ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 125–134

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 125–134

УДК 517.956

ДЕЯКІ НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Володимир КИРИЛИЧ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: vkyrylych@ukr.net*

Знайдено достатні умови глобальної розв'язності задачі з невідомою лінією контактного розриву та локальної розв'язності сингулярної задачі з внутрішніми невідомими межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь першого порядку, записаних відповідно у канонічних формах Рімана та Шаудера.

Ключові слова: гіперболічна система, квазілінійні рівняння, невідомі межі, метод характеристик.

1. Вступ. Системи квазілінійних гіперболічних рівнянь першого порядку відіграють важливу роль при моделюванні фізичних процесів природознавства. До таких моделей, наприклад, можна зарахувати рівняння Ейлера газової динаміки [1], рівняння мілкої води [2] тощо. За своєю суттю ці рівняння є записом законів збереження різних фізичних величин у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0.$$

Наприклад, в [3], добавляючи до закону збереження імпульсу визначальне співвідношення, яке характеризує деяку фізичну систему, одержано гіперболічне рівняння, що моделює рух у в'язко-пружних тілах з "пам'яттю"(врахування післядії та релаксації). Згодом з'явився інший підхід, ніж в [3], який враховував запізнення у визначальному співвідношенні (закон Каттанео-Фур'є) [4]-[5], що приводить до гіперболічної моделі дифузії [5], тобто засвідчує хвильову природу теплопровідності. Тому задачі з вільними межами, які насамперед пов'язують з параболічними та еліптичними рівняннями [6], виконуються і для гіперболічних систем [5].

Ми розглянули дві нелінійні задачі з невідомими (вільними) межами для систем гіперболічних квазілінійних рівнянь першого порядку, записаних відповідно в інваріантах Рімана та канонічній характеристичній формі (форма Шаудера) [7]. Одна з них узагальнює результати для задач із контактним розривом вздовж невідомої лінії [8]-[9] на випадок глобальної коректної розв'язності, а в другій, на підставі існування єдиного локального розв'язку сингулярної гіперболічної квазілінійної задачі [10], отримано достатні умови локальної розв'язності подібної задачі для системи, записаної в загальному вигляді.

Для доведення основних теорем тут використано метод характеристик та його модифікації в комбінації з принципом стискуючих відображень і методики, застосованої в [10]-[11].

2. Спряження розв'язків мішаної задачі вздовж невідомої лінії. Нехай область $D_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < t < T, \ s_1(t) < x < s_2(t)\}$ з рухомими межами $x = s_j(t), \ t \in [0,T), j \in \{1,2\}$ невідома лінія $x = s(t) : t \in [0,T]$ розбиває на дві підобласті: $D_T^{s-} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, s_1(t) < x < s(t)\}$, $D_T^{s+} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2$: $0 < t < T, s(t) < x < s_2(t)\}$.

Розглянемо записану в інваріантах гіперболічну систему квазілінійних рівнянь

$$\frac{\partial u_i^-}{\partial t} + \lambda_i^-(x,t,u^-)\frac{\partial u_i^-}{\partial x} = f_i^-(x,t,u^-), \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \text{ в } D_T^{s-}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t} + \lambda_i^+(x,t,u^+)\frac{\partial u_i^+}{\partial x} = f_i^+(x,t,u^+), \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \text{ в } D_T^{s+}, \tag{2}$$

де $u^-(x,t) = (u_1^-(x,t),\ldots,u_n^-(x,t))$ $(x,t) \in \overline{D_T^{s-}}$, $u^+(x,t) = (u_1^+(x,t),\ldots,u_n^+(x,t))$ $(x,t) \in \overline{D_T^{s+}}$ – шукані дійснозначні функції, а $\lambda_i^\pm(x,t,u)$, $(x,t,u) \in \mathbb{R}^{n+2}$, $f_i^\pm(x,t,u)$, $(x,t,u) \in \mathbb{R}^{n+2}$ – відомі функції.

Нехай поведінка функції s описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{ds}{dt} = g(s,t,u^\pm(s,t)), \tag{3}$$

де $(y,t) \to u^\pm(y,t) = (u^-(y,t),u^+(y,t)) : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}^{2n}$, а $(y,t,z) \to g(y,t,z)$: $\mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ – відома функція.

