ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2010. *Ser. Mech. Math. 2010.*
Вип. 72. С. 79–93 *Is. 72. P. 79–93*

УДК 517.938

ПОБУДОВА ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА ДЕЯКИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Іван ГРОД[1], Віктор КУЛИК[2]

[1] *Тернопільський державний педагогічний університет ім. В. Гнатюка,*
46027 Тернопіль, вул. Винниченка, 10, Україна
e-mail: grod@tnpu.edu.ua,
[2] *Сілезький технічний університет,*
44100 Глівіце, вул. Кашубська, 23, Польща,
e-mail: Viktor.Kulyk@polsl.pl

Досліджено питання побудови функцій Ляпунова для деяких лінійних розширень динамічних систем.

Ключові слова: лінійне розширення динамічної системи, функція Гріна, регулярні лінійні розширення, квадратична форма, похідна згідно з системою, додатно визначена матриця.

1. Вступ. Ключовим питанням в теорії збурення інваріантних многовидів динамічних систем є питання існування функції Гріна [1]. Ця функція дає змогу записувати інваріантні многовиди в явному інтегральному вигляді, що допомагає досліджувати гладкості інваріантних многовидів, а також їхню неперервну залежність від параметрів. Питання існування функції Гріна тісно пов'язано з питанням існування узагальненої функції Ляпунова, яку розглядають у вигляді квадратичних форм [2]. Такі форми можуть змінювати знак і вироджуватись у деяких точках, а їхня похідна згідно з системою рівнянь є знаковизначеною. Досить часто виникає задача побудови функції Ляпунова [3]. Знання конкретного вигляду функції Ляпунова дає змогу оцінити величину збурення динамічних систем, за яких зберігаються обмежені інваріантні многовиди. Незважаючи на глибокі теоретичні дослідження інваріантних тороїдальних многовидів [4, 5], питання побудови функції Гріна і функції Ляпунова для деяких лінійних розширень динімічних систем на торі залишається відкритим. Дослідженню задачі побудови функцій Ляпунова для деяких лінійних розширень динамічних систем присвячена ця стаття.

2. Формування і обґрунтування основних тверджень. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y, \tag{1}$$

де $x \in R^m$, $y \in R^n$, $f(x)$ – вектор-функція, визначена і неперервна на R^m, яка локально задовольняє умову Ліпшиця. Матриця $A(x)$ є $n \times n$-мірною. Її елементами є дійсні функції, визначені неперервні й обмежені на R^m. Додатково припускаємо, що кожний розв'язок $x\,(t; x_0)$ задачі Коші $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $x|_{t=0} = x_0$ визначений при всіх $t \in R$. Для цього достатньо припускати, що вектор-функція $f(x)$ задовольняє оцінку $\|f(x)\| \leq \alpha_1 \|x\| + \alpha_2$ з деякими невід'ємними сталими α_1, α_2.

Далі використовуватимемо такі позначення: $C^0\,(R^m)$ – простір дійсних функцій, неперервних і обмежених на R^m, $\langle y, \bar{y} \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \bar{y}_j$ – скалярний добуток в R^n, $\|y\| = \sqrt{\langle y, y \rangle}$ – норма вектора. Нехай $C'\,(R^m; f)$ – підпростір простору $C^0\,(R^m)$ таких функцій $F(x)$, що суперпозиція $F\,(x\,(t; x_0))$ як функція змінної t є неперервно диференційовною, і за означенням: $\frac{d}{dt} F\,(x\,(t; x))\,|_{t=0} \overset{def}{=} \dot{F}(x) \in C^0\,(R^m)$. Норму $n \times n$-мірної матриці G будемо розуміти як операторну норму: $\|G\| = \max\limits_{\|y\|=1} \|Gy\|$. Нехай $\Omega^t_\tau\,(x_0)$ – фундаментальна матриця розв'язків лінійної системи

$$\frac{dy}{dt} = A\,(x\,(t; x_0))\,y, \tag{2}$$

нормована в точці $t = \tau$: $\Omega^t_\tau(x_0)|_{t=\tau} = I_n$, де I_n – одинична матриця.

Поряд з системою (1) розглядатимемо неоднорідну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y + h(x), \tag{3}$$

де $h(x) \in C^0\,(R^m)$.

Означення 1. *Говоритимемо, що система* (3) *має обмежений інваріантний многовид, визначений рівністю*

$$y = u(x), \tag{4}$$

якщо функція $u(x) \in C'\,(R^m; f)$ *і виконується тотожність*

$$\dot{u}(x) \equiv A(x)u(x) + h(x) \quad \text{для всіх} \quad x \in R^m. \tag{5}$$

Зауваження 1. У випадку, коли функція (4) є неперервно диференційовною, тотожність (5) записується у вигляді

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} f_j(x) \equiv A(x)u(x) + h(x).$$

Означення 2. *Нехай існує* $n \times n$*-мірна матриця* $C(x) \in C^0\,(R^m)$ *така, що для функції вигляду*

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(x) C(x(\tau; x)), & \tau \leq 0, \\ \Omega^0_\tau(x)[C(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \tag{6}$$

виконується оцінка

$$\|G_0\,(\tau, x)\| \leq K \exp\{-\gamma\,|\tau|\} \tag{7}$$

з деякими додатними сталими K, γ. Тоді функцію (6) *називають функцією Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди системи* (3).

