

УДК 539.3

МАКСИМАЛЬНЕ ЕКВІВАЛЕНТНЕ НАПРУЖЕННЯ В ТЕРМОПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРІ ПРИ РУСІ МЕХАНІЧНОГО ТА ТЕПЛООВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Сергій ПИР'ЄВ

*Українська Академія Друкарства,
вул. Підвальна, 17 79000 Львів, Україна*

Згідно з четвертою теорією міцності досліджено еквівалентне напруження в термопружному півпросторі. Напружений стан зумовлений впливом на еліптичну область поверхні механічного навантаження та теплового потоку, які рухаються з постійною швидкістю. Знайдені значення параметрів, для яких небезпечна точка лежить в глибині півпростору. В небезпечній точці значення еквівалентного напруження досягає максимуму.

Ключові слова: термопружність, рухоме навантаження, теплові потоки.

Механіка контактної взаємодії є одним з провідних напрямів у механіці деформівного твердого тіла. Коли аналізують, приймають допущення Герца, згідно з яким у випадку малої ділянки контакту порівняно з розмірами взаємодіючих тіл, ці тіла заміняють півпросторами, на які діють невідомі контактні параметри (контактний тиск, сили тертя, теплові потоки тощо). Після знаходження цих параметрів з розв'язку інтегральних рівнянь проводять аналіз напруженого стану півпросторів в оточенні області контакту.

Для аналізу термінів експлуатації вузлів тертя важливим є знаходження точки у півпросторі за певних навантажень, у яких найбільше значення набувають величини відповідальні за їхню міцність. Такими величинами можуть бути залежно від вибраної теорії міцності найбільше дотичне напруження, інтенсивність дотичних напружень, максимальне головне напруження та ін.

Академік О. Н. Динник, аналізуючи напружений стан в області контакту [1], довів, що найбільше дотичне напруження є не в середині області, а на глибині приблизно рівній половині радіуса кругової ділянки контакту. Це напруження більше, ніж утричі від аналогічного напруження в центрі області контакту. У випадку рівномірно розподіленого навантаження у крузі на поверхні півпростору максимальне дотичне напруження досягається у глибині півпростору під навантаженням на відстані, яка приблизно дорівнює двом третинам радіуса навантаженого кругу. Значення цього максимуму становить приблизно одну третю прикладеного тиску при $\nu = 0,3$ [2]. У центрі поверхні навантаження ця величина досягає лише значення $0,1p_0$. У випадку контакту двох тіл сферичної форми найбільше стискувальне дотичне напруження досягається на глибині, яка дорівнює

приблизно половині радіуса поверхні контакту. Цю точку у випадку матеріалу зі сталі вважають найнебезпечнішою. Максимальне дотичне напруження досягає значення при $\nu = 0,3$ приблизно $0,31p_0$ [2]. Для крихких матеріалів руйнування визначається максимальним розтягувальним напруженням. Це напруження для згаданої задачі діє на границі кругової області контакту у радіальному напрямі, маючи для $\nu = 0,3$ значення $0,133p_0$. Це напруження набагато менше за максимальне дотичне напруження. У випадку контакту тіл по еліптичній області [3] максимальне дотичне напруження лежить на деякій глибині z_1 , яка залежить від співвідношення півосей. Наприклад, $z_1 = 0,47a$ для $b/a = 1$ і $z_1 = 0,24a$ для $b/a = 0,34$. Максимальне дотичне напруження набуває, відповідно, значення $\tau_{\max} = 0,31p_0$ і $\tau_{\max} = 0,32p_0$. Розрахункове напруження в небезпечному пункті згідно з енергетичною теорією міцності відповідно до [3] становить приблизно $0,6p_0$ максимального навантаження. У [4] розглянуто просторову контактну задачу для двох пружних тіл з урахуванням тепловиділення. Отримані формули для визначення напружень на глибині (під областю контакту). На підставі цих формул вивчають розподіл найбільших розрахункових напружень по третій теорії міцності. Розглянуто приклад, коли майданчиком контакту є еліпс.

