершення доведення леми 1 достатньо перевірити, чи з 1 випливає 2. Справді, нехай $c > 1$, $x > 0$. Оскільки

$$\ln\mu(cx, F) \geqslant \ln F_{\nu(cx)} + \tau(cx)\beta_{\nu(cx)} \geqslant \ln F_{\nu(x)} + \tau(cx)\beta_{\nu(x)},$$

то з одного боку,

$$\ln\mu(cx, F) - \ln\mu(x, F) \geqslant (\tau(cx) - \tau(x))\beta_{\nu(x)}, \tag{10}$$

а з іншого –

$$\ln\mu(x, F) - \ln\mu(x/c, F) \leqslant (\tau(x) - \tau(x/c))\beta_{\nu(x)}. \tag{11}$$

У випадку, коли виконується умова $x^2\tau'(x) \nearrow$, отримуємо, що

$$\tau(cx)-\tau(x)=\int_x^{cx} t^2\tau'(t)t^{-2}dt \geqslant x^2\tau'(x)\int_x^{cx} t^{-2}dt=\frac{c-1}{c}\cdot x\tau'(x),$$

$$\tau(x)-\tau(x/c)=\int_{x/c}^{x} t^2\tau'(t)t^{-2}dt \leqslant x^2\tau'(x)\int_{x/c}^{x} t^{-2}dt=(c-1)x\tau'(x),$$

тому за допомогою нерівностей (10), (11) отримуємо $\ln\mu(cx,F)-\ln\mu(x,F)\geqslant\frac{c-1}{c}\cdot\psi(x)$, а також $\ln\mu(x,F)-\ln\mu(x/c,F)\leqslant(c-1)\psi(x)$. Звідси,

$$\frac{1}{c-1}\Big(1-\frac{\ln\mu(x/c,F)}{\ln\mu(x,F)}\Big)\leqslant\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)}\leqslant\frac{c}{c-1}\Big(\frac{\ln\mu(cx,F)}{\ln\mu(x,F)}-1\Big).$$

Перехід до границі, позаяк $\ln\mu(bx,F)/\ln\mu(x,F)\to b^\rho$ $(x\to+\infty)$, $b>0$, дає

$$\frac{1}{c-1}(1-\frac{1}{c^\rho})\leqslant\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)}\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)}\leqslant\frac{c}{c-1}(c^\rho-1).$$

Перехід в останніх нерівностях до границі при $c\to1+0$ завершує доведення леми. $\square$

Лема 2 ([5], лема 3)**.** *Нехай функція $\tau(x)\nearrow+\infty$ $(n\to+\infty)$. Припустимо, що (F_n) впорядкована за незростанням, тобто $F_n\searrow0$ $(n\to+\infty)$. Якщо $F\in S(0,\beta,\tau)$ і виконується умова*

$$\theta=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\beta_n\ln n}{-\ln F_n}<+\infty, \tag{12}$$

то при $x\to+\infty$ виконується співвідношення

$$\ln F(x)=(1+o(1))\ln\mu(x,F). \tag{13}$$

3. Основний результат.

Теорема 1. *Нехай $\rho>0$, виконуються умови леми 1 і $F\in S(0,\beta,\tau)$. Якщо виконується умова (12), то умова $\ln F\in L_\rho$ і твердження 1-3 леми 1 еквівалентні.*

Теорема 2 містить необхідні і достатні умови (в термінах обмежень на коефіцієнти та показники ряду) для того, щоб $\ln\mu(\cdot,F)\in L_\rho,\ \rho>0$.

Теорема 2. *Нехай $\rho>0$, $\tau(x)$ – додатна зростаюча неперервно диференційовна функція така, що $x^2\tau'(x)\nearrow$ і $\dfrac{x\tau'(x)}{\tau(x)}\searrow$ $(x>0)$, а для послідовності $\beta=(\beta_n)$ виконується умова (5) з $\beta^*=+\infty$. Якщо $F\in S(0,\beta,\tau)$, то для того, щоб $\ln\mu(\cdot,F)\in L_\rho$ необхідно і достатньо, щоб існувала така зростаюча до $+\infty$ послідовність $(\varkappa_{n_k})$, що $\mu(x,F)=F_{n_k}\exp\{\tau(x)\beta_{n_k}\}$ для всіх $x\in[\varkappa_{n_k};\varkappa_{n_{k+1}}]$ і для всіх $k\geqslant1$, а також при $k\to+\infty$ виконувалися умови:*

$$\frac{\tau'(\varkappa_{n_{k+1}})}{\tau(\varkappa_{n_{k+1}})}\cdot\varkappa_{n_{k+1}}\sim\frac{\tau'(\varkappa_{n_k})}{\tau(\varkappa_{n_k})}\cdot\varkappa_{n_k}, \tag{14}$$

$$\frac{\varkappa_{n_k}\tau'(\varkappa_{n_k})\beta_{n_k}}{\ln F_{n_k}+\tau(\varkappa_{n_k})\beta_{n_k}}\to\rho, \tag{15}$$

$$\frac{\varkappa_{n_{k+1}}\tau'(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k}}{\ln F_{n_k}+\tau(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k}}\to\rho. \tag{16}$$