Існування функції Гріна (6) дає змогу стверджувати, що система (3) має обмежений інваріантний многовид (4) при кожній функції $h(x) \in C^0(R^m)$ і його можна записати в інтегральному вигляді

$$y = u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, x) \cdot h(x(\tau; x))\, d\tau.$$

Зауваження 2. Виконання оцінки (7) для функції Гріна (6) еквівалентне виконанню

$$\|G_t(0, x)\| \leq K \exp\{-\gamma |t|\} \tag{8}$$

для допоміжної функції

$$G_t(0, x) = \begin{cases} \Omega_0^t(x) C(x), & t \geq 0, \\ \Omega_0^t(x)[C(x) - I_n], & t < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Із вигляду функції Гріна (6) випливає таке: якщо існують дві різні такі функції

$$\bar{G}_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x) \bar{C}(x(\tau; x)) \quad , & \tau \leq 0 \\ \Omega_\tau^0(x) \left[\bar{C}(x(\tau; x)) - I_n\right], & \tau > 0, \end{cases}$$

$$\tilde{G}_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x) \tilde{C}(x(\tau; x)) \quad , & \tau \leq 0 \\ \Omega_\tau^0(x) \left[\tilde{C}(x(\tau; x)) - I_n\right], & \tau > 0, \end{cases}$$

то їх існує безліч. Серед них, наприклад, можна розглядати такі:

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x) \left\{\bar{C}(x(\tau; x)) + p\left[\bar{C}(x(\tau; x)) - \tilde{C}(x(\tau; x))\right]\right\} \quad , & \tau \leq 0 \\ \Omega_\tau^0(x) \left\{\bar{C}(x(\tau; x)) + p\left[\bar{C}(x(\tau; x)) - \tilde{C}(x(\tau; x))\right] - I_n\right\}, & \tau > 0, \end{cases}$$

де p – будь-яке дійсне число.

Систему рівнянь (1), яка має єдину функцію Гріна (6), прийнято називати регулярною; якщо ж система (1) має безліч різних функцій Гріна (6), то цю систему називають строго слабко регулярною.

Простим прикладом регулярної системи є

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = (1 + 2009 \cos x) y,$$

а прикладом строго слабко регулярної системи є

$$\frac{dx}{dt} = \sin x, \quad \frac{dy}{dt} = 2009 (\cos x) y.$$

Варто наголосити, що у випадку, коли матриця $A(x) \equiv A$ є сталою, система (1) може бути тільки регулярною і буде регулярною тоді і тільки тоді, коли $Re\lambda_j \neq 0$ для всіх власних чисел λ_j матриці A. Звідси випливає таке: якщо визначник сталої матриці A дорівнює нулю, то система (1) не може бути регулярною. Виявляється, для змінної матриці $A(x)$ може виконуватись тотожність $\det A(x) \equiv 0$, $x \in R^m$, а сама система (1) буде регулярною. Наведемо простий приклад такої системи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dy_1}{dt} = y_1 \cos 2x + y_2 (\sin 2x - 1), \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 (\sin 2x + 1) - y_2 \cos 2x. \end{array} \right. \tag{10}$$

У наведеній системі визначник матриці $A(x) = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x - 1 \\ \sin 2x + 1 & -\cos 2x \end{pmatrix}$ тотожно дорівнює нулеві. У цьому разі система (10) заміною змінних

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

зводиться до регулярної системи зі сталими коефіцієнтами $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dz_i}{dt} = (-1)^{i+1} z_i$, тому система (10) має єдину функцію Гріна, тобто є регулярною.

Зауваження 3. Якщо система (1) є регулярною, то відповідна (2) неоднорідна система

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t; x_0))\, y + f(t) \tag{11}$$

при кожній неперервній і обмеженій на R функції $f(t)$ матиме обмежений на R розв'язок і цей розв'язок можна записати в інтегральному вигляді $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(\tau, x_0) f(\tau)\, d\tau$, де $G_t(\tau, x)$ – ***функція Гріна задачі про обмежені розв'язки для лінійної системи*** (2)

$$G_t(\tau, x_0) = \left\{ \begin{array}{c} \Omega_\tau^t(x_0)\, C(x(\tau; x_0)), \ \tau \le t \\ \Omega_\tau^t(x_0)\, [C(x(\tau; x_0)) - I_n], \ \tau > t. \end{array} \right.$$

Звідси випливає такий висновок: *якщо неоднорідна система* (11) *при деякому фіксованому значенні $x_0 \in R^m$ і при деякій неперервній і обмеженій на R функції $f(t)$ не має обмеженого на R розв'язку, то функції Гріна* (6) *система* (1) *не має.*

Наведемо приклад такої системи (1), яка не має функції Гріна (6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \cos x_1 \cos x_2 \sin x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \cos x_1 \sin x_2, \\ \dfrac{dy}{dt} = [\lambda_1(x) \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 + \lambda_2(x) \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3 + \lambda_3(x) \cos x_1 \sin x_2 \sin x_3] y, \end{array} \right.$$

де $\lambda_j(x) = \lambda_j(x_1, x_2, x_3)$, $j = 1, 2, 3$, будь-які функції неперервні й обмежені на R^3. Вибираючи стаціонарний розв'язок перших трьох рівнянь $x_1 \equiv \frac{\pi}{2}$, $x_2 \equiv \frac{\pi}{2}$, $x_3 \equiv \pi$ і підставляючи в останнє рівняння, отримуємо $\frac{dy}{dt} = 0 \cdot y$. Відповідне неоднорідне рівняння $\frac{dy}{dt} = 0 \cdot y + 1$ не має обмежених розв'язків, а з цього випливає, що наведена вище система не має функції Гріна.

Ефективним методом дослідження властивості регулярності систем (1) є метод функцій Ляпунова. Такі функції розглядають у вигляді квадратичних форм. На відміну від традиційної функції Ляпунова квадратична форма може змінювати знак чи навіть вироджуватись у деяких точках.

