ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 142–155 *Is. 71. P. 142–155*

УДК 517.4

ПРО ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНҐЕРА ТА ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ З δ'-ПОТЕНЦІАЛАМИ

Степан МАНЬКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: s_manko@franko.lviv.ua

Розглянуто моделі квантової механіки, в яких виникає одновимірний оператор Шредингера з псевдопотенціалом $\alpha\delta'(x)$, де $\delta(x)$ – функція Дірака. Досліджено спектральні властивості та поведінку коефіцієнтів розсіяння для сім'ї регуляризованих гамільтоніанів з потенціалами вигляду $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, які при $\varepsilon \to 0$ в топології узагальнених функцій прямують до $\alpha\delta'(x)$. Доведено, що реалізація точної моделі залежить від способу регуляризації, а саме від профілю Ψ. Виявлено ефект резонансу для ймовірності проходження крізь $\alpha\delta'$-бар'єр. Досліджено граничну поведінку спектра та чистих станів оператора Штурма-Ліувілля з локальним збуренням потенціалу вигляду $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$.

Ключові слова: оператор Шредингера, точні моделі, δ'-потенціал, резонансна множина, функція зв'язку.

1. Вступ. У квантовій механіці, атомній фізиці та фізиці твердих станів часто застосовують моделі, де виникають оператори Шредингера зі сингулярними потенціалами, а саме потенціалами, які зосереджені на дискретній множині точок. Такі моделі в науковій літературі називають *точними*, тому що резольвенти відповідних операторів будуються явно, що дає змогу обчислити основні фізичні й математичні характеристики: спектр, власні функції, коефіцієнти розсіяння та ін.

Гамільтоніанам зі сингулярними потенціалами треба надати строгого математичного сенсу, тобто поставити у відповідність самоспряжені оператори, позаяк лише такі застосовують у квантовій механіці. Дуже часто це завдання досить складне, бо виникає проблема множення узагальнених функцій, одна з яких є потенціалом, а інша – розв'язком рівняння, однак у просторі узагальнених функцій $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ не можна визначити множення розподілів, яке б успадковувало основні властивості множення неперервних функцій. Часом проблема трактування гамільтоніанів зі сингулярними потенціалами приводить до тривалих дискусій серед математиків і фізиків. Кожен дослідник намагається по-своєму надати математичного сенсу диференціальним операторам із узагальненими функціями у коефіцієнтах, що відповідають тій чи іншій точній моделі. Для розв'язання цієї проблеми в праці [3] вперше, як нам відомо, застосували теорію фон Неймана самоспряжених розширень симетричних операторів. Достатньо детальну бібліографію про дослідження гамільтоніанів з псевдопотенціалами можна знайти в книгах [1, 2]. Важливий внесок у дослідження точних моделей зробили вітчизняні математики [10]-[14].

У фізичній літературі трапляються моделі двох типів. Перші з них нечутливі до способу регуляризації потенціалу, наприклад, гамільтоніан з δ-потенціалом. Інші ж моделі залежать від цієї регуляризації, тобто з математичного погляду містять "приховані параметри". В таких моделях вибір гамільтоніана неоднозначний і залежатиме від профілю потенціалу локальної дії в реальній фізичній моделі. А, отже, всі спектральні властивості та матриця розсіяння теж залежатимуть від шляху регуляризації.

1.1. Що таке δ'-потенціал: історичний ракурс. Одним із перших операторів, трактування якого зумовило значні труднощі, був оператор з δ'-потенціалом

$$A_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta'(x),$$

δ' – похідна функції Дірака, α – дійсна стала, яку називають *сталою зв'язку.* Зауважимо таке: коли добуток $\delta'(x)y(x)$ розуміти як $y(0)\delta'(x) - y'(0)\delta(x)$, то при $\alpha \neq 0$ рівняння $A_\alpha y = \lambda y$ не має жодного розв'язку в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, окрім нульового.

Першими відомими нам публікаціями, які тлумачать оператор A_α, були книга [1] та статті [5, 6, 7]. Причому в літературі розрізняють два фізичні феномени, пов'язані з похідною функції Дірака, а саме *δ'-взаємодія* та *δ'-потенціал.* С. Альбеверіо, Ф. Гезтезі, Р. Хоег-Крон та Х. Холден [1] досліджують сім'ю самоспряжених операторів $T_\beta = -\frac{d^2}{dx^2}$ із областю визначення

$$\mathcal{D}(T_\beta) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}\setminus 0) : \ f'(-0) = f'(+0),\ f(+0) - f(-0) = \beta f'(0)\}, \qquad (1)$$

яка описує явище δ'-взаємодії і відповідає евристичному оператору

$$-\frac{d^2}{dx^2} + c|\delta'(x)\,\rangle\,\langle\,\delta'(x)|,$$

де $|g\,\rangle\,\langle\,g|$ – позначення оператора рангу 1

$$(|g\,\rangle\,\langle\,g|\varphi\,\rangle)(x) = g(x)\int\limits_{\mathbb{R}} g(y)\varphi(y)\,dy.$$

Тут β – нормувальна константа, яка залежить від сталої зв'язку c. Питання про трактування гамільтоніана A_α розглянуто в [5]. Такий оператор називають *гамільтоніаном дипольної δ-взаємодії або δ'-потенціалом*, якщо δ' розуміти як границю лінійної комбінації

$$\frac{1}{2\varepsilon}\big(\delta(x+\varepsilon) - \delta(x-\varepsilon)\big)$$

двох δ-функцій в топології $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Надалі послідовність вигляду $\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, де $\Psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, називатимемо *$\delta'$-подібною*, якщо ця послідовність збігається до $\delta'(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Функцію Ψ називатимемо *δ'-подібним профілем.* В [5] показано, що для довільного гамільтоніана вигляду $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$, де функція V є функцією з компактним носієм і має нульове середнє, граничний оператор є прямою сумою $S_-\oplus S_+$ операторів Шредінґера на півосях $\mathbb{R}_\pm$, де $S_\pm=-\frac{d^2}{dx^2}$, $\mathcal{D}(S_\pm)=\{f\in W_2^2(\mathbb{R}_\pm)\colon f(0)=0\}$. Але δ'-подібні потенціали є частковим випадком цього збурення. Тому в точній моделі, якій відповідає ця пряма сума, δ'-бар'єр має бути непроникним.