Доповнимо системи (1)-(3) початковими умовами вигляду

$$s(0) = s^0, \tag{4}$$

$$u^-(x,0) = \alpha^-(x), \quad x \in [s_1^0, s^0], \qquad u^+(x,0) = \alpha^+(x), \quad x \in [s^0, s_2^0]. \tag{5}$$

Тут $s_k^0 \overset{def}{=} s_k(0)$, $k \in \{1,2\}$, $s^0 \in (s_1^0, s_2^0)$ – задане значення, $\alpha^- = (\alpha_1^-,\ldots,\alpha_n^-)$: $[s_1^0, s^0] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha^+ = (\alpha_1^+,\ldots,\alpha_n^+) : [s^0, s_2^0] \to \mathbb{R}^n$ – задані набори функцій.

Визначимо множини індексів I_1, I_2, I_-, I_+, J_-, J_+ :

$$I_1 = \{i \in \{1,\ldots,n\} : \lambda_i^-(s_1^0, 0, \alpha^-(s_1^0)) > s_1'(0)\};$$
$$I_2 = \{i \in \{1,\ldots,n\} : \lambda_i^+(s_2^0, 0, \alpha^+(s_2^0)) < s_2'(0)\};$$
$$I_- = \{i \in \{1,\ldots,n\} : \lambda_i^-(s^0, 0, \alpha^-(s^0)) < g(s^0, 0, \alpha^\pm(s^0))\};$$
$$I_+ = \{i \in \{1,\ldots,n\} : \lambda_i^+(s^0, 0, \alpha^+(s^0)) > g(s^0, 0, \alpha^\pm(s^0))\};$$
$$J_- \subset \{1,\ldots,n\} \backslash I_-, \qquad J_+ \subset \{1,\ldots,n\} \backslash I_+,$$

де $\alpha^\pm(s^0) = (\alpha^-(s^0), \alpha^+(s^0))$. Нехай k_-, k_+ – кількість елементів множин J_-, J_+.

Припустимо, що на фіксованих бічних межах областей D_T^{s-}, D_T^{s+} задовольняються крайові умови вигляду

$$u_i^-(s_1(t),t) = \beta_{i1}(t), \quad i \in I_1, \qquad u_i^+(s_2(t),t) = \beta_{i2}(t), \quad i \in I_2, \tag{6}$$

а на вільній межі $x = s(t)$ виконуються умови спряження

$$\begin{aligned} u_i^-(s(t),t) &= \gamma_i^-(s(t),t,\tilde{u}^\pm(s(t),t)), \quad i \in I_-, \\ u_i^+(s(t),t) &= \gamma_i^+(s(t),t,\tilde{u}^\pm(s(t),t)), \quad i \in I_+, \end{aligned} \tag{7}$$

де $\tilde{u}^\pm(s,t) = (\tilde{u}^-(s,t),\tilde{u}^+(s,t))$, $\tilde{u}^- = (u_i^-)$, $i \in J_-$, $\tilde{u}^+ = (u_i^+)$, $i \in J_+$, причому $\beta_{ij}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma_i^\pm(s,t,\tilde{u}^\pm) : \mathbb{R}^{k_-+k_++2} \to \mathbb{R}$ – відомі функції.

Нехай $i \in \{1,\dots,n\}$, $s(t) : [0,T] \to \mathbb{R}$, $u^-(x,t) : \overline{D_T^{s-}} \to \mathbb{R}^n$ – визначені функції, а $(x_0,t_0) \in \overline{D_T^{s-}}$. Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i^-(x,t,u^-(x,t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Припустимо, що ця задача має єдиний розв'язок, який позначимо $\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0)$. В результаті отримаємо сім'ю функцій аргументу t з параметрами x_0, t_0, яка залежить від вибору функції u^-, тобто, іншими словами, сім'ю операторів.

Зауважимо, що розв'язок $\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0)$ при фіксованих i, s, u^-, x_0, t_0 можна продовжити до перетину з межею області D_T^{s-}. Нехай

$$\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0) = \min\left\{t \in [0,t_0] : \ (\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0),t) \in \overline{D_T^{s-}}\right\}.$$

Отже, функція $\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0)$ буде визначена на відрізку $\left[\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0),\, t_0\right]$, причому $\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0)$ є сім'єю функціоналів з параметрами x_0, t_0.

