ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2010. Вип. 73. С.205-213 *Ser. Mech-Mat. 2010. Vol. 73. P.205-213*

УДК 517.9

ДО ПИТАННЯ ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ У ПРОСТОРІ $\mathbb{R}^n$

Мирослава ПРОХОРЕНКО

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12 79013 Львів, Україна

Досліджено питання існування періодичних розв'язків для системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією в n-вимірному просторі у нефіксовані моменти часу.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, імпульсна дія, періодичний розв'язок.

Під час моделювання механічних, радіотехнічних, фізичних, біологічних та інших процесів виникає потреба у вивченні диференціальних рівнянь з імпульсною дією [1]. Питанню існування періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані та нефіксовані моменти часу присвячено багато праць, наприклад, [1-4].

Наша праця є продовженням досліджень [4] та розглядає систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією в n-вимірному просторі в моменти часу, що визначаються самим розв'язком системи, досліджуються умови існування простих періодичних (тобто таких, що мають один імпульс на періоді) розв'язків такої системи, побудовано прості періодичні розв'язки.

1. **Формулювання задачі**. Розглянемо динамічну систему з імпульсною дією, визначену в просторі $\mathbb{R}^n$ системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t), t \in [t_0, +\infty), \tag{1}$$

з початковою умовою

$$y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

та умовою імпульсної дії

$$y(t+0) - y(t-0) = g, \text{ коли } y(t-0) \in D_0, \tag{3}$$

де A - матриця зі сталими коефіцієнтами розміру $n \times n$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$; $D_0 = \{y \in \mathbb{R}^n : \phi(y) = c_1\}$ - задана гіперплощина; $\phi(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_ny_n$ - лінійний функціонал; $c_1, b_1, b_2, \ldots, b_n$ - сталі; $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ - заданий вектор.

Процес відбувається так: точка $(t, y(t))$, вийшовши з початкового положення (t_0, y_0), з перебігом часу t виконує рух по кривій

$\{(t;y(t))\in \mathbb{R}^{n+1}: y(t)=\eta(t,y_0,t_0), t\geq t_0\}$, де $y(t)=\eta(t,y_0,t_0)$ - розв'язок системи рівнянь (1). Рух по кривій відбувається до моменту часу $t = t_1 > t_0$, коли точка $(t,y(t))$ потрапляє на гіперплощину D_0. В момент $t = t_1$ відбувається "миттєва" зміна положення точки $(t,y(t))$ за законом (3), тобто відбувається перекидання з точки $(t_1,y(t_1))$ в точку (t_1,y_1), де $y_1 = y(t_1)+g$. Внаслідок цього точка $(t,y(t))$ продовжує рухатися по кривій $\{(t,y(t))\in \mathbb{R}^{n+1}: y(t)=\eta(t,y_1,t_1), t\geq t_1\}$, що є розв'язком диференціального рівняння (1) з початковою умовою $y(t_1)=y_1$, до наступного моменту часу t_2 $(t_2>t_1)$, коли $(t,y(t))$ знову потрапить на D_0. У цей момент точка $(t,y(t))$ виконає моментальне перекидання з положення $(t_2,y(t_2))$ в положення $(t_2,y_2)=(t_2,y(t_2)+g)$, після чого рухатиметься кривою $\{(t,y(t))\in \mathbb{R}^{n+1}: y(t)=\eta(t,y_2,t_2), t\geq t_2\}$, де $y(t)=\eta(t,y_2,t_2)$ – розв'язок диференціального рівняння (1), що задовольняє умову $y(t_2)=y_2$, до нового натрапляння з D_0 і т.д.

Розв'язком задачі (1)-(3) назвемо функцію $y(t)$, яка неперервно диференційовна на кожному інтервалі (t_k,t_{k+1}), де $k=0,1,\ldots$, t_k – моменти імпульсної дії, тобто $y(t_k)\in D_0, k\in \mathbb{N}$. У точках t_k функція $y(t)$ неперервна зліва і має розриви першого роду.

