ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 157–167
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 157–167

УДК 519.21

ПРО ТВІРНИЙ ФУНКЦІОНАЛ ЧАСТКОВОГО ВИПАДКУ S-ЗУПИНЕНИХ ГІЛЛЯСТИХ ПРОЦЕСІВ

Остап ОХРІН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ostap.okhrin@wiwi.hu-berlin.de

Початковий процес з незліченною кількістю типів $\mu(t)$ породжує зупинений гіллястий процес $\xi(t)$, якщо при попаданні $\mu(t)$ в деяку непорожню множину S процес зупиняється. Розглядається твірний функціонал наведеного вище процесу.

Ключові слова: гіллясті процеси, твірний функціонал, перехідні ймовірності.

Розглядаємо S-зупинений гіллястий процес з довільною кількістю типів частинок. Процеси з довільною кількістю типів частинок ще називають загальними гіллястими процесами. Використано результати подані в [3], [4], [6]. Розглянемо фазовий простір типів частинок $(X, \mathcal{A})$ з $\mathcal{A}$ – σ-алгеброю Борелівських множин на X, яка містить всі одноточкові множини. Через Ω позначимо множину всіх не негативних мір α на $\mathcal{X}$, які сконцентровані на скінченних підмножинах з $\mathcal{A}$ і набувають інтегральних значень. Кожний елемент $\alpha \in \Omega$ можна охарактеризувати як подвійний вектор $(x_1, n_1; \ldots; x_k, n_k)$, де $\{x_1, \ldots, x_k\}$ – та скінченна підмножина $\mathcal{A}$, на якій α є сконцентрованим. Це припущення означає, що в окремо вибраний момент часу, тільки скінченна кількість типів частинок наявна. Зрозуміло, що n_i є невід'ємним цілим, і відповідає за кількість частинок конкретного типу. Позначимо через $\mathcal{Y}$ σ-алгебру Колмогорова на Ω, яка є найменшою σ-алгеброю, що містить всі циліндричні множини $\{\alpha \in \Omega : \alpha(\{x\}) = n\}$. На цьому просторі розглядають необривний марковський процес з перехідною ймовірністю $P(t_1, x, t_2, A)$, де $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ – час, $x \in X$, $A \in \mathcal{Y}$. Розглядаючи кожну траєкторію цього процесу як еволюцію блукання частинки, $P(t_1, x, t_2, A)$ інтерпретують, як ймовірність того, що частинка, яка почала блукання з однієї точки типу $x \in X$, за час t потрапляє в множину $A \in \mathcal{Y}$. Кожна з частинок типу x має випадковий час життя τ. В кінці свого життя кожна частинка типу x миттєво породжує деяку випадкову кількість нових частинок, початкові положення, яких розподілені випадково на просторі Ω. Кількість і положення частинок-нащадків залежать тільки від положення частинки-предка в момент перетворення. Далі кожна нова частинка еволюціонує незалежно від інших аналогічно. Подібного типу процеси розглядали у [1], [2] та [5].

Нехай $\mu_{xt_0t}(A)$ така випадкова міра, яка для кожного $A \in \mathcal{Y}$ дорівнює кількості частинок в момент часу t, що потрапляють в множину A, за умови, що в початковий момент часу t_0 була тільки одна частинка в точці $x \in X$. Через $\mu_{t_0t}(A)$ визначимо випадкову міру, яка дорівнює кількості частинок у момент часу t, типи яких є з множини A, незважаючи на те, скільки і яких частинок було в початковий момент часу t_0.

Надалі вважатимемо, що простір X складається з незліченної кількості елементів $X = \mathbb{R}^+$, тобто припускаємо, що множина типів частинок є незліченною або, що кожному типу ставимо у відповідність невід'ємне дійсне число, і навпаки. Це є частковим випадком загальних гіллястих процесів.

Зауважимо, що кількість всіх частинок у початковий момент повинна бути скінченною, звідки випливає, що лише скінченній кількості типів відповідає ненульова кількість частинок. Хоча сумарна кількість може бути як завгодно великою.