Проте в працях [16, 17, 18] явно обчислені коефіцієнти розсіяння на кусково-сталому δ'-подібному потенціалі з профілем $\Psi(\xi)=\chi_{[-1,1]}\operatorname{sign}\xi$, де χ_K – характеристична функція множини K, і описано цікавий ефект. Виявляється, що існує зліченна множина значень сталих зв'язку $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для яких граничне значення ймовірності проходження крізь δ'-бар'єр є ненульовим. Ці сталі знаходять з деякого трансцендентного рівняння. Таке явище називатимемо *явищем резонансу для коефіцієнта проходження.*

Варто зауважити, що в літературі трапляються й інші означення δ'-потенціалу. В [14], [15] гамільтоніан з δ'-потенціалом трактують як оператор другої похідної в $L_2(\mathbb{R})$, визначений на $W_2^2(\mathbb{R}\setminus 0)$, з умовами спряження

$$\begin{aligned} f(+0)-f(-0)&=\frac{\alpha}{2}(f(+0)+f(-0)),\\ f'(+0)-f'(-0)&=-\frac{\alpha}{2}(f'(+0)+f'(-0)). \end{aligned}\tag{2}$$

Таке означення опиралося на узагальнені функції Дірака та її похідних на випадок розривних у нулі пробних функцій: $\langle\delta^{(n)}(x),\varphi(x)\rangle=\frac{(-1)^n}{2}(\varphi^{(n)}(+0)+\varphi^{(n)}(-0))$. У цій моделі коефіцієнт проникнення крізь δ'-потенціал для всіх α відмінних від 2 та -2 є відмінним від нуля.

На нашу думку, відповідь на питання про проникність крізь δ'-бар'єр можна отримати так. Треба розглянути всілякі можливі регуляризації δ'-бар'єра, а також границі характеристик розсіяння, і перевірити, чи залежать ці границі від способу регуляризації. У [9] аналогічне дослідження було проведено для аналізу енергетичних рівнів і чистих станів для гамільтоніанів вигляду

$$-\frac{d^2}{dx^2}+U(x)+\alpha\delta'(x).$$

Було показано, що самоспряжені розширення, отримані при переході у регуляризації до границі, не завжди є прямою сумою операторів Шредінґера на півосях, як було в [5]. Для кожного профілю регуляризації існує дискретна множина сталих зв'язку, яка називається *резонансною*, для якої граничні оператори є операторами Шредінґера на всій осі з деякими умовами спряження в початку координат.

Мета нашої праці – довести, що явище резонансу для коефіцієнта проходження характерне для довільного δ'-подібного потенціалу $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$ та показати, що резонансні сталі зв'язку, які в [16, 17, 18] для кусково-сталих профілів є коренями деяких трансцендентних рівнянь, насправді визначаються спектральними характеристиками профілю збурення Ψ. Крім того, з'ясувати зв'язок цих характеристик зі спектральними властивостями задачі Штурма-Ліувілля з δ'-подібним потенціалом.

1.2. Головні результати. Наведемо деякі означення, які вперше були введені в [8], [9]. Розглянемо задачу

$$-w'' + \alpha\Psi w = 0, \quad \xi \in (-1,1), \qquad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0. \tag{3}$$

Зауважимо, що функція $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ є δ'-подібним профілем тоді і лише тоді, коли $\int_{-1}^{1} \Psi\, d\xi = 0$ та $\int_{-1}^{1} \xi\Psi\, d\xi = -1$. Перша умова вимагає знакозмінності функції Ψ. Отже, задача (3) є спектральною стосовно спектрального параметра α зі знакозмінною ваговою функцією, тому властивості її спектра зручно досліджувати в просторі Крейна. Спектр задачі (3) дійсний, дискретний, простий поза $\alpha = 0$ і має дві точки скупчення $\pm\infty$ [4], [9].

Означення 1. Резонансною множиною *називатимемо спектр задачі* (3) *і позначатимемо її* Σ_Ψ.

Означення 2. *Нехай* w_α*– власна функція задачі* (3)*, що відповідає власному значенню* α*. Функцію* $\theta_\Psi : \Sigma_\Psi \to \mathbb{R}$*, визначену за правилом*

$$\theta_\Psi(\alpha) = \frac{w_\alpha(1)}{w_\alpha(-1)}, \tag{4}$$

називатимемо функцією зв'язку.

Функція зв'язку визначена коректно, бо обидва числа $w_\alpha(-1)$ та $w_\alpha(1)$ відмінні від нуля. Крім того, функція θ_Ψ є однозначною, оскільки спектр задачі (3) простий.

У частині 2 статті вивчена задача розсіяння на δ'-подібному потенціалі. Ця задача полягає у знаходженні такого розв'язку y_ε рівняння:

$$-y'' + \alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)y = k^2 y, \quad x \in \mathbb{R},$$

що $y_\varepsilon(x;\alpha,k) = e^{ikx} + R_\varepsilon(\alpha,k)e^{-ikx}$ при $x \to -\infty$ та $y_\varepsilon(x;\alpha,k) = T_\varepsilon(\alpha,k)e^{ikx}$ при $x \to \infty$. Величина $|R_\varepsilon(k,\alpha)|^2$ визначає ймовірність, з якою квантово-механічна частинка відбивається від бар'єра, а $|T_\varepsilon(k,\alpha)|^2$ – ймовірність, з якою квантово-механічна частинка проходить крізь бар'єр. Ці величини називаються *коефіцієнтом відбиття* та *коефіцієнтом проникнення (коефіцієнтом прозорості бар'єра)* відповідно. Добре відомо, що між ними виконується співвідношення $|R_\varepsilon(k,\alpha)|^2 + |T_\varepsilon(k,\alpha)|^2 = 1$. Досліджено граничну поведінку коефіцієнта проникнення. Доведено, що лише у випадку, коли $\alpha \in \Sigma_\Psi$, коефіцієнт проникнення має при $\varepsilon \to 0$ ненульову границю $|T(\alpha)|^2$, яка визначається через функцію зв'язку $\theta_\Psi(\alpha)$ за формулою

$$|T(\alpha)|^2 = \frac{4}{(\theta_\Psi(\alpha) + \theta_\Psi(\alpha)^{-1})^2}, \quad \alpha \in \Sigma_\Psi.$$

Якщо ж $\alpha \notin \Sigma_\Psi$, то $|T(\alpha)|^2 = 0$.

У частині 3 розглянуто модель руху квантово-механічної частинки в нескінченній прямокутній ямі з δ'-подібним потенціалом, розташованим в ній. Досліджено граничну поведінку власних значень і власних функцій оператора Штурма-Ліувілля

$$-y'' + \alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)y = \lambda y, \quad x \in (a,b), \qquad y(a) = 0, \quad y(b) = 0,$$

для фіксованого кусково-сталого профілю Ψ. Доведено, що власні значення та відповідні власні функції збігаються до власних значень та відповідних власних функцій оператора $A(\alpha,\Psi)=-\frac{d^2}{dx^2}$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(A(\alpha,\Psi))=\{f\in W_2^2((a,b)\setminus 0):\ f(a)=f(0)=f(b)=0\}$$

при $\alpha\notin\Sigma_\Psi$ і

$$\mathcal{D}(A(\alpha,\Psi))=\{f\in W_2^2((a,b)\setminus 0):\ f(+0)=\theta_\Psi(\alpha)f(-0),\ \ \theta_\Psi(\alpha)f'(+0)=f'(-0)\}$$

у випадку, коли $\alpha\in\Sigma_\Psi$. Тут Σ_Ψ і θ_Ψ – резонансна множина та функція зв'язку потенціалу Ψ. Це означає, що резонансні значення α мають суттєвий вплив і на поведінку спектра при $\varepsilon\to 0$.