Розв'язок задачі (1)-(3) існує, єдиний і визначений для всіх $t\in[t_0,+\infty)$, оскільки для кожного $t\in[t_k,t_{k+1}), k=0,1,\ldots$ розв'язуємо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з відповідною початковою умовою:

- (2), якщо $k = 0$ і $y(t_0)\notin D_0$;
- $y(t_0+0)=y(t_0)+g$, якщо $k = 0$ і $y(t_0)\in D_0$;
- $y(t_k+0)=y(t_k-0)+g$, якщо $k=1,2,\ldots$ і $y(t_k-0)\in D_0$.

Розв'язки задачі (1)-(3) можна поділити на два типи:

1) такі, що не зазнають імпульсної дії – інтегральна крива системи (1)-(3) не перетинає гіперплощину D_0;

2) такі, що зазнають імпульсної дії – інтегральна крива системи (1)-(3) перетинає гіперплощину D_0. Поведінка розв'язків задачі (1)-(3) у цьому випадку вивчена лише для частинних випадків.

Позначимо

$$D_+=\{(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in \mathbb{R}^n: b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_ny_n>c_1\},$$
$$D_-=\{(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in \mathbb{R}^n: b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_ny_n<c_1\},$$

$$\boldsymbol{D_g} = \{(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{y_n} + \boldsymbol{g_n}) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y_n}) \in \boldsymbol{D}_0,$$
$$\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{g}_1) + \boldsymbol{b}_2(\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{g}_2) + \ldots + \boldsymbol{b_n}(\boldsymbol{y_n} + \boldsymbol{g_n}) = \boldsymbol{c}_2.\}$$

Нехай $\sigma(\boldsymbol{A})$ спектр матриці $\boldsymbol{A}$. Інтегральна крива системи (1)-(3) перетинає гіперплощина $\boldsymbol{D}_0$, якщо:

(A_1): $\max\{\mathrm{Re}\lambda \,|\, \lambda \in \sigma(\boldsymbol{A})\} < 0$, або $\{\lambda_{\boldsymbol{k}} \in \sigma(\boldsymbol{A}) \,|\, \lambda_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{i}\omega, \boldsymbol{k} = \overline{1,\boldsymbol{n}}, \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$ та $\boldsymbol{y}_0 \in \boldsymbol{D}_+ \cup \boldsymbol{D}_0$;

(B_1): $\min\{\mathrm{Re}\lambda \,|\, \lambda \in \sigma(\boldsymbol{A})\} > 0$, або $\{\lambda_{\boldsymbol{k}} \in \sigma(\boldsymbol{A}) \,|\, \lambda_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{i}\omega, \boldsymbol{k} = \overline{1,\boldsymbol{n}}, \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$ та $\boldsymbol{y}_0 \in \boldsymbol{D}_- \cup \boldsymbol{D}_0$.

Щоб виконати імпульсні дії більше одного разу для випадку (A_1), треба щоб гіперплощина $\boldsymbol{D_g}$ перебувала в $\boldsymbol{D}_+$, що еквівалентно співвідношенням

$$(\mathrm{A}_{1,1}): \qquad \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{g}_2 + \ldots + \boldsymbol{b}_n\boldsymbol{g_n} + \boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2 > \boldsymbol{c}_1 > 0,$$

для випадку (B_1) необхідно, щоб гіперплощина $\boldsymbol{D_g}$ перебувала в $\boldsymbol{D}_-$, що еківвалентно співвідношенням

$$(\mathrm{B}_{1,1}): \qquad \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{g}_2 + \ldots + \boldsymbol{b}_n\boldsymbol{g_n} + \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1 > \boldsymbol{c}_2 > 0,$$

де $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots \boldsymbol{b_n}) -$ вектор зовнішньої нормалі $\boldsymbol{D}_-$, початок координат належить до $\boldsymbol{D}_-$.

Розглянемо випадок (A_1) з умовою $(\mathrm{A}_{1,1})$, випадок (B_1) з умовою $(\mathrm{B}_{1,1})$ розглядають аналогічно.

2. Існування простих періодичних розв'язків.