На основі міри $\mu_{xt_0t}(A)$ вводиться багатовимірна міра $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t_0t}(A)$

$$\boldsymbol{\mu}_{\alpha(\mathbf{x})t_0t}(A) = \int\limits_{\phi(\mathbf{x})} \mu_{xt_0t}(A)\, dx,$$

де $\alpha \in \Omega$, $\mathbf{x} \subset X$ є множиною типів частинок, що є аргументом функції α. Іншими словами, якщо в початковий момент t_0 ми мали набір частинок $\alpha(x) = (\alpha_{x_1}, \ldots, \alpha_{x_k})'$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$ типи яких перебували в множині $\mathbf{x}$, то за час t отримали набір точок, які належать множині A. Вище введена міра повертає кількість нащадків для кожного типу з множини $\mathbf{x}$.

Маючи перехідні ймовірності $P(t_1, x, t_2, A)$, введемо ймовірність $\widehat{P}(t_1, \alpha_1, t_2, \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega$, де $\widehat{P}$ – ймовірність така: якщо в момент часу t_1 є набір α_1, то до часу t_2 отримується множина α_2. Для простоти позначень зазначимо $\mu_{\cdot}(t_0, t) = \mu_{\cdot t_0 t}(X)$. Очевидно, що

$$\widehat{P}(t_1, \alpha_1, t_2, \alpha_2) = P\{\boldsymbol{\mu}_{\alpha_1}(t_1, t_2) = \alpha_2\}.$$

Зафіксуємо скінченну підмножину $S \in \Omega$, $0 \notin S$, як узагальнення вона може мати міру Лебега нуль. *Зупиненим*, або *S-зупиненим* гіллястим процесом називається процес $\boldsymbol{\xi}_{\alpha t}(X)$, визначений для $t \in \mathbb{R}^+$ та $\alpha \in \Omega$ рівностями

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}}(t_0, t) = \boldsymbol{\xi}_{\alpha t_0 t}(X) = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t_0, t), & \text{якщо } \forall\, v,\ 0 \leqslant v < t,\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t_0, v) \notin S; \\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t_0, u), & \text{якщо } \forall\, v,\ 0 \leqslant v < u,\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t_0, v) \notin S, \\ & \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t_0, u) \in S,\ u < t. \end{cases}$$

Отож, для S-зупиненого гіллястого процесу $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}}(t)$, точки множини S є додатковими станами поглинання порівняно з початковим процесом $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t)$, який мав тільки одну точку поглинання $\{0\}$. Тому на відміну від процесу $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t)$, в S-зупиненому гіллястому процесі $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}}(t)$ окремі частинки в t-му поколінні незалежно розмножуються за ймовірнісним законом, який визначається через $P(\cdot)$, тільки в тому випадку, коли $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}}(t) \notin S$. Як тільки випадковий вектор $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}}(t)$ потрапить у множину S, еволюція процесу припиняється.

Визначимо множину всіх обмежених $\mathcal{A}$-вимірних функцій на X як $\mathcal{F}$, множини додатних та від'ємних функцій з $\mathcal{F}$ означимо $\mathcal{F}^+$ та $\mathcal{F}^-$ відповідно. Для всіх $f \in \mathcal{F}$,

$\alpha \in \Omega$ ми писатимемо, що $[f,\alpha] = \int_X f(x)\alpha(dx)$. Оператором зсуву W_α на Ω ми визначимо таке $W_\alpha A = \{\alpha' : \alpha' - \alpha \in A\}$ для $A \subset \mathcal{Y}$.