2. Задача розсіяння на δ'-подібному бар'єрі. Розглянемо задачу про проникнення частинки з заданою енергією k^2, де $k>0$, крізь потенціальний бар'єр, що має вигляд $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$. Тут ε – малий додатний параметр, α – дійсне число, а Ψ є гладкою функцією такою, що $\operatorname{supp}\Psi=[-1,1]$. Задача розсіяння частинки на цьому потенціалі полягає у знаходженні розв'язку $y_\varepsilon(x;\alpha,k)$ рівняння

$$-y''+\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)y=k^2y,\quad x\in\mathbb{R},\tag{5}$$

який має вигляд

$$y_\varepsilon(x;k,\alpha)=\begin{cases}e^{ikx}+R_\varepsilon\,e^{-ikx} & \text{при } x<-\varepsilon,\\ C_{\varepsilon,1}\,u_1(\varepsilon^{-1}x;\varepsilon k,\alpha)+C_{\varepsilon,2}\,u_2(\varepsilon^{-1}x;\varepsilon k,\alpha) & \text{при } |x|<\varepsilon,\\ \qquad T_\varepsilon\,e^{ikx} & \text{при } x>\varepsilon.\end{cases}$$

Розглянемо допоміжне рівняння

$$-u''+(\alpha\Psi(\xi)-\tau^2)u=0,\quad \xi\in(-1,1),\tag{6}$$

де $(\alpha,\tau)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. Розглянемо функції $u_1(\xi;\tau,\alpha)$ та $u_2(\xi;\tau,\alpha)$, які утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (6) з визначником Вронського $W(\tau,\alpha)$, який дорівнює одиниці для всіх $(\alpha,\tau)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. Нехай кожна з цих функцій є неперервною функцією параметрів α, τ. Очевидно, що пара функцій $u_1(\varepsilon^{-1}x;\varepsilon k,\alpha)$ та $u_2(\varepsilon^{-1}x;\varepsilon k,\alpha)$ утворюватиме фундаментальну систему розв'язків рівняння (5) на інтервалі $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Розв'язок рівняння (5) задовольняє умови спряження в точках $-\varepsilon$ та ε

$$[y_\varepsilon]_{x=-\varepsilon}=0,\quad [y_\varepsilon]_{x=\varepsilon}=0,\quad [y'_\varepsilon]_{x=-\varepsilon}=0,\quad [y'_\varepsilon]_{x=\varepsilon}=0,\tag{7}$$

де $[f]_{x=a}=f(a+0)-f(a-0)$ позначає стрибок функції f в точці a. Підставляючи $y_\varepsilon(x;k,\alpha)$ в (7), отримуємо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів

$$\begin{pmatrix}-e^{ik\varepsilon} & u_1(-1;\varepsilon k,\alpha) & u_2(-1;\varepsilon k,\alpha) & 0\\ ik\varepsilon e^{ik\varepsilon} & u_1'(-1;\varepsilon k,\alpha) & u_2'(-1;\varepsilon k,\alpha) & 0\\ 0 & u_1(1;\varepsilon k,\alpha) & u_2(1;\varepsilon k,\alpha) & -e^{ik\varepsilon}\\ 0 & u_1'(1;\varepsilon k,\alpha) & u_2'(1;\varepsilon k,\alpha) & -ik\varepsilon e^{ik\varepsilon}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_\varepsilon\\ C_{\varepsilon,1}\\ C_{\varepsilon,2}\\ T_\varepsilon\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-ik\varepsilon}\\ ik\varepsilon e^{-ik\varepsilon}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Коефіцієнт T_ε шукатимемо за правилом Крамера

$$T_\varepsilon=\frac{\Delta_{T\varepsilon}(k,\alpha)}{\Delta_\varepsilon(k,\alpha)},$$

де через $\Delta_\varepsilon(k,\alpha)$ позначатимемо визначник цієї системи. Функція $\Delta_\varepsilon(k,\alpha)$ має таку асимптотику:

$$\Delta_\varepsilon(k,\alpha)=h(\alpha)+i\varepsilon k(h_1(\alpha)+2h(\alpha))+O(\varepsilon^2k^2)\tag{8}$$

при $\varepsilon k \to 0$. Тут

$$h(\alpha) = \begin{vmatrix} u_1'(1;0,\alpha) & u_2'(1;0,\alpha) \\ u_1'(-1;0,\alpha) & u_2'(-1;0,\alpha) \end{vmatrix},$$

$$h_1(\alpha) = \begin{vmatrix} u_1'(-1;0,\alpha) & u_2'(-1;0,\alpha) \\ u_1(1;0,\alpha) & u_2(1;0,\alpha) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1(-1;0,\alpha) & u_2(-1;0,\alpha) \\ u_1'(1;0,\alpha) & u_2'(1;0,\alpha) \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що функції h та h_1 не залежать від вибору фундаментальної системи розв'язків рівняння (6) за умови, що визначник Вронського усіх таких фундаментальних систем дорівнює одиниці. Визначник $\Delta_{T\varepsilon}$ можна записати так:

$$\Delta_{T\varepsilon} = \begin{vmatrix} -e^{ik\varepsilon} & e^{-ik\varepsilon} & u_1(-1;\varepsilon k,\alpha) & u_2(-1;\varepsilon k,\alpha) \\ ik\varepsilon e^{ik\varepsilon} & ik\varepsilon e^{-ik\varepsilon} & u_1'(-1;\varepsilon k,\alpha) & u_2'(-1;\varepsilon k,\alpha) \\ 0 & 0 & u_1(1;\varepsilon k,\alpha) & u_2(1;\varepsilon k,\alpha) \\ 0 & 0 & u_1'(1;\varepsilon k,\alpha) & u_2'(1;\varepsilon k,\alpha) \end{vmatrix}.$$

За правилом Лапласа $\Delta_{T\varepsilon} = -2ik\varepsilon$, бо визначник Вронського розв'язків u_1 та u_2 дорівнює 1. Отже, коефіцієнт T_ε має таку асимптотику:

$$T_\varepsilon(k,\alpha) = \frac{-2i\varepsilon k}{h(\alpha) + i\varepsilon k(h_1(\alpha) + 2h(\alpha))} + O(\varepsilon^2 k^2) \quad \text{при} \quad \varepsilon k \to 0. \tag{9}$$

Дослідимо граничну поведінку при $\varepsilon k \to 0$ коефіцієнта проходження $|T_\varepsilon|^2$, яка залежить від того, чи належить α до резонансної множини.