Перепишемо систему рівнянь (1) у вигляді

$$\frac{du_i^-(\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0),t)}{dt} = f_i(\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0),t,u^-(\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0),t)), \quad i \in \{1,\dots,n\}.$$

Проінтегруємо кожне рівняння отриманої системи в межах від $\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0)$ до t_0. У результаті одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} u_i^-(x,t) = u_i^-\Big(\varphi_i^-[u^-](\chi_i^-[u^-,s](x,t);x,t),\chi_i^-[u^-,s](x,t)\Big) + \\ + \int\limits_{\chi_i^-[u^-,s](x,t)}^{t} f_i^-\Big(\varphi_i^-[u^-](\tau;x,t),\tau,u^-(\varphi_i^-[u^-](\tau;x,t),\tau)\Big)\,d\tau, \\ i \in \{1,\dots,n\}, \quad (x,t) \in \overline{D_T^{s-}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Зауважимо, що системи (1) та (8) еквівалентні в класі функцій (u^-,s): $u^- \in [C^1(\overline{D_T^{s-}})]^n$, $s \in C[0,T]$, проте розв'язок останньої системи може бути, взагалі кажучи, не диференційовним.

Міркуючи подібно, виводимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i^+(x,t) = u_i^+\Big(\varphi_i^+[u^+](\chi_i^+[u^+,s](x,t);x,t), \chi_i^+[u^+,s](x,t)\Big) +$$
$$+ \int\limits_{\chi_i^+[u^+,s](x,t)}^{t} f_i^+\Big(\varphi_i^+[u^+](\tau;x,t),\tau,u^+(\varphi_i^+[u^+](\tau;x,t),\tau)\Big)\,d\tau,$$
$$i \in \{1,\dots,n\}, \quad (x,t) \in \overline{D_T^{s+}}, \quad (9)$$

що еквівалентна системі (2) в класі достатньо гладких функцій (u,s).

Означення 1. *Узагальненим ров'язком задачі (1)-(7), визначеним на часовому відрізку* $[0,T_0]$, $(0 < T_0 \leqslant T)$ *будемо називати набір функцій* (u^-,u^+,s)*:* $u^- \in \in \big[\mathrm{Lip}(\overline{D_{T_0}^{s-}})\big]^n$, $u^+ \in \big[\mathrm{Lip}(\overline{D_{T_0}^{s+}})\big]^n$, $s \in C^1[0,T_0]$, *що задовольняє системи (3), (8), (9), а також умови (4)-(7). Якщо* $T_0 < T$, *то розв'язок називається локальним, якщо ж* $T_0 = T$, *то – глобальним.*

Нехай

$$U = \max\left\{\max_{x\in[s_1^0,s^0]}|\alpha^-(x)|,\ \max_{x\in[s^0,s_2^0]}|\alpha^+(x)|\right\} + 1, \qquad S = |g(s^0,0,\alpha^\pm(s^0))| + 1.$$

Визначимо такі множини:

$$D_{T,U}^1 = \{(x,t,u) \in \mathbb{R}^{n+2}:\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ s_1(t) \leqslant x \leqslant s_2(t),\ |u| \leqslant U\},$$
$$D_{T,U,S}^2 = \{(s,t,u^\pm) \in \mathbb{R}^{2n+2}:\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ s^0 - St \leqslant s \leqslant s^0 + St,\ |u^\pm| \leqslant U\},$$
$$D_{T,U,S}^3 = \{(s,t,\tilde u^\pm) \in \mathbb{R}^{k_-+k_++2}:\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ s^0 - St \leqslant s \leqslant s^0 + St,\ |\tilde u^\pm| \leqslant U\}.$$

Тут $|\cdot|$– норма в просторі $\mathbb{R}^N$ в сенсі максимуму модулів.

Введемо також інші позначення

$$\Lambda = \max_{(x,t,u)\in D_{T,U}^1}|\lambda^\pm(x,t,u)|, \qquad F = \max_{(x,t,u)\in D_{T,U}^1}|f^\pm(x,t,u)|,$$

$$\delta = \frac{1}{2}\min_{i\in\{1,\dots,n\}}\Big\{|\lambda_i^-(s_1^0,0,\alpha^-(s_1^0)) - s_1'(0)|,\ |\lambda_i^+(s_2^0,0,\alpha^+(s_2^0)) - s_2'(0)|,$$
$$|\lambda_i^-(s^0,0,\alpha^-(s^0)) - g(s^0,0,\alpha^\pm(s^0))|,\ |\lambda_i^+(s^0,0,\alpha^+(s^0)) - g(s^0,0,\alpha^\pm(s^0))|\Big\},$$

і нехай λ_0, f_0, g_0, α_0, β_0, γ_0, S_0 – сталі Ліпшиця функцій $\lambda_i^\pm$, $f_i^\pm$, g, $\alpha_i^\pm$, β_{ij}, $\gamma_i^\pm$, s_j за відповідними змінними.