Означення. Періодичний розв'язок задачі (1)-(3) назвемо простим, якщо відстань між його сусідніми моментами імпульсів постійна і дорівнює періоду цього розв'язку.

Нехай матриця $\boldsymbol{A}$ має дійсні власні значення.

Зафіксуємо гіперплощину $\boldsymbol{D}_0$ і вектор $\boldsymbol{g}$, та визначимо умови існування простого періодичного розв'язку задачі (1)-(3) (тобто, існування $\boldsymbol{y}_0 \in \boldsymbol{D}_0$, при якому розв'язок задачі (1)-(3) буде простим періодичним), знайдемо вигляд простого періодичного розв'язку.

Координати y_0, при такому формулюванні задачі, будуть координатами нерухомих точок оператора

$$\boldsymbol{F} : \boldsymbol{D}_0 \to \boldsymbol{D}_0, \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{TA}}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}),$$

які визначаються системою

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{TA}}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}), \qquad (4)$$

де $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{D}_0$, $\boldsymbol{T}$ $-$ період розв'язку; $\boldsymbol{T} > 0$; $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{TA}}$ $-$ експонента оператора $\boldsymbol{TA}$.

Тобто, існування простих періодичних розв'язків задачі (1)-(3) зводиться до існування нерухомих точок оператора F.

Зведемо матрицю A до жорданової форми $J = B^{-1}AB$, (B - матриця переходу від базису $x_1, x_2, \dots, x_n$ до базису $y_1, y_2, \dots, y_n$) та розглянемо спочатку задачу

$$\frac{dx}{dt} = Jx(t), \qquad t \in [t_0, +\infty), \tag{5}$$

з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0 \tag{6}$$

та умовою імпульсної дії

$$x(t+0) - x(t-0) = h, \qquad x(t-0) \in S_0, \tag{7}$$

де

$$x_0 = B^{-1}y_0,\ h = B^{-1}g,\ x_0 \in S_+ \cup S_0,\ S_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c_1\right\},$$

$$S_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n > c_1\right\},\ S_- = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n < c_1\right\},$$

$\tilde{n} = B^{-1}n$, $\tilde{n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – вектор зовнішньої нормалі S_-; $n = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – вектор зовнішньої нормалі D_-; умова $(\mathrm{A}_{1,1})$ набуває вигляду

$$a_1h_1 + a_2h_2 + \dots + a_nh_n = c_2 - c_1,\ \ c_2 > c_1 > 0,$$

де $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$

Дослідимо спочатку питання існування простих періодичних розв'язків задачі (5)-(7), яке зводиться до існування нерухомих точок оператора

$$\Phi : S_0 \to S_0, \quad \Phi(x) = e^{TJ}(x + h),$$

що визначаються системою

$$x = e^{TJ}(x + h),\ x \in S_0. \tag{8}$$

Лема 1. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – дійсні власні значення матриці J. Тоді для заданих S_0 та h існує єдиний простий періодичний розв'язок задачі (5)-(7) за виконання однієї з умов:

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda < 0$ з геометричною кратністю n;

2) $\max\limits_k \lambda_k < 0$, $\lambda_k \neq \lambda_j (k \neq j)$ та $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{a_jh_j}{\lambda_j} < 0.$

Доведення. 1. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda < 0$ з геометричною кратністю n, тобто розмірність власного простору, що відповідає власному значенню λ, дорівнює n. Тоді система (8) набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1 = (x_1 + h_1)e^{\lambda T}, \\ x_2 = (x_2 + h_2)e^{\lambda T}, \\ \qquad \mathbf{L} \\ x_n = (x_n + h_n)e^{\lambda T}, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = c_1 \end{cases}$$

та має єдиний розв'язок

$$x_1 = \frac{c_1 h_1}{c_2 - c_1}, x_2 = \frac{c_1 h_2}{c_2 - c_1}, \ldots, x_n = \frac{c_1 h_n}{c_2 - c_1}, \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{c_1}{c_2}.$$

Тобто, при заданих S_0 та h однозначно визначаються координати нерухомої точки оператора Ф. Отже, існує єдиний простий періодичний розв'язок $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$ задачі (5)-(7), який на своєму періоді T набуває вигляду

$$X_1(t) = \frac{c_2 h_1}{c_2 - c_1} e^{\lambda t}, \quad X_2(t) = \frac{c_2 h_2}{c_2 - c_1} e^{\lambda t}, \ldots, X_n(t) = \frac{c_2 h_n}{c_2 - c_1} e^{\lambda t} \quad (0 \le t < T),$$

де $T = \dfrac{1}{\lambda} \ln \dfrac{c_1}{c_2}$.