Теорема 1. *При $\varepsilon k \to 0$ коефіцієнт проникнення має таку поведінку:*
- *якщо $\alpha \notin \Sigma_\Psi$, то $|T_\varepsilon(k,\alpha)|^2 = O(\varepsilon^2 k^2)$;*
- *якщо ж $\alpha \in \Sigma_\Psi$, тоді $|T_\varepsilon(k,\alpha)|^2 = 4(\theta_\Psi(\alpha) + \theta_\Psi(\alpha)^{-1})^{-2} + O(\varepsilon k)$.*

Доведення. Спершу зауважимо, що число α належить Σ_Ψ тоді й лише тоді, коли α є коренем рівняння $h(z) = 0$. Справді, $\alpha \in \Sigma_\Psi$ тоді й лише тоді, коли існує нетривіальна лінійна комбінація $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ функцій u_1 та u_2 з фундаментальної системи розв'язків, яка задовольняє крайові умови $u'(-1) = u'(1) = 0$, а це виконується тоді й лише тоді, коли $h(\alpha) = 0$.

Нехай α не належить до Σ_Ψ, тоді $h(\alpha) \neq 0$. Врахувавши асимптотику (9), отримаємо

$$|T_\varepsilon(k,\alpha)|^2 = \frac{4}{h^2(\alpha)}\varepsilon^2 k^2 + O(\varepsilon^3 k^3) \quad \text{при} \quad \varepsilon k \to 0.$$

Проведемо доведення у випадку, коли $\alpha \in \Sigma_\Psi$. Виберемо таку фундаментальну систему розв'язків рівняння (6), що при всіх $\alpha \in \Sigma_\Psi$ функція $u_1(\xi;0,\alpha)$ є власною функцією задачі (3). Обчислимо $h_1(\alpha)$, бо $h(\alpha) = 0$. Визначник Вронського цієї системи сталий

$$\begin{vmatrix} u_1(-1;0,\alpha) & u_2(-1;0,\alpha) \\ u_1'(-1;0,\alpha) & u_2'(-1;0,\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1(1;0,\alpha) & u_2(1;0,\alpha) \\ u_1'(1;0,\alpha) & u_2'(1;0,\alpha) \end{vmatrix} = 1.$$

Функція $u_1(\xi;0,\alpha)$ є власною функцією задачі (3), тому $u_1'(-1;0,\alpha) = 0$ та $u_1'(1;0,\alpha) = 0$. Враховуючи це, остання рівність набуває вигляду

$$u_1(-1;0,\alpha)u_2'(-1;0,\alpha) = u_1(1;0,\alpha)u_2'(1;0,\alpha) = 1.$$

З цієї рівності отримуємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned}\theta_\Psi(\alpha) =& \frac{u_1(1;0,\alpha)}{u_1(-1;0,\alpha)} = \frac{1}{u_1(-1;0,\alpha)u_2'(1;0,\alpha)},\\ \theta_\Psi(\alpha) =& \frac{u_1(1;0,\alpha)}{u_1(-1;0,\alpha)} = u_1(1;0,\alpha)u_2'(-1;0,\alpha).\end{aligned} \tag{10}$$

Враховуючи (10), безпосередньо обчислюємо $h_1(\alpha) = -\theta_\Psi(\alpha) - \theta_\Psi(\alpha)^{-1}$. Підставляючи h_1 у (9), одержуємо

$$T_\varepsilon(\alpha, k) \to 2(\theta_\Psi(\alpha) + \theta_\Psi(\alpha)^{-1})^{-1} \quad \text{при} \quad \varepsilon k \to 0.$$

□

3. Оператор Штурма-Ліувілля з δ'-подібним потенціалом. Нехай частинка перебуває в безмежно глибокій потенціальній ямі (a,b), де a, b – числа різних знаків. Окрім того, в околі початку координат розташований потенціал малого радіуса дії $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$. В такій моделі квантово-механічна частинка з ймовірністю 1 перебуває на інтервалі (a,b) і для відшукання її стаціонарних станів треба знайти власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$-y'' + \alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)y = \lambda y, \quad x \in (a,b), \qquad y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \tag{11}$$

Тут ε – малий додатний параметр. Граничні спектральні властивості цієї задачі, як і в попередньому розділі, можна досліджувати для довільного гладкого профілю Ψ. Щоб отримати точні формули для спектральних характеристик профілю, ми розглянемо кусково-сталий профіль. Нехай профіль Ψ є δ'-подібним із носієм на $[-1,1]$ такий, що $\Psi(\xi) = 1$ при $\xi \in (-1,0)$ і $\Psi(\xi) = -1$ при $\xi \in (0,1)$.

Задача (11) є стандартною спектральною задачею з дійсним дискретним простим спектром. Для фіксованого ε послідовність $\{y_\varepsilon^j(\cdot,\alpha,\Psi)\}_{j=1}^\infty$ нормованих власних функцій формує ортогональну базу в $L_2(a,b)$. Із варіаційного принципу випливає, що власні значення $\lambda_j^\varepsilon(\alpha,\Psi)$ задачі (11) є неперервними функціями змінної $\varepsilon \in (0,1)$ і залишаються обмеженими зверху при $\varepsilon \to 0$.

Опишемо конструктивно резонансну множину та функцію зв'язку. Для профілю Ψ характеристичний визначник задачі (3) набуває вигляду

$$h(z) = \sqrt{z}(\operatorname{sh}\sqrt{z}\,\cos\sqrt{z} - \operatorname{ch}\sqrt{z}\,\sin\sqrt{z}). \tag{12}$$

Тут і надалі беремо таку гілку квадратного кореня, що $\sqrt{-1} = i$. Нагадаємо, що Σ_Ψ є підмножиною в $\mathbb{R}$.

Лема 1. *(i) Резонансна множина Σ_Ψ симетрична стосовно початку координат.*

(ii) Функція зв'язку θ_Ψ має вигляд $\theta_\Psi(\alpha) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}}{\cos\sqrt{\alpha}}$, коли $\alpha > 0$, $\theta_\Psi(\alpha) = \frac{\cos\sqrt{-\alpha}}{\operatorname{ch}\sqrt{-\alpha}}$, коли $\alpha < 0$, та $\theta_\Psi(0) = 1$.