Проведений аналіз свідчить про важливість знаходження таких пунктів у півпросторі. Наша мета – знайти параметри задачі про дію рухомого навантаження по поверхні термопружного півпростору, для яких найнебезпечніша точка розташована всередині півпростору.

Математичне формулювання задачі. Розглядають тривимірну квазістатичну задачу термопружності для півпростору, по поверхні якого з постійною швидкістю V рухається в протилежний бік вісь x , розподілена в області S (еліпс з півосями a і b), механічне (нормальні і дотичні зусилля) і теплове (тепловий потік) навантаження. Вважаємо, що розподіл нормальних зусиль герцівський

$P(x, y) = p_0 p(x, y)$, $p(x, y) = \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}$, дотичні зусилля зв'язані з нормальними згідно з законом Кулона зі сталим коефіцієнтом тертя f , а інтенсивність теплового потоку дорівнює питомій потужності сил тертя $q(x, y) = fVP(x, y)$. Знайдемо значення параметрів, для яких максимум інтенсивності дотичних напружень розташований у глибині півпростору.

Для знаходження напружено-деформованого стану і температури у півпросторі в системі координат x, y, z , жорстко зв'язаній із ділянкою навантаження, розглянуто квазістаціонарну задачу лінійної термопружності

$$\mu \Delta \mathbf{U} + (\lambda + \mu) \text{grad div} \mathbf{U} = \gamma \text{grad} T + \rho_0 V^2 \partial^2 \mathbf{U} / \partial x^2, \quad -\infty > x, y > \infty, z > 0, \quad (1)$$

$$\Delta T(x, y, z) = (V/k) \partial T(x, y, z) / \partial x, \quad -\infty > x, y > \infty, z > 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}(x, y, z) \Big|_{z=0} = -p_0 p(x, y), \quad (x, y) \in S, \quad (3)$$

$$\sigma_{zx}(x, y, z)|_{z=0} = -fp_0p(x, y), (x, y) \in S, \tag{4}$$

$$\sigma_{zy}(x, y, z)|_{z=0} = 0, (x, y) \in S, \tag{5}$$

$$-K \partial T(x, y, z) / \partial z|_{z=0} = fVp_0p(x, y), (x, y) \in S, \tag{6}$$

$$U(x, y, z) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty, \tag{7}$$

де U – вектор переміщення; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{xy}$ – компоненти тензора напружень $\sigma(x, y, z)$; f – коефіцієнт тертя; p_0 – характерне значення контактного тиску; $p(x, y)$ – гладка функція; Δ – оператор Лапласа; $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, λ, μ – коефіцієнти Ляме; α – коефіцієнт лінійного теплового розширення; ρ_0 – густина; K, k – коефіцієнти тепло- і температуропровідності, відповідно, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Аналіз числових результатів. Розв'язок задачі (1)-(7) знайдений з використанням прямого та оберненого перетворення Фур'є. Інтегральні подання для компонент тензора напружень наведені у [5]. Проведено аналіз еквівалентного напруження $\sigma_{екв}$ згідно з критерієм найбільшої інтенсивності дотичних напружень τ_i (енергетичної теорії міцності, потенціальної енергії формозміни, середніх дотичних напружень)

$$\sigma_{екв} = \sqrt{3}\tau_i = \sqrt{3J_2}, \tag{8}$$

де другий інваріант тензора напружень J_2 дорівнює

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)]. \tag{9}$$

Для вивчення впливу параметрів f та Pe на величину $\sigma_{екв}$ зроблено тестові розрахунки для оксидної кераміки, представником якої є оксид алюмінію Al_2O_3 : $\mu = 84,28$ ГПа – модуль зсуву, $\nu = 0,28$ – коефіцієнт Пуассона, $E = 215,79$ ГПа – модуль Юнга, $K = 38,52$ Вт/(м К), $k = 0,965 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\alpha = 14,0 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹ – коефіцієнти тепло- і температуропровідності та лінійного теплового розширення відповідно, $a = 0,5$ мм, $b = 1$ мм, $h = b/a = 2$.