Позначимо окремо перехідні ймовірності для S-зупиненого процесу через $\widehat{P}_S(t_1,\alpha,t_2,A)$, а для звичайного процесу через $\widehat{P}(t_1,\alpha,t_2,A)$. В обох випадках перехідні ймовірності $\widehat{P}_S(t_1,\alpha,t_2,A)$ та $\widehat{P}(t_1,\alpha,t_2,A)$ визначені для всіх $t_1 \leqslant t_2$, $\alpha \in \Omega$ та $A \subset \mathcal{Y}$ визначають гіллясті процеси з неперервним часом, якщо вони задовольняють певні властивості. Обидві перехідні ймовірністі $\widehat{P}(t_1,\alpha,t_2,A)$ та $\widehat{P}_S(t_1,\alpha,t_2,A)$ є $\mathcal{Y}$-вимірними функціями, як функції по α, а також невід'ємними мірами на $\mathcal{Y}$, як функції по A. Очевидно, з якого б набору не почався процес, ми завжди потрапимо у весь простір подій Ω, тому $\widehat{P}(t_1,\alpha,t_2,\Omega) = \widehat{P}_S(t_1,\alpha,t_2,\Omega) = 1$. Згідно з такими самими міркуваннями за нульовий проміжок часу потрапити в якусь множину процес може тільки тоді, коли він у ній є на початку цього проміжку, тому $\widehat{P}(t_1,\alpha,t_1,A) = \widehat{P}_S(t_1,\alpha,t_1,A) = \mathbf{I}\{\alpha \in A\}$. Зрозуміло, що повинно виконуватися і звичайне рівняння Колмогорова-Чепмена для звичайного процесу

$$\widehat{P}(t_1,\alpha,t_3,A) = \int\limits_\Omega \widehat{P}(t_2,\alpha',t_3,A)\widehat{P}(t_1,\alpha,t_2,d\alpha'),\ \forall\, t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3, \tag{1}$$

та певна модифікація для S-зупиненого

$$\widehat{P}_S(t_1,\alpha,t_3,A) = \int\limits_{\Omega\setminus(S\setminus A)} \widehat{P}(t_2,\alpha',t_3,A)\widehat{P}(t_1,\alpha,t_2,d\alpha'),\ \forall\, t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3. \tag{2}$$

Оскільки всі частинки в процесі еволюціонують незалежно одна від одної, то можна також записати такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(t_1,\alpha_1+\alpha_2,t_2,A) &= \int\limits_\Omega\int\limits_\Omega \mathbf{I}\{\alpha_1'+\alpha_2' \in A\}\widehat{P}(t_1,\alpha_1,t_2,d\alpha_1') \times \\
&\times\ \widehat{P}(t_1,\alpha_2,t_2,d\alpha_2'), \qquad (3)\\
\widehat{P}_S(t_1,\alpha_1+\alpha_2,t_2,A) &= \int\limits_{\Omega\setminus(S\setminus A)}\int\limits_{\Omega\setminus(S\setminus A)} \mathbf{I}\{\alpha_1'+\alpha_2' \in A\}\widehat{P}(t_1,\alpha_1,t_2,d\alpha_1') \times \\
&\times\ \widehat{P}(t_1,\alpha_2,t_2,d\alpha_2'). \qquad (4)
\end{aligned}$$

З огляду на те, що у нас є процес з неперервним часом, логічним є припущення, що при $\triangle \to 0$ обидва процеси рівні $\widehat{P}(t,\alpha,t+\triangle,A) = \widehat{P}_S(t,\alpha,t+\triangle,A)$ і

$$\widehat{P}(t,\alpha,t+\triangle,A) = \begin{cases} 1 + p(t,\alpha,A)t + o(t), & \text{при } p(t,\alpha,A) < 0,\ \alpha \in A; \\ p(t,\alpha,A)t + o(t), & \text{при } p(t,\alpha,A) \geqslant 0,\ \alpha \notin A. \end{cases} \tag{5}$$