Доведення теореми 2. Не зменшуючи загальності міркувань, вважатимемо, що $\mu(0, F) = 1$. Тоді, як не складно перевірити $\dfrac{\ln \mu(x, F)}{\tau(x)} \nearrow$ $(x \in [0; +\infty))$.

З огляду на доведені вище твердження, достатньо довести, що умова 2 з леми 1

$$\psi(x)/ \ln \mu(x, F) \to \rho \quad (x \to +\infty),$$

де $\psi(x) = x\tau'(x)\beta_{\nu(x)}$, виконується тоді і лише тоді, коли виконуються умови (14)-(16). Центральний індекс $\nu(x, F) \nearrow +\infty$ $(x \to +\infty)$, тому існує послідовність $\varkappa_{n_k} \uparrow +\infty$ така, що $\nu(x, F) = n_k$ для всіх $x \in [\varkappa_{n_k}; \varkappa_{n_{k+1}})$, а отже, $\mu(x, F) = F_{n_k} \exp\{\tau(x)\beta_{n_k}\}$ для всіх $[\varkappa_{n_k}; \varkappa_{n_{k+1}}]$. Якщо тепер в п. 2 леми 1 вибрати спочатку $x = \varkappa_{n_k}$, а потім спрямувати $x \to (\varkappa_{n_{k+1}} - 0)$, то отримуємо відповідно (15) і (16), позаяк

$$\ln F_{n_k} + \tau(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k} = \ln F_{n_{k+1}} + \tau(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_{k+1}} = \ln \mu(\varkappa_{n_{k+1}}, F). \tag{17}$$

Оскільки з (15) і (16) випливає, що

$$\frac{\varkappa_{n_k}\tau'(\varkappa_{n_k})}{\ln \mu(\varkappa_{n_k}, F)} \sim \frac{\varkappa_{n_{k+1}}\tau'(\varkappa_{n_{k+1}})}{\ln \mu(\varkappa_{n_{k+1}}, F)} \quad (k \to +\infty),$$

то зі зростання $\ln \mu(x, F)/\tau(x)$ отримуємо

$$1 \leqslant \frac{\ln \mu(\varkappa_{n_{k+1}}, F)}{\tau(\varkappa_{n_{k+1}})} \frac{\tau(\varkappa_{n_k})}{\ln \mu(\varkappa_{n_k}, F)} =$$

$$= (1 + o(1))\frac{\tau'(\varkappa_{n_{k+1}})\varkappa_{n_{k+1}}}{\tau(\varkappa_{n_{k+1}})} \frac{\tau(\varkappa_{n_k})}{\tau'(\varkappa_{n_k})\varkappa_{n_k}} \leq (1 + o(1)) \quad (k \to +\infty).$$

Отже, (14) – теж виконується.

Для доведення достатності умов (14) – (16) зауважимо, що за умови $\dfrac{x\tau'(x)}{\tau(x)} \searrow$ з умови (14) випливає, що для всіх $x \in [\varkappa_{n_k}; \varkappa_{n_{k+1}})$ при $k \to +\infty$

$$\frac{x\tau'(x)}{\tau(x)} \sim \frac{\tau'(\varkappa_{n_k})}{\tau(\varkappa_{n_k})} \cdot \varkappa_{n_k}.$$

Тому, для всіх $x \in [\varkappa_{n_k}; \varkappa_{n_{k+1}})$, скориставшись монотонністю $\ln \mu(x, f)/\tau(x)$ і умовою (15), при $k \to +\infty$ отримуємо

$$\frac{\psi(x)}{\ln \mu(x, F)} = \frac{x\tau'(x)\beta_{n_k}}{\ln \mu(x, F)} = (1 + o(1))\frac{\varkappa_{n_k}\tau'(\varkappa_{n_k})\beta_{n_k}}{\tau(\varkappa_{n_k})} \frac{\tau(x)}{\ln \mu(x, F)} \leqslant \rho + o(1),$$

з іншого боку, скориставшись монотонністю $\ln \mu(x, f)/\tau(x)$ і умовою (16), маємо

$$\frac{\psi(x)}{\ln \mu(x, F)} = \frac{x\tau'(x)\beta_{n_k}}{\ln \mu(x, F)} = (1 + o(1))\frac{\varkappa_{n_{k+1}}\tau'(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k}}{\tau(\varkappa_{n_{k+1}})} \frac{\tau(x)}{\ln \mu(x, F)} \geqslant \rho + o(1).$$

У цьому разі ми знову скористались рівностями (17). Теорему 2 доведено.