Доведення. (i) Нехай α належить Σ_Ψ, і йому відповідає власна функція w, тобто

$$-w'' + \alpha\Psi(\xi)w = 0, \quad \xi \in (-1,1), \qquad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0. \tag{13}$$

Зробимо в рівнянні (13) і крайових умовах заміну аргументу $\xi = -\zeta$

$$-w''(-\zeta) - \alpha\Psi(\zeta)w(-\zeta) = 0, \quad \zeta \in (-1,1), \qquad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0.$$

Тут ми скористались тим, що профіль Ψ непарний. Отже, число $-\alpha$ теж належить резонансній множині, і йому відповідає власна функція $w(-\xi)$.

(ii) Власну функцію шукатимемо у вигляді

$$g_\alpha(\xi) = \begin{cases} a_1 \operatorname{ch}\sqrt{\alpha}(\xi+1), & \xi \in (-1,0), \\ a_2 \cos\sqrt{\alpha}(\xi-1), & \xi \in (0,1), \end{cases}$$

$$g_\alpha(\xi) = \begin{cases} b_1 \cos\sqrt{-\alpha}(\xi+1), & \xi \in (-1,0), \\ b_2 \operatorname{ch}\sqrt{-\alpha}(\xi-1), & \xi \in (0,1) \end{cases}$$

для додатного та від'ємного α відповідно. Зауважимо, що $g'_\alpha(-1) = 0$ та $g'_\alpha(1) = 0$. Функція g_α задовольняє умови спряження в початку координат

$$g_\alpha(-0) = g_\alpha(+0), \quad g'_\alpha(-0) = g'_\alpha(+0). \tag{14}$$

Підставляючи g_α в умови спряження (14), отримуємо остаточний вигляд власної функції

$$g_\alpha(\xi) = \begin{cases} \cos\sqrt{\alpha}\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}(\xi+1), & \xi \in (-1,0), \\ \operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\cos\sqrt{\alpha}(\xi-1), & \xi \in (0,1), \end{cases}$$

$$g_\alpha(\xi) = \begin{cases} \operatorname{ch}\sqrt{-\alpha}\cos\sqrt{-\alpha}(\xi+1), & \xi \in (-1,0), \\ \cos\sqrt{-\alpha}\operatorname{ch}\sqrt{-\alpha}(\xi-1), & \xi \in (0,1) \end{cases}$$

для додатного та від'ємного α відповідно. Очевидно, що $\alpha = 0$ є власним значенням. Йому відповідає власна функція $g_0(\xi) = 1$, тому $\theta_\Psi(0) = 1$. Якщо $\alpha > 0$, то

$$\theta_\Psi(\alpha) = \frac{g_\alpha(1)}{g_\alpha(-1)} = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}}{\cos\sqrt{\alpha}}.$$

Функція θ_Ψ визначена для таких α, що $h(\alpha) = 0$, тому знаменник виразу для θ_Ψ не перетворюється на нуль. Аналогічно перевіряємо формулу для θ_Ψ у випадку від'ємного α. $\square$

У працях [16, 17, 18] була розв'язана задача розсіяння для різних кусково-сталих профілів. Зокрема, було показано, що резонансні сталі зв'язку для профілю Ψ є коренями рівняння $h(\alpha) = 0$, де функція h має вигляд (12). Тобто такий δ'-подібний бар'єр проникний лише у випадку, коли $\alpha \in \Sigma_\Psi$.

3.1. Асимптотика власних значень і власних функцій. Як було показано в [9], скінченна кількість перших власних значень задачі (11) необмежені знизу, і мають порядок $O(\varepsilon^{-2})$ при $\varepsilon \to 0$. Решта власних значень є додатними та обмеженими при $\varepsilon \to 0$. Надалі ми розглядатимемо лише обмежені власні значення. Знайдемо границі цих власних значень і відповідних власних функцій. Розглянемо рівняння (11) на інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Зробимо в ньому заміну $\xi = \varepsilon^{-1}x$, $u_\varepsilon(\xi) = y_\varepsilon(\varepsilon\xi)$

$$-\varepsilon^{-2}u''_\varepsilon + \varepsilon^{-2}\alpha\Psi(\xi)u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon u_\varepsilon. \tag{15}$$

Розглянемо допоміжне рівняння

$$-u'' + \alpha\Psi u = \tau^2 u, \quad \xi \in (-1,1), \quad (\alpha,\tau) \in \mathcal{M}.$$

Тут $\mathcal{M} = \{(\alpha, \tau) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\colon\ |\alpha| > \tau^2\}$. Це рівняння має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_1(\xi;\tau,\alpha) = \begin{cases} \operatorname{ch}\sqrt{\alpha-\tau^2}\,\xi, & \xi\in(-1,0),\\ \cos\sqrt{\alpha+\tau^2}\,\xi, & \xi\in(0,1),\end{cases} \tag{16}$$

$$u_2(\xi;\tau,\alpha) = \begin{cases} \alpha^{-1}\sqrt{\alpha+\tau^2}\operatorname{sh}\sqrt{\alpha-\tau^2}\,\xi, & \xi\in(-1,0),\\ \alpha^{-1}\sqrt{\alpha-\tau^2}\sin\sqrt{\alpha+\tau^2}\,\xi, & \xi\in(0,1).\end{cases} \tag{17}$$

Кожен з елементів бази є неперервним в нулі разом зі своєю похідною. Зрозуміло, що пара $u_1(\varepsilon^{-1}x;\varepsilon\omega_\varepsilon,\alpha)$ та $u_2(\varepsilon^{-1}x;\varepsilon\omega_\varepsilon,\alpha)$ утворюватиме фундаментальну систему розв'язків рівняння (15). Носій функції Ψ зосереджений на відрізку $[-1,1]$, тому на $(a,b)\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)$ рівняння (11) матиме вигляд $-y'' = \lambda^\varepsilon y$. Отже, власну функцію задачі (11) шукатимемо у вигляді

$$y_\varepsilon(x;\omega_\varepsilon,\alpha) = \begin{cases} A\sin\omega_\varepsilon(x-a), & x\in(a,-\varepsilon),\\ B\,u_1(\varepsilon^{-1}x,\alpha,\varepsilon\omega_\varepsilon) + C\,u_2(\varepsilon^{-1}x,\alpha,\varepsilon\omega_\varepsilon), & x\in(-\varepsilon,\varepsilon),\\ D\sin\omega_\varepsilon(x-b), & x\in(\varepsilon,b),\end{cases} \tag{18}$$

де $\omega_\varepsilon = \sqrt{\lambda^\varepsilon}$. Легко перевірити, що виконуються умови $y_\varepsilon(a) = 0$ та $y_\varepsilon(b) = 0$. Крім того, функції y_ε та y_ε' неперервні в початку координат. Власна функція задовольняє умови спряження в точках $-\varepsilon$ та ε

$$[y_\varepsilon]_{x=-\varepsilon} = 0,\quad [y_\varepsilon]_{x=\varepsilon} = 0,\quad [y_\varepsilon']_{x=-\varepsilon} = 0,\quad [y_\varepsilon']_{x=\varepsilon} = 0. \tag{19}$$