2. Всі власні значення матриці J дійсні, від'ємні і попарно різні. У цьому випадку систему (8) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = (x_1 + h_1)e^{\lambda_1 T}, \\ x_2 = (x_2 + h_2)e^{\lambda_2 T}, \\ \mathbf{L} \\ x_n = (x_n + h_n)e^{\lambda_n T}, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = c_1, \end{cases}$$

розв'язком якої є координати нерухомої точки оператора Ф

$$x_1 = \frac{h_1 e^{\lambda_1 T}}{1 - e^{\lambda_1 T}}, x_2 = \frac{h_1 e^{\lambda_2 T}}{1 - e^{\lambda_2 T}}, \ldots, x_n = \frac{h_n e^{\lambda_n T}}{1 - e^{\lambda_n T}},$$

а період T знаходимо з рівняння

$$\frac{a_1 h_1}{1 - e^{\lambda_1 T}} + \frac{a_2 h_2}{1 - e^{\lambda_2 T}} + \ldots + \frac{a_n h_n}{1 - e^{\lambda_n T}} = c_2. \tag{9}$$

Нехай $\lambda_1 = \min\limits_{k=\overline{1,n}} \{\lambda_k\}$. Помножимо співвідношення (9) на $\left(1 - e^{\lambda_1 T}\right)$ та розглянемо функцію

$$f(T) = a_1h_1 + a_2h_2\frac{1-e^{\lambda_1 T}}{1-e^{\lambda_2 T}} + a_3h_3\frac{1-e^{\lambda_1 T}}{1-e^{\lambda_3 T}} + \ldots + a_nh_n\frac{1-e^{\lambda_1 T}}{1-e^{\lambda_n T}} - c_2\left(1-e^{\lambda_1 T}\right),$$

$T \in (0,+\infty)$. Оскільки існування нулів функції f еквівалентне існуванню розв'язку рівняння (9), то правильна гранична поведінка $\lim\limits_{T\to+\infty} f(T) = -c_1 < 0$,

$\lim\limits_{T\to+0} f(T) = a_1h_1 + a_2h_2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + a_3h_3\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \ldots + a_nh_n\frac{\lambda_1}{\lambda_n} > 0$ за умовою теореми. Крім того,

$$f'(T) = \lambda_1 c_2 e^{\lambda_1 T} + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\lambda_j e^{\lambda_j T}\left(1-e^{\lambda_1 T}\right)}{\left(1-e^{\lambda_j T}\right)^2} - \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 T}}{1-e^{\lambda_j T}}\right) < \lambda_1 c_2 e^{\lambda_1 T} +$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\left(\lambda_j - \lambda_1\right)e^{\lambda_j T}\frac{1-e^{\lambda_1 T}}{\left(1-e^{\lambda_j T}\right)^2} < 0$$

для всіх $0 < T < +\infty$. Тобто, функція f є неперервною та спадною функцією, яка на кінцях інтервалу $(0,+\infty)$ набуває значення різних знаків, а отже, має єдиний нуль, що і треба було довести.

Простий періодичний розв'язок $X(t) = \left(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\right)$ задачі (5)-(7) для цього випадку набуває вигляду

$$X_1(t) = \frac{h_1 e^{\lambda_1 t}}{1-e^{\lambda_1 T}}, X_2(t) = \frac{h_2 e^{\lambda_2 t}}{1-e^{\lambda_2 T}}, \ldots, X_n(t) = \frac{h_n e^{\lambda_n t}}{1-e^{\lambda_n T}} \ (0 \le t < T),$$

де T визначаємо з рівняння (9).