Зауваження 2. Нехай $\rho > 0$ і функція F зображається збіжним для всіх $x \geqslant e$ рядом вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{\beta_n}, \quad F_n \geqslant 0 \quad (n \geqslant 0),$$

де послідовність $\beta = (\beta_n)$ задовольняє умову (5) з $\beta^* = +\infty$. Якщо виконується умова (12), то наступні твердження рівносильні: 1) $\ln \mu(\cdot, F) \in L_\rho$; 2) $\beta_{\nu(x)}/\ln \mu(x, F) \to \rho(x \to +\infty)$; 3) $\beta_{\nu(x)} \in L_\rho$; 4) $\ln F \in L_\rho$; 5) існує така зростаюча до $+\infty$ послідовність $(\varkappa_{n_{k+1}})$, що $\mu(x, F) = F_{n_k} x^{\beta_{n_k}}$ для всіх $x \in [\varkappa_{n_k}; \varkappa_{n_k+1}]$ і для всіх $k \geqslant 1$, а також при $k \to +\infty$ виконуються умови

$$\varkappa_{n_{k+1}} \sim \varkappa_{n_k}, \qquad \frac{\beta_{n_k}}{\ln F_{n_k} + \ln \varkappa_{n_k} \beta_{n_k}} \to \rho, \qquad \frac{\beta_{n_k}}{\ln F_{n_k} + \ln \varkappa_{n_{k+1}} \beta_{n_k}} \to \rho.$$

Для доведення наслідку 1 достатньо скористатись теоремами 1 і 2 (з функцією $\tau(x) = \ln x$ $(x \geq e)$) та зауважити, що у цьому випадку умова (14) рівносильна до умови $\varkappa_{n_{k+1}} \sim \varkappa_{n_k}$.

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. / *Сенета Е.* – М.: Наука, 1982.
2. *Заболоцкий Н.В.* О медленном возрастании основных характеристик целых функций / *Заболоцкий Н.В., Шеремета М.Н.* // Мат. заметки. – 1999. – Т. 65, №2. – С. 206-214.
3. *Скасків О.Б.* Про повільне зростання лічильної функції додатної послідовності / *Скасків О.Б., Тракало О.М.* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 36-40.
4. *Філевич П.В.* Про правильну зміну основних характеристик цілої функції / *Філевич П.В., Шеремета М.М.* // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, №6. – С. 840-849.
5. *Долинюк М.М.* Про правильне зростання деяких додатних функціональних рядів / *Долинюк М.М., Скасків О.Б.* // Наук. Вісник Чернівецького ун-ту. – 2006. – Вип. 314-315. Математика. – С. 50-58.
6. *Скаскив О.Б.* О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей / *Скаскив О.Б.* // Матем. заметки. – 1994. – Т. 56, №4. – С. 117-128.
7. *Скасків О.Б.* Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів / *Скасків О.Б., Трусевич О.М.* // Препринт №17-1. – Львів: Ін-т ІППММ НАН України, 1999. – 18 с.

ON THE REGULAR GROWTH COMPOSITION OF A POSITIVE DIRICHLET SERIES AND INCREASING FUNCTIONS

Myroslava DOLYNYUK

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ira0201@rambler.ru

For a positive series $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n e^{\tau(x)\beta_n}$, $F_n \geqslant 0$ $(n \geqslant 0)$, convergent for $x \geq 0$, where $\tau(x)$ is an increasing differentiable function, $\{\beta_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, we give conditions of slow growth of order $\rho > 0$ of the function $\ln F(x)$.

Key words: Dirichlet series, maximal term, regular growth

О РЕГУЛЯРНОМ ВОЗРАСТАНИИ КОМПОЗИЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЯДА ДИРИХЛЕ И ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Мырослава ДОЛЫНЮК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ira0201@rambler.ru

Для положительного сходящегося для всех $x \geq 0$ ряда $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n e^{\tau(x)\beta_n}$, $F_n \geqslant 0$ $(n \geqslant 0)$, где $\tau(x)$ – неубывающая дифференцируемая функция, $\{\beta_n : \ n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, получены условия правильного возрастания порядка $\rho > 0$ функции $\ln F(x)$.

Ключевые слова: ряды Дирихле, максимальный член, правильный рост.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.2008

Прийнята до друку 12.06.2009