Відомо [1] таке: якщо існує квадратична форма $V = \langle S(x)y, y\rangle$ з симетричною матрицею коефіцієнтів $S(x) \in C'(R^m; f)$, похідна якої згідно з системою (1) додатно визначена

$$\dot{V} = \left\langle \left[\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x)\right] y, y \right\rangle \geq \|y\|^2 \tag{12}$$

і у цьому разі

$$\det S(x) \neq 0 \ , \quad \forall x \in R^n, \tag{13}$$

то система (1) матиме єдину функцію Гріна (6). Наприклад, для системи (10) можна вибрати функцію Ляпунова у такому вигляді $V = y_1^2 \cos 2x + 2y_1y_2 \sin 2x - y_2^2 \cos 2x$. У цьому разі похідна цієї функції згідно з системою (10) додатно визначена $\dot{V} = 2\left(y_1^2 + y_2^2\right)$.

З іншого боку, відомо [1] таке: якщо система (1) регулярна, то існує множина різних симетричних матриць $S(x) \in C'(R^m; f)$, для яких виконується нерівність (12). У випадку, коли вдається записати функцію Гріна (6) і вона є єдиною, деякі з матриць $S(x)$, що задовольняють нерівності (12), можна записати у вигляді різниці інтегралів

$$\begin{aligned} S(x) = 2 \int\limits_{-\infty}^{0} \left[C(x) - I_n\right]^T \left[\Omega_0^z(x)\right]^T \left[\Omega_0^z(x)\right] \left[C(x) - I_n\right] dz - \\ -2 \int\limits_{0}^{+\infty} \left[C(x)\right]^T \left[\Omega_0^z(x)\right]^T \left[\Omega_0^z(x)\right] \left[C(x)\right] dz. \end{aligned} \tag{14}$$

Конкретний запис функції Ляпунова дає змогу оцінити величину зміни правої частини системи (1), за яких ця система залишається регулярною. Знаходження функції Ляпунова $V = \langle S(x)y, y\rangle$, яка задовольняє умову (12), іноді є досить складним завданням і не завжди таку функцію можна відшукати.

Зображення матриці (14) можна узагальнити так:

$$\begin{aligned} S(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} \left[C(x) - I_n\right]^T \left[\Omega_0^z(x)\right]^T H_1\left(x\left(z; x\right)\right) \left[\Omega_0^z(x)\right] \left[C(x) - I_n\right] dz - \\ - \int\limits_{0}^{+\infty} \left[C(x)\right]^T \left[\Omega_0^z(x)\right]^T H_2\left(x\left(z; x\right)\right) \left[\Omega_0^z(x)\right] \left[C(x)\right] dz = S\left(x; H_1, H_2\right), \end{aligned} \tag{15}$$

де $H_i(x) \in C^0(R^m)$, $i = 1, 2,$ – довільні симетричні матриці, які задовольняють умову додатної визначеності: $\langle H_i(x)y, y\rangle \geq 2\|y\|^2$. Множина матриць (15) при змінах двох незалежних додатно визначених матриць $H_i(x) \in C^0(R^m)$ збігається з множиною матриць $S(x; H, H)$ при змінах тільки однієї додатно визначеної матриці $H(x) \in \in C^0(R^m)$. Достатньо вибрати матрицю $H(x) \in C^0(R^m)$ в такому вигляді:

$$H(x) = \left(C(x) - I_n\right)^T H_1(x) \left(C(x) - I_n\right) + C^T(x)H_2(x)C(x)$$

і врахувати дві тотожності $C^2(x) \equiv C(x)$, $C(x(z; x)) \equiv \Omega_0^z(x)C(x)\Omega_z^0(x)$.

Зауваження 4. У випадку, коли система (1) є регулярною, кожна з симетричних матриць $S(x) \in C'(R^m; f)$, для яких виконується нерівність (12), невироджена і, крім того, обернена $S^{-1}(x)$ є обмеженою на R^m.

Зауваження 5. Якщо деяка невироджена матриця $S(x) \in C'(R^m; f)$ задовольняє нерівність (12), то для матриці $-S^{-1}(x) = \bar{S}(x) \in C'(R^m; f)$ виконується нерівність

$$\left\langle \left[\dot{\bar{S}}(x) - \bar{S}(x)A^T(x) - A(x)\bar{S}(x) \right] z, z \right\rangle \geq \gamma \|z\|^2, \tag{16}$$

де $\gamma = \frac{1}{\|S\|_0^2}$. Це означає, що похідна невиродженої квадратичної форми $\left\langle \bar{S}(x)z, z \right\rangle$ згідно з системою спряженої за нормальними змінними до системи (1)

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dz}{dt} = -A^T(x)z \tag{17}$$

є додатно визначеною.

Відомо [1-3] таке: якщо існує квадратична форма

$$W = \langle \Theta(x)z, z \rangle \tag{18}$$

з обмеженою симетричною матрицею коефіцієнтів $\Theta(x) \in C'(R^m; f)$, похідна якої згідно зі спряженою системою (17) додатно визначена

$$\dot{W} = \left\langle \left[\dot{\Theta}(x) - \Theta(x)A^T(x) - A(x)\Theta(x) \right] z, z \right\rangle \geq \|z\|^2, \tag{19}$$

то система рівнянь (1) має функцію Гріна (6). Якщо додатково припустити, що $\det \Theta(x_0) = 0$ при деякому значенні $x_0 \in R^m$, то система (1) має безліч різних функцій Гріна (6), а система (17) не має жодної функції Гріна. Інакше $\det \Theta(x) \neq 0$, $\forall x \in R^m$ і системи (1), (17) будуть регулярними.

Розглянемо такий приклад:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega, \\ \frac{dy}{dt} = -y \cdot th \langle \lambda, x \rangle, \end{cases} \tag{20}$$

де $x \in R^m$, $y \in R$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ – деякі сталі вектори з R^m, $\langle \lambda, x \rangle = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m$ – скалярний добуток.