Тому наведене вище припущення можна переформулювати так:

$$\widehat{P}(t_1,\alpha,t_2,A) = p(t_1,\alpha,A)(t_2-t_1) + o(t_2-t_1), \quad t_2 \to t_1^-,\ \alpha \notin A,$$

$$\frac{\widehat{P}(t_1,\alpha,t_2,A) - \widehat{P}(t_1,\alpha,t_1,A)}{t_2-t_1} = p(t_1,\alpha,A) + o(1),$$

$$\lim_{t_2\to t_1^+} \frac{\widehat{P}(t_1,\alpha,t_2,A) - \widehat{P}(t_1,\alpha,t_1,A)}{t_2-t_1} = p(t_1,\alpha,A).$$

Аналогічно можна довести і для правої границі

$$\lim_{t_2 \to t_1^-} \frac{\widehat{P}(t_2, \alpha, t_1, A) - \widehat{P}(t_1, \alpha, t_1, A)}{t_2 - t_1} = p(t_1, \alpha, A).$$

Це рівносильно тому, що

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{P}(t, \alpha, t, A) = p(t, \alpha, A),$$

функцію $p(t, \alpha, A)$ ми називатимемо перехідною щільністю гіллястого процесу. Аналогічно доводиться і для випадку, коли $\alpha \in A$. З властивостей перехідних ймовірностей $\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, A)$ та $\widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_2, A)$ ми отримуємо такі умови на $p(t, \alpha, A)$. $p(t, \alpha, A)$ існує і є скінченною для будь-яких t, α, A, $\mathcal{Y}$-вимірною як функція по α і є також узагальненою мірою на $\mathcal{Y}$ як функція по A. Очевидно також, що $p(t, \alpha, \{\alpha\}) \leqslant 0$, $p(t, \alpha, A \subset \Omega - \{\alpha\}) \geqslant 0$ і $p(t, \alpha, \Omega) = 0$.

Введемо звичайний і логарифмічний функціонали Лапласа для обидвох процесів, ґрунтуючись на основних перехідних ймовірностях

$$\begin{aligned}
F(t_1, \alpha, t_2, s) &= \int\limits_{\Omega} \exp\left\{ \int\limits_X s(x)\alpha'(dx) \right\} \widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, d\alpha') = E_{\widehat{P}} \exp[s, \alpha], \\
\Psi(t_1, \alpha, t_2, s) &= \log F(t_1, \alpha, t_2, s) = \log E_{\widehat{P}} \exp[s, \alpha], \\
F_S(t_1, \alpha, t_2, s) &= \int\limits_{\Omega} \exp\left\{ \int\limits_X s(x)\alpha'(dx) \right\} \widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_2, d\alpha') = E_{\widehat{P}_S} \exp[s, \alpha] = \\
&= \int\limits_{\Omega \backslash (S \backslash A)} \exp\left\{ \int\limits_X s(x)\alpha'(dx) \right\} \widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_2, d\alpha'), \\
\Psi_S(t_1, \alpha, t_2, s) &= \log F_S(t_1, \alpha, t_2, s) = \log E_{\widehat{P}_S} \exp[s, \alpha].
\end{aligned}$$

В означенні функціонала для зупиненого процесу можна інтегрувати по всьому простору, бо контроль над потраплянням до поглинаючої множини S виконується перехідною ймовірністю $\widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_2, d\alpha')$, проте для зручності та консистентності з іншими позначеннями ми звузимо множину. Введемо також відповідні функціонали, ґрунтуючись на перехідних щільностях $p(t, \alpha, A)$

$$\begin{aligned}
\phi(t_1, \alpha, s) &= \int\limits_{\Omega} \exp\left\{ \int\limits_X s(x)\alpha'(dx) \right\} p(t_1, \alpha, d\alpha') = E_p \exp[s, \alpha], \\
\psi(t_1, \alpha, s) &= \exp\{-[s, \alpha]\} \phi(t_1, \alpha, s), \\
\phi_S(t_1, \alpha, s) &= \int\limits_{\Omega \backslash (S \backslash A)} \exp\left\{ \int\limits_X s(x)\alpha'(dx) \right\} p(t_1, \alpha, d\alpha'), \\
\psi_S(t_1, \alpha, s) &= \exp\{-[s, \alpha]\} \phi_S(t_1, \alpha, s).
\end{aligned}$$