Теорема 1 (про локальну розв'язність). *Нехай виконуються такі умови:*

1) $\lambda_i^- \in Lip(D_{T,U}^1)$, $\lambda_i^+ \in Lip(D_{T,U}^1)$, $i \in \{1,\dots,n\}$;
2) $f_i^- \in C(D_{T,U}^1) \cap Lip_{x,u}(D_{T,U}^1)$, $f_i^+ \in C(D_{T,U}^1) \cap Lip_{x,u}(D_{T,U}^1)$, $i \in \{1,\dots,n\}$;
3) $g \in Lip(D_{T,U,S}^2)$;
4) $\alpha_i^- \in Lip[s_1^0,s^0]$, $\alpha_i^+ \in Lip[s^0,s_2^0]$, $i \in \{1,\dots,n\}$;
5) $\beta_{ij} \in Lip[0,T]$, $j \in \{1,2\}$, $i \in I_j$;
6) $\gamma_i^- \in Lip(D_{T,U,S}^3)$, $i \in I_-$, $\gamma_i^+ \in Lip(D_{T,U,S}^3)$, $i \in I_+$;
7) $s_j \in C^1[0,T]$, $s_j' \in Lip[0,T]$, $j \in \{1,2\}$;

8) $\delta > 0$;
9) $\alpha_i^-(s_1^0) = \beta_{i1}(0),\ \ i \in I_1, \quad \alpha_i^+(s_2^0) = \beta_{i2}(0),\ \ i \in I_2,$
$\alpha_i^-(s^0) = \gamma_i^-(s^0, 0, \tilde{\alpha}^{\pm}(s^0)),\ \ i \in I_-, \quad \alpha_i^+(s^0) = \gamma_i^+(s^0, 0, \tilde{\alpha}^{\pm}(s^0)),\ i \in I_+,$
де $\tilde{\alpha}^{\pm}(s^0) = (\tilde{\alpha}^-(s^0), \tilde{\alpha}^+(s^0))$, $\tilde{\alpha}^-(s^0) = (\alpha_i^-(s^0))$, $i \in J_-$, $\tilde{\alpha}^+(s^0) = (\alpha_i^+(s^0))$, $i \in J_+$ *(умови погодження).*

Тоді на часовому відрізку $[0, T_0]$ *існує єдиний локальний узагальнений розв'язок задачі (1)-(7).*

Введемо позначення для монотонних характеристик функцій:

$F(x_1, \ldots, x_n) \nearrow (x_{k_1}, \ldots)$ (відповідно $\searrow (x_{k_2}, \ldots)$) – функція F не спадає за групою аргументів $(x_{k_1}, \ldots)$ (не зростає за групою аргументів $(x_{k_2}, \ldots)$).

Лема 1. *Нехай виконуються такі умови знакосталості та монотонності:*

F): $f_i^- \geqslant 0, \quad i \in I_1, \quad f_i^- \leqslant 0, \quad i \in I_- \cup J_-,$
$f_i^+ \leqslant 0, \quad i \in I_2, \quad f_i^+ \geqslant 0, \quad i \in I_+ \cup J_+;$
M1): $\lambda_i^- \nearrow (x, u), \quad \lambda_i^+ \nearrow (x, u), \quad i \in \{1, \ldots, n\};$
M2): $f_i^- \nearrow (x, u), \quad f_i^+ \nearrow (x, u), \quad i \in \{1, \ldots, n\};$
M3): $\alpha_i^- \nearrow (x), \quad \alpha_i^+ \nearrow (x), \quad i \in \{1, \ldots, n\};$
M4): $\beta_{i1} \searrow (t), \quad i \in I_1, \quad \beta_{i2} \nearrow (t), \quad i \in I_2;$
M5): $\gamma_i^- \nearrow (t, \tilde{u}^+) \searrow (\tilde{u}^-), \quad i \in I_-, \quad \gamma_i^+ \nearrow (\tilde{u}^-) \searrow (t, \tilde{u}^+), \quad i \in I_+.$

Тоді, якщо (u^-, u^+, s) *– узагальнений розв'язок задачі (1)-(7),* $u^- \nearrow (x)$, $u^+ \nearrow (x)$, *то* $A^{u-}[u-, s] \nearrow (x)$, $A^{u+}[u+, s] \nearrow (x)$, *де оператори* A^{u-}, A^{u+} *визначаються правими частинами (8), (9).*

В $\overline{D_T}$ для довільних $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y \in \mathbb{R}^{N_2}$ через $|x, y|$ позначимо максимум норм $|x|$, $|y|$.