Переконаємось: якщо виконується нерівність

$$\langle \lambda, \omega \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \omega_j > 0, \tag{21}$$

то система рівнянь (20) має безліч різних функцій Гріна $G_0(\tau, x)$ задачі про обмежені інваріантні многовиди. З цією метою розглянемо спряжену до (20) систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega, \\ \frac{dz}{dt} = z \cdot th \langle \lambda, x \rangle, \end{cases} \tag{22}$$

і запишемо похідну скалярної функції

$$V = z^2 th \langle \lambda, x \rangle \tag{23}$$

згідно з системою (22). Маємо

$$\dot{V} = 2z\dot{z} \cdot th \langle \lambda, x \rangle + z^2 \frac{1}{ch^2 \langle \lambda, x \rangle} \langle \lambda, \omega \rangle = \left(2th^2 \langle \lambda, x \rangle + \frac{\langle \lambda, \omega \rangle}{ch^2 (\lambda, x)} \right) z^2. \tag{24}$$

Знаходимо найменше значення функції

$$f(\sigma) = 2th^2\sigma + \frac{p}{ch^2\sigma}$$

при $\sigma \in R$ і додатних значеннях параметра p. Отримуємо

$$\min_{\sigma\in R} f(\sigma) = \begin{cases} p, & 0 < p \le 2, \\ 2\left(\sqrt{2p}-1\right), & 2 \le p. \end{cases}$$

Отже, з рівності (24) випливає додатна визначеність похідної функції (23) згідно з системою (22)

$$\dot V \ge z^2 \cdot \min\{\langle\lambda,\omega\rangle, 2\}.$$

Оскільки функція (23) набуває нульового значення при $\langle\lambda, x\rangle = 0$, то система (20) має безліч різних функцій Гріна.

Щоб знайти хоча б одну з функцій Гріна, загальні розв'язки перших m рівнянь системи (20) $x(t;x) = \omega t + x$ підставимо в останнє рівняння

$$\frac{dy}{dt} = -y th\left(\langle\lambda,\omega\rangle t + \langle\lambda,x\rangle\right)$$

і запишемо скалярну функцію $\Omega_\tau^t(x)$

$$\Omega_\tau^t(x) = \exp\left\{-\int_\tau^t th\left(\langle\lambda,\omega\rangle\sigma + \langle\lambda,x\rangle\right)d\sigma\right\} =$$

$$= \left[\frac{\exp\{\langle\lambda,\omega\rangle\tau + \langle\lambda,x\rangle\} + \exp\{-\langle\lambda,\omega\rangle\tau - \langle\lambda,x\rangle\}}{\exp\{\langle\lambda,\omega\rangle t + \langle\lambda,x\rangle\} + \exp\{-\langle\lambda,\omega\rangle t - \langle\lambda,x\rangle\}}\right]^{\frac{1}{\langle\lambda,\omega\rangle}}.$$

Далі, ввівши позначення

$$k = \langle\lambda,\omega\rangle, \quad z = \langle\lambda,x\rangle \tag{25}$$

і записавши функцію $\Omega_\tau^t(x)$

$$\Omega_\tau^t(x) = \left[\frac{\exp\{k\tau+z\} + \exp\{-k\tau-z\}}{\exp\{kt+z\}+\exp\{-kt-z\}}\right]^{\frac{1}{k}}, \tag{26}$$

шукаємо скалярні функцій $C(z)$, для яких виконуються такі дві оцінки:

$$\begin{cases} \left|\Omega_0^t(x)C(z)\right| \le K\exp\{-\gamma t\}, & t \ge 0, \\ \left|\Omega_0^t(x)\left[C(z)-1\right]\right| \le K\exp\{\gamma t\}, & t \le 0 \end{cases} \tag{27}$$

з деякими додатними сталими K, γ. Взявши $\gamma = 1$ і враховуючи (26), оцінки (27) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} |C(z)| \le K\left[\frac{\exp\{z\}+\exp\{-2kt-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^{\frac{1}{k}}, & t \ge 0, \\ |C(z)-1| \le K\left[\frac{\exp\{2kt+z\}+\exp\{-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^{\frac{1}{k}}, & t \le 0. \end{cases} \tag{28}$$

У нерівностях (28) перейдемо до границі при $t \to +\infty$ і $t \to -\infty$, відповідно. Одержуємо

$$\begin{cases} |C(z)| \le K\left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^{\frac{1}{k}}, \\ |C(z)-1| \le K\left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^{\frac{1}{k}}. \end{cases} \tag{29}$$

Розглянемо спочатку випадок $\langle \lambda, \omega \rangle = k \geq 1$. Очевидно, що в цьому випадку виконується нерівність

$$\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}} \leq \left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^{\frac{1}{k}},$$

з якої випливає, що кожна функція $C(z)$, яка задовольняє нерівності

$$\begin{cases} |C(z)| \leq K\left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right], \\ |C(z)-1| \leq K\left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]. \end{cases} \tag{30}$$

також задовольнятиме і нерівності (29). За функцію $C(z)$, яка задовольняє нерівності (30), можна вибрати таку:

$$C(z) = \frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}. \tag{31}$$

За інші функції $C(z)$, які також задовольняють оцінки (30), можна взяти

$$C_n(z) = \left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^n, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{32}$$

Якщо виконується нерівність $\langle \lambda, \omega \rangle \geq 1$, то випишемо деякі функції Гріна системи (20)

$$G_0(\tau,x) = \begin{cases} \left[\frac{\exp\{k\tau+z\}+\exp\{-k\tau-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^{\frac{1}{k}} \left[\frac{\exp\{k\tau+z\}}{\exp\{k\tau+z\}+\exp\{-k\tau-z\}}\right]^n, & \tau \leq 0, \\ \left[\frac{\exp\{k\tau+z\}+\exp\{-k\tau-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^{\frac{1}{k}} \left\{\left[\frac{\exp\{k\tau+z\}}{\exp\{k\tau+z\}+\exp\{-k\tau-z\}}\right]^n - 1\right\}, & \tau > 0, \end{cases} \tag{33}$$