З незалежності розмноження частинок (3) виконується

$$F_*(t_1, \alpha_1 + \alpha_2, t_2, A) = F_*(t_1, \alpha_2, t_2, A) \cdot F_*(t_1, \alpha_2, t_2, A),$$

де "$*$" означає, що описане вище виконується для будь-якого з обидвох процесів. І з (5) випливає

$$\frac{\partial}{\partial t_1} F_*(t_1, \alpha, t_2, s)|_{t_1 = t_2^-} = \phi_*(t_1, \alpha, s).$$

Тому

$$\phi_*(t, \alpha_1 + \alpha_2, s) = \phi_*(t, \alpha_1, s) \exp[s, \alpha_2] + \phi_*(t, \alpha_2, s) \exp[s, \alpha_1].$$

Поділивши обидві сторони останньої рівності на $\exp[s, \alpha_1 + \alpha_2]$, отримаємо

$$\psi_*(t, \alpha_1 + \alpha_2, s) = \psi_*(t, \alpha_1, s) + \psi_*(t, \alpha_2, s).$$

На відміну від попередніх робіт по S-зупинених гіллястих процесах у цьому випадку притримуватимемося класичного припущення, в якому процес починається з однієї частинки. Очевидно, що більшість наведених вище тверджень можна переписати у поточковій формі, тобто, наприклад,

$$\psi_*(t, \alpha, s) = \int\limits_X \psi_*(t, x, s) \alpha(dx) = [\psi_*(t, \cdot, s), \alpha], \quad \alpha \in \mathcal{Y}, \quad x \in X,$$

тому

$$p(t, \alpha, A) = \sum_{i=1}^{k} n_i p(t, x_i, W_{x_i - \alpha}, A),$$

де $\alpha = \{n_1, x_1; \ldots; n_k, x_k\}$. У цьому випадку ми фактично враховуємо ймовірність переходу з однієї точки фіксованого типу і множимо на кількість точок цього типу. Так проходимо по всіх типах, на яких функція α сконцентрована.

Оскільки більшість статей описують ймовірність виродження гіллястих процесів за різних умов, то у нашому випадку ймовірність виродження загального гіллястого процесу без умов на зупиненість є $\widehat{P}(t_1, x, t_2, \{0\})$, якщо ця ймовірність прямує до одиниці при всіх $x \in X$, то процес називатимемо тим, що вироджується. Ймовірність виродження S-зупиненого гіллястого процесу буде визначена як $\widehat{P}_S(t_1, x, t_2, S \cup \{0\})$.

Якщо всі припущення щодо перехідних щільностей виконуються, то можна побудувати фундаментальний Феллерівський розв'язок для звичайного та S-зупиненого процесу. Для початку виведемо всю теорію для звичайного процесу, а потім перекладемо на зупинений. Для цього нам потрібно ще кілька позначень.

Позначимо через $q(t, \alpha)$ ймовірність того, що процес в околі часу t залишився на місці α, але не поточково. Тобто, наприклад, якщо є одна точка a типу x_1 і одна точка b типу x_2, то допускається, що точка a типу x_1 перейшла в точку c типу x_2 і точка b типу x_2 перейшла в точку d типу x_1. В цьому випадку процес змінювався поточково, але загалом залишився в тому самому стані α, що й був на початку, тому як і на початку, так і в кінці ми отримали по одній точці типів x_1 та x_2, відповідно. Тому означену вище ймовірність можна записати як

$$q(t, \alpha) = p(t, \alpha, \alpha).$$

Через $p_1(t, \alpha, A)$ позначимо ймовірність того, що процес в околі t вийшов зі свого стану в множину $A \setminus \{\alpha\}$

$$p_1(t, \alpha, A) = p(t, \alpha, A \setminus \{\alpha\}).$$

Ймовірність того, що процес протягом всього інтервалу часу $[t_1, t_2]$ залишався не поточково на місці, ми означимо через