Підставляючи $y_\varepsilon(x;\omega_\varepsilon,\alpha)$ в (19), отримуємо характеристичний визначник

$$\Delta_\varepsilon(\omega,\alpha) = \begin{vmatrix} \sin(\varepsilon+a)\omega & u_1(-1;\varepsilon\omega,\alpha) & u_2(-1;\varepsilon\omega,\alpha) & 0\\ -\varepsilon\omega\cos(\varepsilon+a)\omega & u_1'(-1;\varepsilon\omega,\alpha) & u_2'(-1;\varepsilon\omega,\alpha) & 0\\ 0 & u_1(1;\varepsilon\omega,\alpha) & u_2(1;\varepsilon\omega,\alpha) & -\sin(\varepsilon-b)\omega\\ 0 & u_1'(1;\varepsilon\omega,\alpha) & u_2'(1;\varepsilon\omega,\alpha) & -\varepsilon\omega\cos(\varepsilon-b)\omega \end{vmatrix}.$$

Введемо комплекснозначні функції дійсного аргументу

$$\begin{aligned} h_1(z) &= \operatorname{ch}\sqrt{z}\cos\sqrt{z} + \operatorname{sh}\sqrt{z}\sin\sqrt{z},\\ h_2(z) &= \operatorname{ch}\sqrt{z}\cos\sqrt{z} - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{z}\cos\sqrt{z} + \operatorname{ch}\sqrt{z}\sin\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Лема 2. *Функція Δ_ε має таку асимптотику:*

$$\Delta_\varepsilon(\omega,\alpha) = f_0(\omega,\alpha) + \varepsilon\omega f_1(\omega,\alpha) + \varepsilon^2\omega^2 f_2(\omega,\alpha) + O(\varepsilon^3\omega^3) \tag{21}$$

при $\varepsilon\omega\to 0$, де $f_0(\omega,\alpha) = h(\alpha)\sin a\omega\sin b\omega$,

$$f_1(\omega,\alpha) = h(\alpha)\sin(b-a)\omega + h_1(\alpha)\sin a\omega\cos b\omega - h_1(-\alpha)\cos a\omega\sin b\omega; \tag{22}$$

$$f_2(\omega,\alpha) = -h(\alpha)\cos(b-a)\omega + h_2(\alpha)(\sin a\omega\sin b\omega + 2\cos a\omega\cos b\omega). \tag{23}$$

Доведення. Перейшовши в визначнику Δ_ε до границі при $\varepsilon\omega\to 0$, ми отримаємо

$$\begin{vmatrix} \sin a\omega & u_1(-1;0,\alpha) & u_2(-1;0,\alpha) & 0\\ 0 & u_1'(-1;0,\alpha) & u_2'(-1;0,\alpha) & 0\\ 0 & u_1(1;0,\alpha) & u_2(1;0,\alpha) & \sin b\omega\\ 0 & u_1'(1;0,\alpha) & u_2'(1;0,\alpha) & 0 \end{vmatrix} = h(\alpha)\sin a\omega\sin b\omega.$$

Знайдемо наступний член асимптотики функції Δ_ε. Перейдемо до границі при $\varepsilon\omega \to 0$ у виразі $(\varepsilon\omega)^{-1}[\Delta_\varepsilon(\omega,\alpha) - f_0(\omega,\alpha)]$. Ця границя буде такою:

$$\begin{vmatrix} u_1'(-1;0,\alpha) & u_2'(-1;0,\alpha) \\ u_1'(1;0,\alpha) & u_2'(1;0,\alpha) \end{vmatrix} \sin(b-a)\omega + \begin{vmatrix} u_1'(-1;0,\alpha) & u_2'(-1;0,\alpha) \\ u_1(1;0,\alpha) & u_2(1;0,\alpha) \end{vmatrix} \sin a\omega \cos b\omega$$
$$- \begin{vmatrix} u_1(-1;0,\alpha) & u_2(-1;0,\alpha) \\ u_1'(1;0,\alpha) & u_2'(1;0,\alpha) \end{vmatrix} \cos a\omega \, \sin b\omega.$$

Отже, $f_1(\omega,\alpha)$ має вигляд (22). Тепер знайдемо f_2. Для цього у виразі

$$(\varepsilon\omega)^{-2}[\Delta_\varepsilon(\omega,\alpha) - f_0(\omega,\alpha) - \varepsilon\omega f_1(\omega,\alpha)]$$

перейдемо до границі при $\varepsilon\omega \to 0$. Аналогічно показуємо, що функція $f_2(\omega,\alpha)$ має зображення (23). $\square$

Зауваження 1. Асимптотика визначника Δ_ε, отримана в лемі 2, правильна лише для власних частот ω_ε задачі (11), які є обмеженими при $\varepsilon \to 0$, тому що для скінченної кількості частот з малими номерами $\varepsilon\omega_\varepsilon \not\to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Далі опишемо граничну поведінку власних значень задачі (11).

Теорема 2. *Нехай власне значення λ^ε задачі* (11) *є обмеженим при $\varepsilon \to 0$, тоді λ^ε має границю λ_0 при $\varepsilon \to 0$. Крім того, λ_0 є власним значенням оператора Штурма-Ліувілля $A(\alpha,\Psi)$.*

Доведення. Спершу припустимо, що власне значення λ^ε має границю λ_0 при $\varepsilon \to 0$. Нехай α не належить до резонансної множини, тобто $h(\alpha) \neq 0$. Якщо число $\omega_0 = \sqrt{\lambda_0}$ є границею власної частоти при $\varepsilon \to 0$, то згідно з лемою 2 воно є коренем рівняння

$$\sin a\omega \sin b\omega = 0. \tag{24}$$

Легко переконатися, що рівняння (24) є характеристичним для оператора $A(\alpha,\Psi)$ у випадку, коли $\alpha \notin \Sigma_\Psi$; отже, λ_0 є власним значенням цього оператора.