де $k = \langle \lambda, \omega \rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j \omega_j \geq 1$, $z = \langle \lambda, x \rangle$, n – довільне фіксоване натуральне число. Далі припустимо, що виконується нерівність

$$0 < \langle \lambda, \omega \rangle < 1. \tag{34}$$

Позначимо $p = \frac{1}{\langle \lambda, \omega \rangle} = \frac{1}{k}$ і запишемо нерівності (29)

$$\begin{cases} |C(z)| \leq K\left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^p, \\ |C(z)-1| \leq K\left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^p, \quad p > 1. \end{cases} \tag{35}$$

Якщо, наприклад, $p \in (0, 2]$, то кожна функція $C(z)$, яка задовольняє нерівності

$$\begin{cases} |C(z)| \leq K\left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^2, \\ |C(z)-1| \leq K\left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^2 \end{cases} \tag{36}$$

також задовольнятиме і нерівності (35). Після певних міркувань вдається знайти функцію, яка задовольняє нерівності (36), а саме

$$C(z) = -2\left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^3 + 3\left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^2 \equiv$$

$$\equiv 2\left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^3 - 3\left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^2 + 1.$$

Аналогічно, при $p = 3$ можна знайти

$$C(z) = 6\left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^5 - 15\left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^4 + $$
$$+10\left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^3 \equiv -6\left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^5 + $$
$$+15\left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^4 - 10\left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^3 + 1.$$

У загальному випадку, коли p – натуральне число, $p \geq 2$, функцію $C(z)$, яка задовольняє нерівності (35), можна записати у вигляді

$$C(z) = \Theta\left(\left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]\right), \tag{37}$$

де поліном $\Theta(q)$ визначений рівністю

$$\Theta(q) = \frac{\int\limits_0^q \sigma^{p-1}(1-\sigma)^{p-1}\,d\sigma}{\int\limits_0^1 \sigma^{p-1}(1-\sigma)^{p-1}\,d\sigma}. \tag{38}$$

Отож, якщо виконується нерівність (34), то функцію Гріна системи (20) можна записати у вигляді

$$G_0(\tau,x) = \begin{cases} \left[\frac{\exp\{k\tau+z\}+\exp\{-k\tau-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^{\frac{1}{k}}\Theta\left(\frac{\exp\{k\tau+z\}}{\exp\{k\tau+z\}+\exp\{-k\tau-z\}}\right), & \tau \leq 0, \\ \left[\frac{\exp\{k\tau+z\}+\exp\{-k\tau-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^{\frac{1}{k}}\left\{\Theta\left(\frac{\exp\{k\tau+z\}}{\exp\{k\tau+z\}+\exp\{-k\tau-z\}}\right)-1\right\}, & \tau > 0, \end{cases} \tag{39}$$

де $\Theta(q)$ – поліном вигляду (38), в якому натуральне число p вибрано так: якщо $\frac{1}{k} = \frac{1}{\langle\lambda,\omega\rangle}$ набуває натурального значення не менше 2, то вибираємо $p = \frac{1}{\langle\lambda,\omega\rangle}$, якщо ж $\frac{1}{\langle\lambda,\omega\rangle} > 1$ не є натуральним числом, то вибираємо $p = [\frac{1}{\langle\lambda,\omega\rangle}] + 1$, де $[\frac{1}{\langle\lambda,\omega\rangle}]$ – ціла частина числа $\frac{1}{\langle\lambda,\omega\rangle}$.

Зауваження 6. Якщо виконується нерівність (35), то система (20), крім функції Гріна вигляду (39), має ще безліч різних функцій Гріна, наприклад, такі:

$$G_0(\tau,x) = \begin{cases} \left[\frac{\exp\{k\tau+z\}+\exp\{-k\tau-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^{\frac{1}{k}}\Theta^n\left(\frac{\exp\{k\tau+z\}}{\exp\{k\tau+z\}+\exp\{-k\tau-z\}}\right), & \tau \leq 0, \\ \left[\frac{\exp\{k\tau+z\}+\exp\{-k\tau-z\}}{\exp\{z\}+\exp\{-z\}}\right]^{\frac{1}{k}}\left\{\Theta^n\left(\frac{\exp\{k\tau+z\}}{\exp\{k\tau+z\}+\exp\{-k\tau-z\}}\right)-1\right\}, & \tau > 0, \end{cases}$$

де $n = 2, 3, \ldots$, $z = \langle\lambda, x\rangle$.

Зауваження 7. Нехай $\alpha(x) = \alpha(x_1, ..., x_m)$ – деяка дійсна неперервна скалярна функція, визначена на R^m і задовольняє нерівності $0 \leq \alpha(x) \leq 1$ для всіх $x \in R^m$, тоді невідому функцію $C(x)$, яка задовольняє одночасно дві оцінки

$$\begin{cases} |C(x)| \leq K[\alpha(x)]^n, \\ |C(x)-1| \leq K[1-\alpha(x)]^n, \end{cases}$$

де $n \geq 2$ – натуральне число; K – деяка постійна незалежна від $x \in R^m$, можна виразити так:

$$C(x) = \frac{\int\limits_0^{\alpha(x)} \sigma^{n-1} (1-\sigma)^{n-1} \, d\sigma}{\int\limits_0^1 \sigma^{n-1} (1-\sigma)^{n-1} \, d\sigma}.$$

Наприклад, якщо треба знайти функцію $C(x)$, яка задовольняє оцінки

$$\begin{cases} |C(x)| \leq K \left[\sin^2 x_1 \sin^4 x_2 \cdot \ldots \cdot \sin^{2m} x_m\right]^{2010}, \\ |C(x) - 1| \leq K \left[1 - \sin^2 x_1 \sin^4 x_2 \cdot \ldots \cdot \sin^{2m} x_m\right]^{2010}, \end{cases}$$