Теорема 2 (про глобальну розв'язність). *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i^- \in Lip_{loc}(D_T \times \mathbb{R}^n),\ \ \lambda_i^+ \in Lip_{loc}(D_T \times \mathbb{R}^n),\ \ i \in \{1, \ldots, n\};$
2) $f_i^- \in C(D_T \times \mathbb{R}^n) \cap Lip_{x,u,loc}(D_T \times \mathbb{R}^n),$
$f_i^+ \in C(D_T \times \mathbb{R}^n) \cap Lip_{x,u,loc}(D_T \times \mathbb{R}^n),\ \ i \in \{1, \ldots, n\};$
3) $g \in Lip_{loc}(\mathbb{R} \times [0, T] \times \mathbb{R}^{2n});$
4) $\alpha_i^- \in Lip[s_1^0, s^0],\ \ \alpha_i^+ \in Lip[s^0, s_2^0],\ \ i \in \{1, \ldots, n\};$
5) $\beta_{ij} \in Lip[0, T],\ \ j \in \{1, 2\},\ i \in I_j;$
6) $\gamma_i^- \in Lip_{loc}([0, T] \times \mathbb{R}^{k_- + k_+}),\ \ i \in I_-, \quad \gamma_i^+ \in Lip_{loc}([0, T] \times \mathbb{R}^{k_- + k_+}),\ \ i \in I_+;$
7) $s_j \in C^1[0, T],\ \ s_j' \in Lip[0, T],\ \ j \in \{1, 2\};$
8) *погодження 9) теореми 1;*
9) *знакосталості та монотонності леми 1;*
10) *обмеження на зростання вихідних даних:*
G1): $|f^-(x, t, u), f^+(x, t, u)| \leqslant f_1(1 + |x, u|);$
G2): $|g(s, t, u^{\pm})| \leqslant g_1(1 + |s, u^{\pm}|);$
G3): $|\gamma^-(t, \tilde{u}^{\pm}), \gamma^+(t, \tilde{u}^{\pm})| \leqslant \gamma_1(1 + |\tilde{u}^{\pm}|);$
11) $(\lambda_i^- - s_1')(\lambda_i^+ - s_2')(\lambda_i^- - g)(\lambda_i^+ - g) \neq 0,\ \ i \in \{1, \ldots, n\};$
12) $s_1(t) + \mathcal{S}t < s^0 < s_2(t) - \mathcal{S}t$ *(стала* $\mathcal{S}$ *визначається вихідними даними задачі).*

Тоді існує єдиний глобальний узагальнений розв'язок задачі (1)-(7).

Доведення обидвох теорем з незначними змінами повторює доведення теореми 1 і теореми 2 з [11].

3. Випадок гіперболічної квазілінійної системи в канонічній формі Шаудера. В прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x,t): \ 0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant T_0\}$, де $l > 0, \ T_0 > 0$ – деякі сталі, розглянемо систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} \ + \ \widetilde{\mathcal{D}}\frac{\partial u}{\partial x} \ = \ d, \tag{10}$$

в якій $\widetilde{\mathcal{D}}(x,t,u,v)$ матриця розмірності $m \times m$, $d = (d_1, ..., d_m)^T$, $u = (u_1, ..., u_m)^T$, $v = (v_1, ..., v_n)^T$, причому функції $u(x,t)$, $(x,t) \in \Pi(T_0)$, $v(x,t)$, $(x,t) \in \Pi(T_0)$ – невідомі, а залежності $\widetilde{\mathcal{D}}(x,t,u,v)$, $d(x,t,u,v)$ – задані.

Припустимо, що матриця $\widetilde{\mathcal{D}}$ має тільки дійсні власні значення $\lambda_1(x,t,u,v)$, ..., $\lambda_m(x,t,u,v)$ і може бути зведена до діагонального вигляду (існує база з лівих власних векторів $g^1(x,t,u,v), ..., g^m(x,t,u,v)$), тобто система (10) – гіперболічна.