Тепер нехай α належить резонансній множині. З леми 1 отримуємо, що $h(\alpha) = 0$, і легко перевірити, що $h_1(\alpha) \neq 0$. Застосовуючи лему 2, отримуємо, що $f_0(\omega;\alpha) = 0$, бо містить множник $h(\alpha)$. Граничні частоти визначають із коефіцієнта порядку ε у розвиненні функції Δ_ε , а саме

$$\cos a\omega \sin b\omega - \frac{h_1(\alpha)}{h_1(-\alpha)} \sin a\omega \cos b\omega = 0. \tag{25}$$

Зауважимо таке: якщо α належить до Σ_Ψ, то виконується: $\operatorname{tg}\sqrt{\alpha} = \operatorname{th}\sqrt{\alpha}$. Нехай $\alpha > 0$, тоді правильні такі перетворення:

$$h_1(\alpha) = \operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\cos\sqrt{\alpha}(1 + \operatorname{th}\sqrt{\alpha}\operatorname{tg}\sqrt{\alpha}) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}}{\cos\sqrt{\alpha}} = \theta_\Psi(\alpha).$$

У випадку від'ємного α аналогічно перевіряємо, що $h_1(\alpha) = \theta_\Psi(\alpha)$. З леми 1 випливає, що $\theta_\Psi(-\alpha) = \theta_\Psi(\alpha)^{-1}$. Отже, враховуючи останню рівність, маємо

$$h_1(-\alpha) = \theta_\Psi(-\alpha) = \theta_\Psi(\alpha)^{-1}.$$

Тому рівняння (25) можна записати так:

$$\cos a\omega \sin b\omega - \theta_\Psi^2(\alpha) \sin a\omega \cos b\omega = 0.$$

Легко перевірити, що це рівняння є характеристичним для оператора $A(\alpha, \Psi)$, якщо $\alpha \in \Sigma_\Psi$. Отже, λ_0 є власним значенням оператора $A(\alpha, \Psi)$.

Тепер доведемо існування границі для довільного власного значення λ^ε задачі (11), обмеженого при $\varepsilon \to 0$. Нагадаємо, що λ^ε є неперервною функцією параметра $\varepsilon \in (0, 1)$. Доведемо від супротивного. Нехай виконується нерівність

$$\mu_* = \varliminf_{\varepsilon \to 0} \lambda^\varepsilon < \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \lambda^\varepsilon = \mu^*,$$

де числа μ_*, μ^* – скінченні, бо λ^ε – обмежена функція. Тоді для кожного $\lambda \in [\mu_*, \mu^*]$ існує збіжна до нього підпослідовність $\lambda_{\varepsilon'}$, $\varepsilon' \to 0$. Згідно з доведеним вище число λ буде власним значенням оператора $A(\alpha, \Psi)$. Зважаючи на те, що λ – довільне число з $[\mu_*, \mu^*]$, отримуємо, що цей відрізок міститься в $\sigma(A(\alpha, \Psi))$. Це можливо лише тоді, коли $\mu_* = \mu^*$. □

Як випливає з доведення теореми, якщо α не належить до Σ_Ψ, то власні частоти оператора $A(\alpha, \Psi)$ є коренями рівняння (24). У випадку, коли α є елементом резонансної множини, власні частоти визначаються з рівняння (25). Очевидно, що кожен кратний корінь (24) є розв'язком рівняння (25). Позначимо через Ω множину кратних коренів рівняння (24), тобто $\Omega = \{\omega\colon \exists (k, m) \in \mathbb{N}^2,\ \omega = \frac{\pi k}{a} = \frac{\pi m}{b}\}$.

Якщо ω_ε є нулем функції Δ_ε та $\omega_\varepsilon \to \omega_0$ при $\varepsilon \to 0$, то коефіцієнти власної функції (18) обчислюємо явно, й після нормування функція y_ε матиме таку асимптотику:

$$y_\varepsilon(x; \omega_\varepsilon, \alpha) = Y(x; \omega_0, \alpha) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

де

$$Y(x; \omega_0, \alpha) = \begin{cases} \nu(\omega_0, \alpha) h_1(-\alpha) \sin b\omega_0 \, \sin \omega_0 (x - a), & x \in (a, 0), \\ \nu(\omega_0, \alpha) \sin a\omega_0 \, \sin \omega_0 (x - b), & x \in (0, b). \end{cases} \tag{26}$$

Тут ν – нормувальний множник, тобто $\|Y(\,\cdot\,; \omega_0, \alpha)\| = 1$.

Теорема 3. *Нехай $\omega_\varepsilon \to \omega_0$ при $\varepsilon \to 0$, і гранична частота ω_0 не належить множині Ω. Тоді y_ε збігається в $L_2(a, b)$ до власної функції оператора $A(\alpha, \Psi)$, яка відповідає граничній частоті ω_0.*

Доведення. Нехай α не належить до множини Σ_Ψ. В цьому випадку вважатимемо, що оператор $A(\alpha, \Psi)$ відповідає системі двох струн, закріплених в точках $x = a$, $x = 0$ та $x = 0$, $x = b$ відповідно. Зауважимо, що ω_0 є власною частотою лише однієї з цих струн, бо $\omega_0 \notin \Omega$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що ω_0 є власною частотою струни, розташованої на $(a, 0)$, тобто $\omega_0 = \frac{\pi k}{a}$ для деякого $k \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що тоді власна функція оператора $A(\alpha, \Psi)$ дорівнює нулю на $(0, b)$. При всіх натуральних n виконується $\omega_0 \neq \frac{\pi n}{b}$, бо ω_0 – простий корінь рівняння (24). Тому $\sin a\omega_0 = 0$, але $\sin b\omega_0 \neq 0$. Підставляючи ω_0 в (26), отримуємо, що власна функція y_ε, яка відповідає ω_ε, при $\varepsilon \to 0$ прямує до функції

$$Y(x; \omega_0, \alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{|a|}} \sin \frac{\pi k}{a}(x - a), & x \in (a, 0), \\ 0, & x \in (0, b) \end{cases}$$

в топології простору $L_2(a, b)$. Залишилося зауважити, що функція Y є нормованою власною функцією оператора $A(\alpha, \Psi)$, яка відповідає власній частоті $\frac{\pi k}{a}$. Якщо ω_0 –

власна частота струни на $(0, b)$, то

$$Y(x;\omega_0,\alpha)=\begin{cases}0, & x\in(a,0),\\ \sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{\pi m}{b}(x-b), & x\in(0,b).\end{cases}$$

Зауважимо, що границі власних функцій у нерезонансному випадку не залежать від α.