Лема 2. Нехай матриця J є жордановою кліткою n-го порядку та дійсним власним значенням $\lambda < 0$. Тоді для заданих S_0 і h існує простий періодичний розв'язок задачі (5)-(7) за виконання умови

$$\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m}{\lambda^m}\sum_{j=1}^{n-m} a_j h_{j+m} > 0.$$

Доведення. Система (8) набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1 = e^{\lambda T}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{T^{j-1}}{(j-1)!}\left(x_j + h_j\right), \\ x_2 = e^{\lambda T}\sum\limits_{j=2}^{n}\dfrac{T^{j-2}}{(j-2)!}\left(x_j + h_j\right), \\ \ldots \\ x_n = e^{\lambda T}\left(x_n + h_n\right), \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c_1, \end{cases} \tag{10}$$

з якої одержуємо координати нерухомої точки

$$x_j = \sum_{k=0}^{n-j} \frac{T^k P_k\left(e^{\lambda T}\right)}{k!\left(1-e^{\lambda T}\right)^{k+1}} h_{k+j} \qquad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Тут $P_k\left(e^{\lambda T}\right)$ – поліном степеня k $\left(k = \overline{1,n}\right), P_0\left(e^{\lambda T}\right) = e^{\lambda T}$, причому границя $\lim\limits_{T\to+0} P_k\left(e^{\lambda T}\right) = k!$ (коефіцієнти поліномів $P_k\left(e^{\lambda T}\right)$ одержуємо безпосередньо з системи (10), зокрема $P_1\left(e^{\lambda T}\right) = e^{\lambda T}$, $P_2\left(e^{\lambda T}\right) = e^{\lambda T} + e^{2\lambda T}$, $P_3\left(e^{\lambda T}\right) = e^{\lambda T} + 4e^{2\lambda T} + e^{3\lambda T}$, $P_4\left(e^{\lambda T}\right) = e^{\lambda T} + 11e^{2\lambda T} + 11e^{3\lambda T} + e^{4\lambda T}$, $P_5\left(e^{\lambda T}\right) = e^{\lambda T} + 26e^{2\lambda T} + 66e^{3\lambda T} + 26e^{4\lambda T} + e^{5\lambda T}$, $P_6\left(e^{\lambda T}\right) = e^{\lambda T} + 57e^{2\lambda T} + 347e^{3\lambda T} + 257e^{4\lambda T} + 57e^{5\lambda T} + e^{6\lambda T}, \ldots$), а рівняння для знаходження періоду T нерухомої точки набуває вигляду

$$c_2 e^{\lambda T} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T^k P_k\left(e^{\lambda T}\right)}{k!\left(1-e^{\lambda T}\right)^{k}} \sum_{j=k+1}^{n} a_{j-k} h_j = c_1. \tag{11}$$

Розглянемо визначену для $T \in (0,\infty)$ функцію

$$f(T) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T^k P_k\left(e^{\lambda T}\right)}{k!\left(1-e^{\lambda T}\right)^{k}} \sum_{j=k+1}^{n} a_{j-k} h_j + c_2 e^{\lambda T} - c_1.$$

Правильні границі $\lim\limits_{T\to+\infty} f(T) = -c_1 < 0$,

$$\lim_{T\to+0} f(T) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\lambda^k} \sum_{j=1}^{n-k} a_j h_{j+k} + c_2 - c_1 = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{\lambda^m} \sum_{j=1}^{n-m} a_j h_{j+m} > 0,$$

оскільки за умовою теореми $c_2 - c_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j h_j$. Отже, функція f на проміжку $(0,+\infty)$ за теоремою Больцано-Коші [5, с. 168] має, принаймні, один нуль, тобто рівняння (11) має розв'язок.