Як відомо [7], шляхом множення зліва рівнянь системи (10) на вектори $g^1, ..., g^m$, (10) може бути перетворена до вигляду

$$\sum_{k=1}^{m} g_k^i \Big(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u_k}{\partial x}\Big) = f_i, \quad f_i := g^i d, \quad i \in \{1, ..., m\}, \tag{11}$$

який в [9] називають канонічною формою Шаудера, а в [7] – характеристичною канонічною формою вихідної системи.

У деяких випадках [7] можливе перетворення системи (10) до канонічного вигляду в інваріантах Рімана

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial z_i}{\partial x} = p_i, \quad i \in \{1, ..., m\}, \tag{12}$$

де z_i – нові невідомі функції (інваріанти Рімана).

Система (10) завжди має вигляд (12), якщо матриця $\widetilde{\mathcal{D}}$ – діагональна. Якщо кількість рівнянь системи (10) $m \geqslant 3$, то перетворення системи (10) до вигляду (12) не завжди можливе [7], що в деяких випадках значно звужує область застосувань. Наприклад, для системи з трьох рівнянь газової динаміки в загальному випадку такий перехід неможливий [7]. Тому ми розглянемо вихідну систему в формі (11).

Разом з системою (11) будемо розглядати систему

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x,t,u,v), \quad j \in \{1, ..., n\}, \tag{13}$$

ліву частину якої формально можна отримати з лівої частини системи (12), якщо деякі з $\lambda_i = \infty$. Це відповідає випадку, коли в суцільному середовищі, яке моделюється системами (10), (13), частина збурень (наприклад, механічних) поширюється зі скінченними швидкостями ($\lambda_1, ..., \lambda_m$ – скінченні), а частина (наприклад, електромагнітних) – з нескінченними.

Крім того, одночасно з системами (11),(13) будемо також розглядати систему

$$\frac{ds_j}{dt} = r_j(t, s, u(s_j(t),t), v(s_j(t),t)), \quad j \in \{1, ..., n\}, \tag{14}$$

де $s = (s_1, ..., s_n)^T$. Розв'язки системи (14) будемо називати невідомими (внутрішніми) межами.

Отже, розв'язком системи (11), (13), (14) буде впорядкована трійка (u, v, s). Для системи (11), (13), (14) задамо такі початкові та крайові умови:

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{15}$$

$$s_j(0) = c_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad 0 \le c_j \le \ell, \tag{16}$$

$$u_i(0,t) = \gamma_i^0(t, u(0,t)), \quad i \in I_+^0 = \{i |\ \mathrm{sgn}(\lambda_i(0,0,0,0)) = 1\}, \tag{17}$$

$$u_i(\ell,t) = \gamma_i^\ell(t, u(\ell,t)), \quad i \in I_-^\ell = \{i |\ \mathrm{sgn}(\lambda_i(\ell,0,0,0)) = -1\}, \tag{18}$$

$$v_j(s_j(t),t) = \beta_j(t), \quad j \in \{1, \dots, n\}. \tag{19}$$

Позначимо пару $(u, v) = w$ і припустимо, що для вихідних даних задачі (11), (13)-(19) виконуються умови **A1-A12** з [10]. Нехай також виконується умова.

A13. Позначимо через $h_{ik}(x,t,w)$ елементи матриці $\widetilde{H}$, оберненої до матриці $\widetilde{G}$, у стрічках якої стоять ліві власні вектори матриці $\widetilde{\mathcal{D}}$. Припустимо, що функціональні матриці $\widetilde{G}$, $\widetilde{H}$ визначені в області $\mathbb{D}(T_0, P_0) = \Pi(T_0) \times \{w |\ w \in \mathbb{R}^{m+n},\ ||w|| \leqslant P_0\}$, а функції $h_{ik}(x,t,w)$ і $g_k^i(x,t,w)$, $i,k \in \{1,...,m\}$ обмежені за модулем деякими сталими G, H відповідно. Крім того, існують невід'ємні сумовні на $[0, T_0]$ функції $H_1(t), H_2(t), G_1(t), G_2(t)$ такі, що майже для всіх $t \in [0, T_0]$ при $(x_1, t, w_1) \in \mathbb{D}(T_0, P_0)$, $(x_2, t, w_2) \in \mathbb{D}(T_0, P_0)$ виконуються нерівності:

$$|h_{ik}(x_1,t,w_1) - h_{ik}(x_2,t,w_2)| \leqslant H_1(t)|x_1 - x_2| + H_2(t)|w_1 - w_2|;$$

$$|g_k^i(x_1,t,w_1) - g_k^i(x_2,t,w_2)| \leqslant G_1(t)|x_1 - x_2| + G_2(t)|w_1 - w_2|; \quad k,\ i \in \{1,...,m\}.$$