З метою аналізу впливу швидкості руху навантаження на максимальне значення еквівалентного напруження на рис. 2-4 зображено залежність безрозмірного еквівалентного напруження $\sigma_{екв}/\rho_0$ від безрозмірної

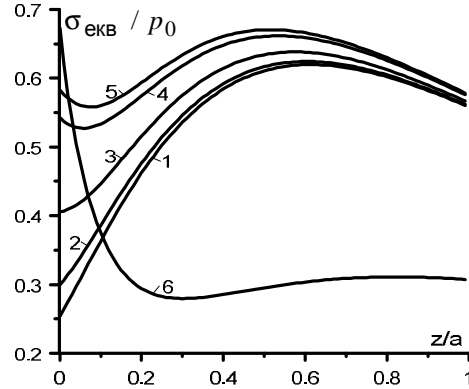


Рис. 1

глибини z/a для різних значень безрозмірного числа Pe і різних значень коефіцієнту тертя f , $y = 0$.

На рис. 1 зображено графіки розподілу безрозмірного еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ від безрозмірної глибини z/a для $Pe = 0$ і різних значень коефіцієнта тертя f , $y = 0$. Крива 1 відповідає коефіцієнту тертя $f = 0$ і $x/a = 0$; крива 2 – $f = 0,1$ і $x/a = -0,15$; крива 3 – $f = 0,2$ і $x/a = -0,3$; крива 4 – $f = 0,3$ і $x/a = -0,4$; крива 5 – $f = 0,33$ і $x/a = -0,45$; крива 6 – $f = 0,33$ і $x/a = 0,95$. Зростання коефіцієнта тертя f спричиняє зменшення відстані точки до поверхні, де еквівалентне напруження досягає максимуму. Ця точка зміщується в напрямі дії дотичних напружень. Значення еквівалентного напруження зростають. Після досягнення значення $f = 0,33$ є дві точки у півпросторі $x/a = -0,45$, $y/a = 0$, $z/a = 0,51$ і $x/a = 0,95$, $y/a = 0$, $z/a = 0$, де еквівалентне напруження набуває максимального значення $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0 = 0,67$. Зазначимо, що друга точка лежить на поверхні півпростору недалеко від границі навантаження у протилежному напрямі до дії дотичного напруження. Для коефіцієнта тертя $f > 0,33$ точка з найбільшим значенням еквівалентного напруження завжди лежить на поверхні півпростору.

На рис. 2 зображено розподіл безрозмірного еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ вздовж безрозмірної глибини z/a для малого коефіцієнта тертя $f = 0,1$ на перетині площини $y = 0$ і площин $x/a = -0,15$, $x/a = -0,3$, $x/a = -0,2$ і $x/a = 0,5$ відповідно для кривих 1-4. Крива 1 відповідає $Pe = 1$, крива 2 – $Pe = 10$, крива 3 – $Pe = 60$, крива 4 – $Pe = 70$. Зі збільшенням коефіцієнта Pe зростає й максимальне значення еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$. Для кривої 1 $\max(\sigma_{\text{екв}}/\rho_0) = 0,61$; для кривої 2 – $0,62$, для кривої 3 – $0,64$. Зазначимо, що точки, де еквівалентні напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ досягають свого максимального значення, розташовані у глибині півпростору попереду рухомого навантаження. Подальше зростання коефіцієнта Pe призводить до того, що максимальне значення еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ досягається вже на поверхні півпростору позаду центра рухомого навантаження. Для $Pe = 70$ найбільше значення еквівалентного напруження дорівнює $0,70$ і досягається на поверхні півпростору ($x/a = 0,5$, $y/a = 0$, $z/a = 0$).