то отримуємо, що

$$C(x) = \frac{\int\limits_0^{\left[\sin^2 x_1 \sin^4 x_2 \cdot \ldots \cdot \sin^{2m} x_m\right]} \sigma^{2009} (1-\sigma)^{2009} \, d\sigma}{\int\limits_0^1 \sigma^{2009} (1-\sigma)^{2009} \, d\sigma}.$$

Повертаючись до розгляду функції Ляпунова (18), зауважимо таке: якщо система (1) має безліч різних функцій Гріна й одну з таких функцій (6) вдалося безпосередньо записати, то матрицю коефіцієнтів $\Theta(x) \in C'(R^m; f)$ функції Ляпунова (18) можна подати у вигляді різниці інтегралів

$$\begin{aligned} \Theta(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} \left[\Omega^0_\tau(x) C(x(\tau;x))\right] \cdot H_1(x(\tau;x)) \cdot \left[\Omega^0_\tau(x) C(x(\tau;x))\right]^T d\tau - \\ - \int\limits_0^{+\infty} \left\{\Omega^0_\tau(x) \left[C(x(\tau;x)) - I_n\right]\right\} \cdot H_2(x(\tau;x)) \cdot \left\{\Omega^0_\tau(x) \left[C(x(\tau;x)) - I_n\right]\right\}^T d\tau, \end{aligned} \tag{40}$$

де $H_1(x), H_2(x) \in C^0(R^m)$ – *довільні симетричні матриці, які додатно визначені:* $\langle H_j(x) z, z\rangle \geq 2\|z\|^2$, $j = 1, 2$. Тут вже немає можливості вибору однієї матриці $H(x)$ як у формулі (15). У цьому разі систему (1) завжди можна доповнити новими рівняннями до регулярної системи. Це можна зробити, наприклад, так:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y, \quad \frac{dz}{dt} = y - A^T(x)z. \tag{41}$$

Похідна невиродженої квадратичної форми

$$2p\langle y, z\rangle + \langle \Theta(x)z, z\rangle \tag{42}$$

згідно з системою (41) при достатньо великих значеннях параметра $p > 0$ буде додатно визначеною. Достатньо вибрати $p > 0,5\|\Theta(x)\|^2$.

Зауваження 8. Функція Гріна системи (41) є $2n \times 2n$-мірною матрицею вигляду

$$\bar{G}_0(\tau, x) = \begin{pmatrix} \bar{G}^{11}_0(\tau, x) & \bar{G}^{12}_0(\tau, x) \\ \bar{G}^{21}_0(\tau, x) & \bar{G}^{22}_0(\tau, x) \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{cases} \begin{pmatrix} \Omega_\tau^0(x) & 0 \\ \omega(0,\tau,x) & [\Omega_0^\tau(x)]^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11}(x(\tau;x)) & C_{12}(x(\tau;x)) \\ C_{21}(x(\tau;x)) & C_{22}(x(\tau;x)) \end{pmatrix}, & \tau \le 0, \\ \begin{pmatrix} \Omega_\tau^0(x) & 0 \\ \omega(0,\tau,x) & [\Omega_0^\tau(x)]^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11}(x(\tau;x)) - I_n & C_{12}(x(\tau;x)) \\ C_{21}(x(\tau;x)) & C_{22}(x(\tau;x)) - I_n \end{pmatrix}, & \tau > 0, \end{cases} \tag{43}$$

де $\omega(0,\tau,x) = \int_\tau^0 [\Omega_0^\sigma(x)]^T \Omega_\tau^\sigma(x) d\sigma$. Блок $\bar{G}_0^{11}(\tau,x)$ матриці задає функцію Гріна системи (1): $\bar{G}_0^{11}(\tau,x) = G_0(\tau,x)$.

Зауваження 9. Систему (41) можна узагальнити так:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y + B_2(x)z, \quad \frac{dz}{dt} = B_1(x)y - A^T(x)z, \tag{44}$$

де $n \times n$-мірні матриці $B_1(x), B_2(x) \in C^0(R^m)$ задовольняють умови

$$\langle B_1(x)y, y\rangle \ge \beta_1 \|y\|^2 \ , \quad \beta_1 = const > 0 \ , \tag{45}$$

$$\langle B_2(x)y, y\rangle \ge 0. \tag{46}$$

У цьому разі похідна квадратичної форми (42) згідно з системою (44) також буде додатно визначеною при достатньо великих значеннях параметра $p > 0$.

Зауваження 10. Якщо у системі (44) для матриць $B_1(x), B_2(x) \in C^0(R^m)$ припустити виконання умови (45), а замість (46) – сильнішої умови

$$\langle B_2(x)y, y\rangle \ge \beta_2 \|y\|^2, \quad \beta_2 = const > 0, \tag{47}$$

то система (44) буде регулярною за будь-якої матриці $A(x) \in C^0(R^m)$.

Оскільки похідна невиродженої квадратичної форми $V = \langle y, z\rangle$ згідно з системою (44)

$$\dot{V} = \langle B_1 y, y\rangle + \langle B_2 z, z\rangle \tag{48}$$

додатно визначена, то система (44) є регулярною. Систему (44) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -A^T(x) \\ A(x) & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{49}$$

Похідна квадратичної форми $V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle$ згідно з системою дорівнює

$$\dot{V} = 2 \left\langle \begin{pmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{50}$$

Отже, якщо матриця $B(x) = diag\{B_1(x), B_2(x)\}$ додатно визначена або від'ємно визначена, то система (49) буде регулярною за будь-якої матриці $A(x) \in C^0(R^m)$. Ввівши позначення $y \to y_1$, $z \to y_2$, систему (49) узагальнимо

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S\frac{dy}{dt} = [B(x) + M(x)]\, y, \tag{51}$$