Тепер припустимо, що α належить резонансній множині. Тоді ω_0 є коренем рівняння (25), як це видно з доведення теореми 2. Позаяк $\omega_0 \notin \Omega$, то ω_0 не може бути коренем рівняння (24). Отже, в цьому випадку обидва значення $\sin a\omega_0$ та $\sin b\omega_0$ відмінні від нуля. В доведенні теореми 2 було показано таке: коли $\alpha \in \Sigma_\Psi$, то $h_1(-\alpha) = \theta_\Psi(\alpha)^{-1}$. З (26) одержуємо, що власна функція $y_\varepsilon(x;\omega_\varepsilon,\alpha)$ збігається в $L_2(a,b)$ до функції

$$Y(x;\omega_0,\alpha)=\begin{cases}\nu(w_0,\alpha)\theta_\Psi(\alpha)^{-1}\sin b\omega_0\,\sin\omega_0(x-a), & x\in(a,0),\\ \nu(w_0,\alpha)\sin a\omega_0\,\sin\omega_0(x-b), & x\in(0,b),\end{cases}$$

де нормувальний множник ν такий:

$$\nu(\omega_0,\alpha)=\sqrt{2}\theta_\Psi(\alpha)\big(\theta_\Psi^2(\alpha)b\sin^2 a\omega_0 - a\sin^2 b\omega_0\big)^{-\frac{1}{2}}.$$

Неважко переконатися, що $Y(x;\omega_0,\alpha)$ є власною функцією оператора $A(\alpha,\Psi)$, яка відповідає власній частоті ω_0. □

Автор висловлює щиру подяку Ю. Д. Головатому за формулювання задачі та увагу, виявлену під час підготовки статті. Автор також вдячний рецензенту за критичні зауваження та цінні поради, які вдосконалити текст статті.

---

1. *Albeverio S.* Solvable models in quantum mechanics. With an appendix by Pavel Exner. 2nd revised ed. / *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.* – Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2005.
2. *Albeverio S.* Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators / *S. Albeverio, P. Kurasov* – Cambridge: Univ. Press, 2000.
3. *Березин Ф.А.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / *Березин Ф.А, Фадеев Л.Д.* // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137. – С. 1011-1015.
4. *Ćurgus B.* A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weigth function / *Ćurgus B., Langer H.* // J. Diff. Eq. – 1989. – Vol. 79, №1. – P. 31-61.
5. *Šeba P.* Some remarks on the δ'-interaction in one dimension / *Šeba P.* // Rep. Math. Phys. – 1986. – Vol. 24, №1. – P. 111–120.
6. *Grossmann A.* A class of explicitly soluble, local, many-center Hamiltonians fot one-particle quantum mechanics in two and three dimensions / *Grossmann A., Høegh-Krohn R., Mebkhout M.* // J. Math. Phys. – 1980. – Vol. 21, №9. – P. 2376-2385.
7. *Gesztesy F.* A new class of solvable models in quantum mechanics describing point interactions on the line / *Gesztesy F., Holden H.* // J. Phys. – 1987. – Vol. A20 – P. 5157-5177.
8. *Головатий Ю.Д.* Оператор Шрединґера з δ'-потенціалом / *Головатий Ю.Д., Манько С.С.* // Доп. НАНУ. –2009. – №5.– С. 16-21.
9. *Головатий Ю.Д.* Точні моделі для операторів Шрединґера з δ'-подібними потенціалами / *Головатий Ю.Д., Манько С.С.* // Укр. матем. вісник. –2009. – Т. 6, №2.– С. 173-207.

10. *Нижник Л.П.* Оператор Шрёдингера с δ'-взаимодействием / *Нижник Л.П.* // Функц. анализ и его прил. – 2003. – Т. 37, №1. – С. 85–88.
11. *Derkach V.A.* Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps / *Derkach V.A., Malamud M.M.* // J. Funct. Anal. – 1991. – Vol. 95, №1. – P. 1–95.
12. *Кочубей А.Н.* Симметрические операторы и неклассические спектральные задачи / *Кочубей А.Н.* // Матем. Заметки. – 1979. – Т. 25, №3. – С. 425–434.
13. *Koshmanenko V.D.* Towards the rank one singular perturbations theory of selfadjoint operators / *Koshmanenko V.D.* // Ukrainian Math. J. – 1991. – Vol. 43, №11. – P. 1559-1566.
14. *Нижник Л.П.* Одномерный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева / *Нижник Л.П.* // Функц. анализ и его прил. – 2006. – Т. 40, №2. – С. 74–79.
15. *Kurasov P.* On the δ'-interactions in one dimension / *Kurasov P., Elander N.* – Prepr. MSI 93-7, ISSN-1100-214X, Stockholm, Sweden, 1993.
16. *Christiansen P.L.* On the existence of resonances in the transmission probability for interactions arising from derivatives of Dirac's delta function / *Christiansen P.L., Arnbak H.C., Zolotaryuk A.V., Ermakov V.N., Gaididei Y.B.* // J. Phys. A. – 2003. – Vol. 36. – P. 7589-7600.
17. *Zolotaryuk A.V.* Two-parametric resonant tunneling across the $\delta'(x)$ potential / *Zolotaryuk A.V.* // Adv. Sci. Lett. – 2008. – Vol. 1. – P. 187-191.
18. *Toyama F.* Transmission-reflection problem with a potential of the form of the derivative of the delta function / *Toyama F., NogamiY.* // J. Phys. A – 2007. – Vol. 40. – P. F685-F690.

ON SCHRÖDINGER AND STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH δ'-POTENTIALS

Stepan MAN'KO

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: s_manko@franko.lviv.ua

Solvable models of quantum mechanics, where the one-dimensional Schrödinger operator with the pseudopotential $\alpha\delta'(x)$ appears, are considered. In the paper spectral properties and the asymptotic behavior of transmission coefficients of the Hamiltonians perturbed by the short-range potentials $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, which converge to $\alpha\delta'(x)$ as $\varepsilon \to 0$ in the space of distributions, are studied. It has been proved that the solvable model depends on the method of regularization, that is to say, it depends on profile Ψ. The resonant phenomenon for the probability of transmission through δ'-potential is discovered. It has been investigated the asymptotic behavior of spectrum and pure states for the Sturm-Liouville operator with the local perturbation in the potential of the type $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$.

Key words: Schrödinger operator, solvable models, δ'-potential, resonant set, coupling function.

ОБ ОПЕРАТОРАХ ШРЁДИНГЕРА И ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С δ'-ПОТЕНЦИАЛАМИ

Степан МАНЬКО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: s_manko@franko.lviv.ua

Рассмотрено модели квантовой механики, в которых возникает одномерный оператор Шрёдингера с псевдопотенциалом $\alpha\delta'(x)$, где $\delta(x)$ – функция Дирака. Изучены спектральные свойства и поведение коэффициентов рассеяния для семейства регуляризированых гамильтонианов с потенциалами вида $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, которые при $\varepsilon \to 0$ сходятся к $\alpha\delta'(x)$ в топологии обобщенных функций. Доказано, что реализация точной модели зависит от метода регуляризации, а именно, профиля Ψ. Доказано существование эффекта резонанса для вероятности проникновения сквозь $\alpha\delta'$-барьер. Исследовано предельное поведение спектра и чистых состояний оператора Штурма-Лиувилля с локальным возмущением потенциала вида $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, точные модели, δ'-потенциал, резонансное множество, функция связи.

Стаття надійшла до редколегії 27.03.2009

Прийнята до друку 16.12.2009