Простий періодичний розв'язок задачі (5)-(7) у цьому випадку має вигляд

$$X(t) = \left(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\right),$$

де

$$X_j(t) = \frac{h_j e^{\lambda t}}{1-e^{\lambda T}} + e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{n-j} \frac{T^k P_k\left(e^{\lambda T}\right)}{k!\left(1-e^{\lambda T}\right)^{k+1}} h_{k+j},\ j = \overline{1,n},$$

період $\boldsymbol{T}$ визначаємо з рівняння (11), $\boldsymbol{P}_k\left(\boldsymbol{e}^{\lambda T}\right)$ – поліном степеня $\boldsymbol{k}$ $\left(\boldsymbol{P}_0\left(\boldsymbol{e}^{\lambda T}\right)=\boldsymbol{e}^{\lambda T}, \boldsymbol{k}=\overline{1,\boldsymbol{n}}\right)$ (коефіцієнти поліномів $\boldsymbol{P}_k\left(\boldsymbol{e}^{\lambda T}\right)$ одержуємо безпосередньо з системи (10).

На підставі лем 1, 2 сформулюємо умови існування простого періодичного розв'язку задачі (1)-(3) у такій теоремі.

Теорема. Нехай власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матриці $\boldsymbol{A}$ - дійсні числа, виконуються (A_1), $(\mathrm{A}_{1,1})$ та одна з умов:

1) $\lambda_k \neq \lambda_j (\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{N})$ та $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\boldsymbol{a}_j \boldsymbol{h}_j}{\lambda_j} < 0$;

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$ з геометричною кратністю $\boldsymbol{n}$;

3) $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$ з геометричною кратністю 1 та

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{\lambda^m} \sum_{j=1}^{n-m} \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{h}_{j+m} > 0,$$

де $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{g}$; $\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{B}^{-1}$ – матриця переходу від базису $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ до базису $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$; $\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_n)$; $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n)$; $\tilde{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$; $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ - вектор зовнішньої нормалі $\boldsymbol{D}_-$.

Тоді для заданих гіперплощини $\boldsymbol{D}_0$ та вектора $\boldsymbol{g}$ існує простий періодичний розв'язок задачі (1)-(3).

Доведення. Перетворимо систему (8) до (4) при заміні $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{y}$, тобто

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}^{TJ}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}), \\
\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^{B^{-1}TAB}\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{g}\right), \\
\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}^{B^{-1}TAB}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}), \\
\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^{TA}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}).
\end{gathered}$$

Тобто, нерухомі точки $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*$ відповідно операторів $\Phi, \boldsymbol{F}$ зв'язані співвідношенням $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{y}^*$. Тому умови існування простого періодичного розв'язку задачі (5)-(7) при переході від базису $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ до $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ є умовами існування простого періодичного розв'язку задачі (1)-(3).

---

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К., 1987.

2. *Самойленко В.Г., Елгондыев К.К.* Исследование линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в $\boldsymbol{R}^2$. – К., 1989. (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 89.59)

3. *Елгондыев К.К.* О периодических решениях систем с импульсным воздействием // Узб. мат. журн. – 1999. – № 4. – С. 62–67.

4. *Вус А.Я., Прохоренко М.В.* До питання існування та єдиності періодичних розв'язків системи двох диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Математичні студії. Львів. – 2009. – Т. 32, № 1. – С. 64–72.

5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М., 1970. – Т.1.

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ДЕЙСТВИЕМ В $\mathbb{R}^n$ ПРОСТРАНСТВЕ

Мирослава ПРОХОРЕНКО

Национальный университет "Львовская политехника",
ул. С. Бандеры, 12 79013 Львов, Украина

Исследован вопрос существования периодических решений для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в n-мерном пространстве в нефиксированные моменты времени.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, импульсная действие, периодическое решение.

TO A QUESTION OF PERIODIC SOLUTIONS FOR SYSTEM OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE INFLUENCE IN SPACE $\mathbb{R}^n$

Myroslava PROKHORENKO

Lviv Polytechnik National University,
Bandery str, 12 79013 Lviv, Ukraina

The question of existence of periodic solutions for system of the ordinary differential equations with impulse influence in n-dimensional space during the unstable moments of time is investigated.

Key words: the ordinary differential equations, pulse influence, the periodic decision.

Стаття надійшла до редколегії 10.05.2010
Прийнята до друку 22.12.2010