Ввівши як і в [10], для заданої функції w рівняння характеристик

$$\dot{x} = \lambda_i(x,t,w), \qquad i \in \{1, \dots, m\}, \tag{20}$$

розв'язки якого позначимо через $\varphi_i(\tau; x, t, w)$, $\varphi_i(t; x, t, w) = x$, або коротко позначатимемо $x = \varphi_i(\tau)$. Тоді ліву частину системи (11) можна переписати так:

$$\sum_{k=1}^{m} g_k^i \frac{du_k}{dt}\Big|_{x=\varphi_i(\tau)} = f_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}. \tag{21}$$

Для довільних функцій $(x,t) \mapsto z(x,t)$ і $(x,t,z) \mapsto \zeta(x,t,z)$ введемо позначення $z[\varphi_i(\tau)] = z(\varphi_i(\tau), \tau)$, $\zeta[\varphi_i(\tau)] = \zeta(\varphi_i(\tau), \tau, z(\varphi_i(\tau), \tau)$. Позначимо $\chi_i = \chi_i(x,t,z)$, де $\chi_i(x,t,z)$ - мінімальне значення τ, при якому визначена функція $\varphi_i(\tau)$ є розв'язком задачі (20).

Легко довести, що при зроблених припущеннях для функцій g_k^i майже всюди існує похідна вздовж відповідної характеристики. Це дає змогу проінтегрувати (21) вздовж характеристик за частинами (див. [10])

$$\sum_{k=1}^{m} (g_k^i u_k)\Big|_{\chi_i}^{t} - \int_{\chi_i}^{t} \sum_{k=1}^{m} u_k[\varphi_i(\tau)] \frac{dg_k^i}{d\tau}[\varphi_i(\tau)] d\tau = \int_{\chi_i}^{t} f_i[\varphi_i(\tau)] d\tau, \quad i \in \{1, ..., m\}.$$

Враховуючи умови для u, одержимо

$$\sum_{k=1}^{m} g_k^i(x,t,w(x,t)) u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{m} \Big(g_k^i[\varphi_i(\chi_i)] u_k[\varphi(\chi_i)] \pm g_k^i(x,t,w(x,t)) u_k[\varphi(\chi_i)] +$$

$$+\int\limits_{\chi_i}^{t}\sum_{k=1}^{m}u_k[\varphi_i(\tau)]\frac{dg_k^i}{d\tau}[\varphi_i(\tau)]d\tau\Big)+\int\limits_{\chi_i}^{t}f_i[\varphi_i(\tau)]d\tau.$$

Однак

$$g_k^i[\varphi_i(\chi_i)]-g_k^i(x,t,w(x,t))u_k(\varphi_i(t))=-\int\limits_{\chi_i}^{t}\frac{dg_k^i}{d\tau}[\varphi_i(\tau)]u_k(\varphi_i(\chi_i))d\tau.$$

Тому

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{m}g_k^i(x,t,w(x,t))u_k(x,t)=\sum_{k=1}^{m}g_k^i(x,t,w(x,t))u_k[\varphi_i(\chi_i)]+\\+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\chi_i}^{t}\frac{dg_k^i}{d\tau}[\varphi_i(\tau)]\Big(u_k[\varphi_i(\tau)]-u_k[\varphi(\chi_i)]\Big)d\tau+\int\limits_{\chi_i}^{t}f_i[\varphi_i(\tau)]d\tau,\quad i\in\{1,...,m\}.\end{gathered}\tag{22}$$

Помножимо (22) на елементи h_{ik} оберненої до G матриці H та підсумовуючи за k, одержимо

$$\begin{gathered}u_i(x,t)=u_i(\varphi_i(\chi_i))+\sum_{j=1}^{m}h_{ij}(x,t,w(x,t))\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\chi_j}^{t}\frac{dg_k^j}{d\tau}[\varphi_j(\tau)]\Big(u_k[\varphi_j(\tau)]-\\-u_k[\varphi_j(\chi_j)]\Big)d\tau+\sum_{j=1}^{m}h_{ij}(x,t,w(x,t))\int\limits_{\chi_j}^{t}f_j[\varphi_j(\tau)]d\tau,\quad i\in\{1,...,m\}.\end{gathered}\tag{23}$$

Значення $u_k[\chi_i]$ визначають з урахуванням початкових і крайових умов.