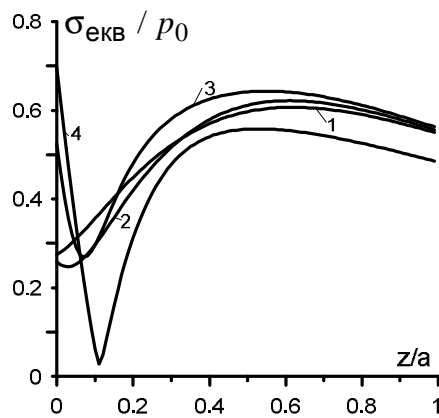


Рис. 2

На рис. 3 зображено графіки розподілу безрозмірного еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ для коефіцієнта тертя $f = 0,2$ і різних значень швидкостей. Номери кривих відповідають таким значенням параметрів: 1 - $Pe = 1$; $x/a = -0,35$; 2 - $Pe = 10$; $x/a = -0,55$; 3 - $Pe = 20$; $x/a = -0,5$; 4 - $Pe = 20$; $x/a = 0,0$. Збільшення числа Пекле Pe спричиняє зменшенню відстані точки до поверхні, де еквівалентне напруження досягає максимуму. Ця точка розташована в напрямі руху навантаження. Значення еквівалентного напруження зростають.

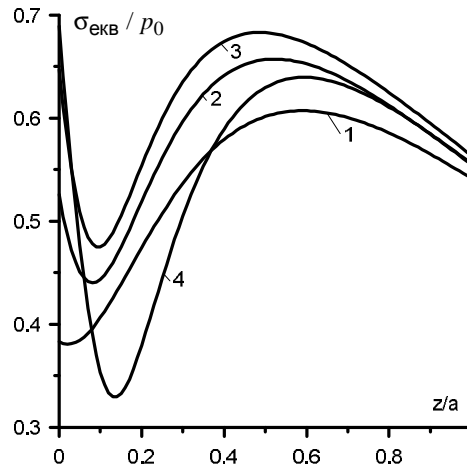


Рис. 3

По досягненню значення $Pe = 20$ є дві точки у півпросторі $x/a = -0,5$, $y/a = 0$, $z/a = 0,48$ і $x/a = 0,0$, $y/a = 0$, $z/a = 0$, де еквівалентне напруження максимальне $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0 = 0,68$. Зазначимо, що друга точка є на поверхні півпростору всередині області навантаження. Для $Pe > 20$ точка з найбільшим значенням еквівалентного напруження завжди лежить на поверхні півпростору.

На рис. 4 зображено графіки розподілу безрозмірного еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ для коефіцієнта тертя $f = 0,3$. Номери кривих відповідають таким значенням параметрів: 1 - $Pe = 1$; $x/a = -0,6$; 2 - $Pe = 4$; $x/a = -0,8$; 3 - $Pe = 4$; $x/a = -0,75$. Так як і у попередніх випадках збільшення числа Пекле Pe спричиняє зменшення відстані точки до поверхні, де еквівалентне напруження досягає максимуму. Ця точка розташована в напрямі руху навантаження.

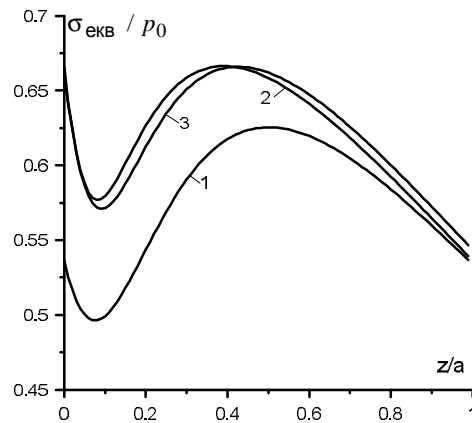


Рис. 4

Максимальне значення еквівалентного напруження зростає. По досягненню значення $Pe = 4$ є дві точки у півпросторі $x/a = -0,6$, $y/a = 0$, $z/a = 0,4$ і $x/a = -0,75$, $y/a = 0$, $z/a = 0$, де еквівалентне напруження максимальне $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0 = 0,67$. Друга точка лежить на поверхні півпростору. Для $Pe > 4$ точка з найбільшим значенням еквівалентного напруження завжди лежить на поверхні півпростору.

Так знайдено область параметрів f , Pe , для яких небезпечні пункти згідно з критерієм найбільшої інтенсивності дотичних напружень розташовані у глибині півпростору. Ці параметри відповідають точкам, які лежать під кривою на рис. 5.