де S – постійна симетрична невироджена матриця; $M(x) \in C^0(R^m)$ – кососиметрична матриця

$$M^T(x) \equiv -M(x), \tag{52}$$

а матрицю $B(x) \in C^0(R^m)$ можна вважати симетричною, бо завжди можна записати $B(x) = \frac{1}{2}\left(B(x) + B^T(x)\right) + \frac{1}{2}\left(B(x) - B^T(x)\right)$. Легко бачити, що похідна квадратичної форми $V = \langle Sy, y\rangle$ згідно з системою (51) має вигляд

$$\dot{V} = 2\left\langle B(x)y, y\right\rangle. \tag{53}$$

Зауваження 11. Якщо в системі (49) невироджена симетрична матриця $S = S(x) \in \in C'(R^m; f)$ залежна від x, тобто є змінною, то для похідної згідно з цією системою квадратичної форми $V = \langle S(x)y, y\rangle$ не буде виконуватись рівність (53). Для того, щоб ця рівність виконувалась, треба систему (49) узагальнити так:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S(x)\frac{dy}{dt} = \left[B(x) + M(x) - \frac{1}{2}\dot{S}(x)\right]y. \tag{54}$$

До системи (54) можна прийти, проводячи такі міркування. Нехай існує квадратична форма $V = \langle S(x)y, y\rangle$ з симетричною матрицею коефіцієнтів $S(x) \in \in C'(R^m; f)$, похідна якої згідно з системою (1) додатно визначена, тобто виконується нерівність (12) і у цьому разі $\det S(x) \neq 0$ для всіх $x \in R^n$. Очевидно, що систему (1) можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S(x)\frac{dy}{dt} = S(x)A(x)y,$$

а далі отримуємо еквівалентну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\ , \qquad S(x)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\dot{S}(x)y = \left[S(x)A(x) + \frac{1}{2}\dot{S}(x)\right]y. \tag{55}$$

Тепер в отриманій системі матрицю

$$\bar{A}(x) = S(x)A(x) + \frac{1}{2}\dot{S}(x)$$

симетризуємо

$$\bar{A}(x) = \frac{1}{2}\left(\bar{A}(x) + \bar{A}^T(x)\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{A}(x) - \bar{A}^T(x)\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\left[S(x)A(x) + \tfrac{1}{2}\dot{S}(x)\right] + \left[S(x)A(x) + \tfrac{1}{2}\dot{S}(x)\right]^T\right\} +$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{\left[S(x)A(x) + \tfrac{1}{2}\dot{S}(x)\right] - \left[S(x)A(x) + \tfrac{1}{2}\dot{S}(x)\right]^T\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{S(x)A(x) + A^T(x)S(x) + \dot{S}(x)\right\} + \frac{1}{2}\left\{S(x)A(x) - A^T(x)S(x)\right\}.$$

Позначивши

$$B(x) = \frac{1}{2}\left\{S(x)A(x) + A^T(x)S(x) + \dot{S}(x)\right\}, \tag{56}$$

$$M(x) = \frac{1}{2}\left\{S(x)A(x) - A^T(x)S(x)\right\}, \tag{57}$$

бачимо, що систему (55) можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\ , \qquad S(x)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\dot{S}(x)y = \left[B(x) + M(x)\right]y, \tag{58}$$

де матриця $B(x)$, визначена рівністю (56), симетрична і додатно визначена, а матриця $M(x)$ вигляду (57) – кососиметрична. Переносячи в системі (58) доданок $\frac{1}{2}\dot{S}(x)y$ у правий бік, приходимо до системи (54).

Тепер систему (54) будемо розглядати як самостійну, з деякою симетричною матрицею $S(x) \in C'(R^m; f)$, яка задовольняє умови

$$\det S(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in R^m, \quad \|S^{-1}(x)\| \leq c < \infty. \tag{59}$$

Якщо в системі (54) симетрична матриця $B(x)$ додатно визначена, тобто $\langle B(x)y, y\rangle \geq \beta\|y\|^2$, $\beta = const > 0$, або від'ємно визначена $\langle B(x)y, y\rangle \leq -\beta\,\|y\|^2$, $\beta = const > 0$, то система (54) буде регулярною.

Розглядаючи систему (54) як самостійну, $x \in R^m$, $y \in R^n$ з вектор-функцією $f(x) \in C_{Lip}(R^m)$, $\|f(x)\| \leq \alpha_1\,\|x\| + \alpha_2$, $\alpha_i = const \geq 0$ і з деякими матрицями $B(x), M(x) \in C^0(R^m)$, $S(x) \in C'(R^m; f)$, що задовольняють умови (52), (59), сформулюємо таке твердження.

Теорема 1. *Нехай система* (54) *при нульовій матриці* $B(x) \equiv 0$ *має хоча б одну функцію Гріна* (6)*. Тоді кількість змінних* y *є парною і система* (54) *буде регулярною за будь-якої невід'ємної* ($\langle B(x)y, y\rangle \geq 0$) *симетричної матриці* $B(x) \in C^0(R^m)$*.*

Запропонуємо схему доведення цієї теореми. Якщо система (54) при нульовій матриці $B(x) \in C^0(R^m)$

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\ , \qquad \frac{dy}{dt} = S^{-1}(x)\left[M(x) - \frac{1}{2}\dot{S}(x)\right]y \tag{60}$$

має хоча б одну функцію Гріна (6), то існує деяка квадратична форма $W = \langle \Theta(x)z, z\rangle$, похідна якої згідно зі спряженою системою

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\ , \qquad \frac{dz}{dt} = \left[M(x) + \frac{1}{2}\dot{S}(x)\right]S^{-1}(x)z \tag{61}$$

додатно визначена. Оскільки між системами (60) і (61) існує зв'язок

$$z = S(x)y, \tag{62}$$

то похідна квадратичної форми $V = \langle S(x)\Theta(x)S(x)y, y\rangle$ згідно з системою (60) також буде додатно визначеною. Звідси випливає, що ці форми будуть невиродженими, а це означає, що системи (60) і (61) будуть регулярними. Зі зв'язку (62) видно, що кількість лінійно незалежних розв'язків системи

$$\frac{dy}{dt} = S^{-1}(x(t;x_0))\left[M(x(t;x_0)) - \frac{1}{2}\dot{S}(x(t;x_0))\right]y,$$

які прямують до нуля на $+\infty$, така сама як кількість таких розв'язків спряженої системи

$$\frac{dz}{dt} = \left[M(x(t;x_0)) + \frac{1}{2}\dot{S}(x(t;x_0))\right]S^{-1}(x(t;x_0))\,z.$$

Звідси випливає, що кількість змінних $y \in R^n$ є парним числом $n = 2n_1$.