В результаті, позначивши праві частини отриманих рівностей через $\mathfrak{U}\{w\}$, приходимо до запису $u=\mathfrak{U}\{w\}$.

Аналогічно, інтегруючи (13) за x і (14) за t, одержимо відповідно $v=\mathfrak{L}\{w,s\}$, $s=\mathfrak{C}\{w,s\}$.

Отже, символічно вихідну задачу можна записати як систему інтегро-операторних рівнянь

$$(u,v,s)=\mathfrak{S}\{u,v,s\},\qquad \mathfrak{S}=(\mathfrak{U},\mathfrak{L},\mathfrak{C}).\tag{24}$$

Означення 2. *Ліпшицевий розв'язок системи (24) будемо називати узагальненим неперервним розв'язком задачі (11), (13)-(19).*

Теорема 3. *При зроблених вище припущеннях, існує таке $T>0$, що в прямокутнику $\Pi(T)$ існує єдиний узагальнений неперервний розв'язок задачі (11), (13)-(19).*

Доведення цієї теореми проводиться за схемою, яка аналогічна до доведення відповідної теореми викладеної в [10] і належить до випадку вихідної діагональної матриці $\widetilde{\mathcal{D}}$, тобто до системи, записаної в інваріантах Рімана.

1. *Евсеев Е.Г.* Квазимонотонные разностные схемы для некоторых систем гиперболических уравнений первого порядка / *Евсеев Е.Г., Убилова М.Г., Шония В.В.* // Математич. моделирование. – 1991. – Т. 3, №5. – С. 81-85.
2. *Вольцингер Н.Е.* Длинные волны на мелкой воде / *Вольцингер Н.Е.* – Л.: Гидрометеоиздат, 1985.

3. *Ишлинский А.Ю.* Продольные колебания стержня при наличии нелинейного закона последействия и релаксации / *Ишлинский А.Ю.* // Прикладная математика и механика. –1940. – Т. IV, Вып. 1. – С. 79-92.
4. *Coleman B.D.* On the thermodynamics od second sound in dialectric crystals / *Coleman B.D., Fabrizio M., Owen D. R.* // Arch. for Rat. Mech. and Anal. – 1982. – Vol. 80, №2. – P. 135-158.
5. *Gupta S.C.* The classical Stefan problem: basic concepts, modeling and analysis / *Gupta S.C.* – Amsterdam: Elsevier, 2003.
6. *Данилюк И.И.* Задача Стефана / *Данилюк И.И.* // Успехи мат. наук. – 1985. – Т. 4, №5. – С. 133-185.
7. *Рождественский Б.Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* – М.: Наука, 1978.
8. *Казаков К. Ю.* Локальная разрешимость смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы с внутренней свободной границей / *Казаков К.Ю., Морозов С.Ф.* // Дифференц. и интегр. уравнения – 1994. – №4. – С. 57–66.
9. *Turo J.* Mixed problems for quasilinear hyperbolic systems / *Turo J.* // Nonlin. Anal., Theory, Meth., Appl. – 1997. – Vol. 30, №4. – P. 2329-2340.
10. *Кирилич В. М.* Локальна гладка розв'язність задачі з вільними межами для сингулярних гіперболічних систем квазілінійних рівнянь / *Кирилич В., Філімонов А.* // Вісн. Львів. у-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 120-156.
11. *Андрусяк Р.В.* Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой / *Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №4. – С. 489-503.

SOME NONLINEAR FREE BOUNDARY PROBLEMS FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF QUASI-LINEAR EQUATIONS

Volodymyr KYRYLYCH

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: vkyrylych@ukr.net

The sufficient conditions of the global solvability of the problem with unknown line of contact break are established and wee obtain the local solvability of singular problem with internally free boundaries for hyperbolic systems of quasi-linear first order equations in canonical Riemann's and Schauder's forms respectively.

Key words: hyperbolic system, free boundary problems, method of characteristic, quasi-linear equation.

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Владимир КИРИЛИЧ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: vkyrylych@ukr.net

Найдено достаточные условия глобальной разрешимости задачи с неизвестной линией контактного разрыва и доказано локальную разрешимость сингулярной задачи с внутренними неизвестными границами для гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка, записаных соответственно в канонических формах Римана и Шаудера.

Ключевые слова: гиперболическая система, неизвестные границы, метод характеристик, квазилинейные уравнения.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.2009

Прийнята до друку 16.12.2009