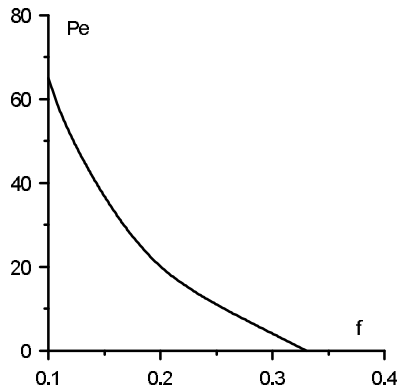


Рис. 5

Для параметрів, які відповідають точкам поза цією областю, небезпечні пункти є на поверхні півпростору. Експлуатаційні значення швидкості ковзання дають значення безрозмірного параметра Pe значно вищими від отриманих критичних значень. Наприклад, для швидкості $V = 15$ м/с, число Пекле $Pe = Va/k = 777,2$. Зазначимо, що поза визначеною областю параметрів, збільшення числа Пекле призводить до зростання величини максимального еквівалентного напруження і пересування пункту його досягнення зі сторони перед центром навантаження у сторону протилежну до руху. Наприклад, для $f = 0,4$, $Pe = 4$ значення $\max(\sigma_{\text{екв}}/\rho_0) = 0,91$ досягається в пункті $x/a = -0,75$, $y/a = 0$, $z/a = 0$, для $Pe = 10$ значення $\max(\sigma_{\text{екв}}/\rho_0) = 1,13$ досягається в пункті $x/a = -0,45$, $y/a = 0$, $z/a = 0$, для $Pe = 50$ значення $\max(\sigma_{\text{екв}}/\rho_0) = 2,71$ досягається в пункті $x/a = 0,4$, $y/a = 0$, $z/a = 0$, для $Pe = 500$ значення $\max(\sigma_{\text{екв}}/\rho_0) = 10,6$ досягається в пункті $x/a = 0,6$, $y/a = 0$, $z/a = 0$.

1. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел. – К., 1952.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М., 1975.
3. Беляев Н. М. Соппротивление материалов. – М., 1965.
4. Бородачев Н. М., Тариков Г. П. Определение наибольших расчетных напряжений под площадкой контакта с учетом тепловыделения // Изв. РАН. МТТ. – 2008. №3. – С. 76-84.

5. *Євтушенко О. О., Пир'єв С. Ю.* Напружений стан півпростору, зумовлений дією на його поверхні рухомого механічного та теплового навантаження // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – 50, №2. – С. 94-100.

**МАКСИМАЛЬНОЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ В
ТЕРМОУПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ
МЕХАНИЧЕСКОЙ И ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКИ**

Сергей ПЫРЬЕВ

*Украинская академия печати,
ул. Підголоско, 19 79020 Львов, Украина*

Согласно четвертой теории прочности исследовано эквивалентное напряжение в термоупругом полупространстве. Напряженное состояние вызвано воздействием на эллиптическую область поверхности механической нагрузки и теплового потока движущейся с постоянной скоростью. Найдено значения параметров, для которых опасная точка лежит в глубине полупространства. В опасной точке значение эквивалентного напряжения достигает максимума.

Ключевые слова: термоупругость, движущиеся нагрузки, потоки тепла.

**THE MAXIMUM EQUIVALENT STRESS IN THE THERMOELASTIC HALF
SPACE AT DRIVING OF MECHANICAL AND THERMAL LOAD**

Sergiy PYRYEV

*Ukrainian Academy of Printing,
Pidgolosko Str., 19 79020 Lviv, Ukraine*

According to the fourth theory of strength equivalent pressure in the thermoelastic half space is examined. The state of stress is called by effect on elliptical area of a surface of mechanical load and a heat flow moving with fixed speed. Values of parameters for which the dangerous point lies in the heart of half space are discovered. In a dangerous point value of equivalent pressure reaches a maximum.

Key words: thermoelasticity, moving load, heat flow.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.2010
Прийнята до друку 22.12.2010