$$J(t_1, t_2, \alpha) = \int_{t_1}^{t_2} p(t, \alpha, \alpha) dt.$$

Нехай

$$\begin{aligned} \widehat{P}^{(0)}(t_1, \alpha, t_2, A) &= \mathbf{I}\{\alpha \in A\} \exp\left\{\int_X J(t_1, t_2, x)\alpha(dx)\right\} \approx \\ &\approx \mathbf{I}\{\alpha \in A\} \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} J(t_1, t_2, x_i) n_i\right\} \end{aligned}$$

є ймовірністю того, що процес за весь проміжок часу $[t_1, t_2]$ залишився поточково на місці, тобто не відбулися жодні зміни всередині процесу, кожна частинка в кожен момент часу переходила сама у себе. Надалі ми означимо незалежну в сукупності послідовність подій та їхні ймовірності

$$\widehat{P}^{(k)}(t_1, \alpha, t_2, A) = \int_{t_1}^{t_2} \exp[J(t_1, t, \cdot), \alpha] \int_{\Omega} \widehat{P}^{(k-1)}(t, \alpha', t_2, A) p_1(t, \alpha, d\alpha') dt,$$

що для кожного k означають k поточкових змін всередині процесу до потрапляння в множину A. Для звичайного процесу ми маємо розв'язок Феллера

$$\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, A) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{P}^{(k)}(t_1, \alpha, t_2, A).$$

Це виконується тільки для звичайних загальних не S-зупинених гіллястих процесів. Для S-зупинених процесів, ми вводимо кілька додаткових позначень ймовірностей пов'язаних з потраплянням, чи не потраплянням у множину S, зокрема, що процес потрапив у множину A, не потрапивши в себе $\{\alpha\}$ та не потрапивши у множину виродження S

$$p_2(t, \alpha, A) = p(t, \alpha, A \setminus \{\alpha\} \setminus S).$$

Ймовірність того, що процес потрапив у $A \cap S$ позначимо як

$$p_S(t, \alpha, A) = p(t, \alpha, A \cap S),$$

а що процес потрапив у $A \setminus S$ через

$$p_{\bar{S}}(t, \alpha, A) = p(t, \alpha, A \setminus S).$$

Спочатку розглянемо випадок, коли $A \cap S \neq \emptyset$ і процес потрапить в $A \setminus S$. В цій ситуації визначимо

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{\bar{S}}^{(k)}(t_1, \alpha, t_2, A) &= \widehat{P}^{(k)}(t_1, \alpha, t_2, A \setminus S) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \exp[J(t_1, t, \cdot), \alpha] \int_{\Omega} \widehat{P}^{(k-1)}(t, \alpha', t_2, A) p_2(t, \alpha, d\alpha') dt. \end{aligned}$$

Далі введемо таку послідовність ймовірностей незалежних у сукупності подій, які відповідають за потрапляння процесу у множину A, яка не обов'язково не перетинна з S, проте при будь-якому проміжному потраплянні процесу в множину S процес зупиняється

$$\begin{aligned}\widehat{P}_S^{(0)}(t_1,\alpha,t_2,A) &= \widehat{P}^{(0)}(t_1,\alpha,t_2,A),\\ \widehat{P}_S^{(k)}(t_1,\alpha,t_2,A) &= \widehat{P}_{\bar{S}}^{(k)}(t_1,\alpha,t_2,A)+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} p_S(t,\alpha',A)\widehat{P}_{\bar{S}}^{(k-1)}(t_1,\alpha,t,d\alpha')dt.\end{aligned}$$

На підставі цих ймовірностей фундаментальний Феллерівський розв'язок для S-зупинених гіллястих процесів набуде вигляду

$$\widehat{P}_S(t_1,\alpha,t_2,A)=\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{P}_S^{(k)}(t_1,\alpha,t_2,A).$$

Подальша мета цього аналізу – розглянути зв'язок функціонального рівняння для звичайних і для зупинених процесів.