Повертаючись до системи (54) з симетричною невід'мною матрицею $B(x) \in C^0(R^m)$, пропонуємо функцію Ляпунова V вибирати у вигляді квадратичної форми з додатним параметром $V = p\,\langle S(x)y, y\rangle + \langle S(x)\Theta(x)S(x)y, y\rangle$. При досить великих значеннях параметра $p > 0$ похідна цієї форми згідно з системою (54) буде додатно визначеною. Це означає, що згадана система є регулярною.

Зауваження 12. Якщо матриця $B(x) \in C^0(R^m)$ в системі (54) не є симетричною, а виконується тільки нерівність $\langle B(x)y, y\rangle \geq 0$, то ця система може і не бути регулярною.

На завершення розглянемо систему з двома дійсними параметрами p_1, p_2

$$\frac{dx}{dt} = p_1 - \sin 2x \ , \qquad \frac{dy}{dt} = [p_2 + \cos 2x]\, y. \tag{63}$$

Детальні дослідження цієї системи засвідчують, що вона буде регулярною при виконанні нерівностей

$$p_1^2 + p_2^2 > 1, \quad p_2 \neq 0. \tag{64}$$

Крім того, якщо для параметрів p_1, p_2 не виконуються нерівності (64), то система (63) не має жодної функції Гріна.

При значеннях параметрів p_1, p_2, які задовольняють нерівності (64), запишемо невироджену функцію Ляпунова $V = s(x)y^2$.

I. $|p_2| > 1. \quad V = y^2$.

II. $|p_1| > 1 \ , \quad p_2 \neq 0 \ . \ V = (p_1 - \sin 2x)\, y^2$.

III. $p_1^2 \leq 1$, $p_2^2 < 1$, $p_1^2 + p_2^2 > 1$. $V = (\lambda - \sin 2x)\, y^2$,

$$\begin{cases} \lambda = \sqrt{\frac{p_1^2+p_2^2}{1-p_2^2}} \ , & p_1 \in (0,1] \ , \\ \lambda = -\sqrt{\frac{p_1^2+p_2^2}{1-p_2^2}} \ , & p_1 \in [-1,0) \ . \end{cases}$$

IV. $0 < |p_1| < 1$, $p_2^2 = 1$. $V = (\lambda - \sin 2x)\, y^2$, $\begin{cases} \lambda > \frac{p_1^2+1}{2p_1} \ , & p_1 \in (0,1) \ , \\ \lambda < \frac{p_1^2+1}{2p_1} \ , & p_1 \in (-1,0) \ . \end{cases}$

3. Висновки. У статті запропоновано знаходити функції Ляпунова у вигляді квадратичних форм для деяких класів лінійних розширень динамічних систем. Досліджено властивість регулярності певних лінійних розширень динамічних систем з параметрами. Отримані результати можуть бути джерелом нових задач в теорії інваріантних многовидів динамічних систем.

1. *Митропольский Ю.А.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова / *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* – К., 1990.
2. *Mitropolsky Yu.A.* Dichotomies and Stability in Nonautonomous Linear Systems / *Mitropolsky Yu.A., Samoilenko A.M., Kulik V.L.* – London: Taylor & Francis Inc, 2003.
3. *Кулик В. Л.* Знакозмінні функції Ляпунова в теорії лінійних розширень динамічних систем на торі / *Кулик В.Л., Степаненко Н.В.* // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 46, №4. – С. 488-500.
4. *Самойленко А. М.* К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе / *Самойленко А. М.* // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, №4. – С. 513-521.
5. *Бойчук А.А.* Условие существования единственной функции Грина-Самойленко задачи об инвариантном торе / *Бойчук А.А.* // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, №4. – С. 556-559.

CONSTRUCTION OF LYAPUNOV FUNCTIONS OF SOME LINEAR EXPANSIONS OF DYNAMIC SYSTEMS

Ivan GROD[1], Viktor KULIK[2]

[1] *Ternopil state pedagogical university,*
46027 Ternopil, Vynnychenka Str., 10, Ukraine
e-mail: grod@tnpu.edu.ua,
[2] *Silesian University of Technology,*
44100 Gliwice, Kashubs'ka Str., 23, Poland
e-mail: Viktor.Kulyk@polsl.pl

We study the construction of Lyapunov functions for some linear expansions of dynamical systems.

Key words: linear expansion of the dynamic systems, Green function, regular linear expansions, quadratic form, derivative by virtue of the system, positively certain matrix.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Иван ГРОД[1], Виктор КУЛИК[2]

[1] *Тернопольский государственный педагогический университет,*
46027 Тернополь, ул. Винниченка, 10, Украина
e-mail: grod@tnpu.edu.ua,
[2] *Силезский технический университет,*
44100 Гливице, ул. Кашубская, 23, Польща,
e-mail: Viktor.Kulyk@polsl.pl

Исследован вопрос о конструировании функций Ляпунова для некоторых линейных расширений динамических систем.

Ключевые слова: линейное расширение динамической системы, функция Грина, регулярные линейные расширения, квадратичная форма, производная в силу системы, положительно определенная матрица.

Стаття надійшла до редколегії 16.04.2010

Прийнята до друку 22.12.2010