Теорема 1. *Функціональне рівняння для S-зупинених процесів набуває вигляду*

$$\frac{\partial}{\partial s}F(s,w,t,f)=-\int\limits_{\Omega}F(s,w',t,f)p_{\bar{S}}(s,w,dw')+\mathcal{B}$$

де $\mathcal{B}=\partial B/\partial s$, а B з (6) в теоремі.

Доведення.

$$\begin{aligned}F_S(s,w,t,f)&=\int\limits_{\Omega}\exp[f,w']\widehat{P}_S(s,w,t,dw')=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\exp[f,w']\widehat{P}_S^{(k)}(s,w,t,dw')=\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\exp[f,w']P_{\bar{S}}^{(k)}(s,w,t,dw')+\\ &+\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\exp[f,w']\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{\Omega}p_S(t',\alpha',dw')\widehat{P}_{\bar{S}}^{(k)}(s,w,t',d\alpha')dt'=\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\exp[f,w']P^{(k)}(s,w,t,dw'\setminus S)+B=A+B.\end{aligned}$$

Розглянемо обидва доданки A та B окремо, для початку перший

$$\begin{aligned}A&=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\exp[f,w']P^{(k)}(s,w,t,dw'\setminus S)=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega\setminus S}\exp[f,w']P^{(k)}(s,w,t,dw')=\\ &=\int\limits_{\Omega\setminus S}I\{w'\in w\}\exp\left\{\int\limits_X f(x)w'(dx)+\int\limits_X J(s,t,x)w'(dx)\right\}p_1(s,w,dw')+\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Omega\setminus S}\int\limits_{s}^{t}\exp[f+J(s,s',\cdot),w']\int\limits_{\Omega}P^{(k-1)}(s',w'',t,dw')p_1(s',w,dw'')ds'=\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\Omega\setminus S} I\{w' \in w\} \exp[f + J(s,t,\cdot), w'] p_1(s,w,dw') +$$

$$+ \int\limits_{\Omega\setminus S} \int\limits_s^t \exp[f + J(s,s',\cdot), w'] \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} P^{(k-1)}(s',w'',t,dw') p_1(s',w,dw'') ds' =$$

$$= I\{w' \in \Omega \setminus S\} \exp[f + J(s,t,\cdot), w] +$$

$$+ \int\limits_{\Omega\setminus S} \int\limits_s^t \exp[J(s,s',\cdot), w'] \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(s',w'',t,dw') p_1(s',w,dw'') ds' =$$

$$= I\{w \in \Omega \setminus S\} \exp[f + J(s,t,\cdot), w] +$$

$$+ \int\limits_{\Omega\setminus S} \int\limits_s^t \exp[J(s,s',\cdot), w] F(s',w',t,f) p_1(s',w,dw') ds'.$$

Ми не зводитимемо другий доданок до такого ж гарного вигляду просто покажемо, що можна уникнути нескінченних сум і рекурсій

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \int\limits_s^t \int\limits_{\Omega} p_S(t', \alpha', dw') \widehat{P}^{(k)}_{\bar{S}}(s,w,t',d\alpha') dt' =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \int\limits_s^t \int\limits_{\Omega\setminus S} p_S(t', \alpha', dw') \widehat{P}^{(k)}(s,w,t',d\alpha') dt' =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \int\limits_s^t \int\limits_{\Omega\setminus S} p_S(t', \alpha', dw') I\{w \in d\alpha'\} \exp[J(s,t',\cdot), w] dt' +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \int\limits_s^t \int\limits_{\Omega\setminus S} p_S(t', \alpha', dw') \int\limits_s^{t'} \exp[J(s,t'',\cdot), w] \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega} \widehat{P}^{(k)}(t'', \alpha'', t', d\alpha') p_1(t'', w, d\alpha'') dt'' dt' =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \int\limits_s^t p_S(t', w, dw') \exp[J(s,t',\cdot), w] dt' + \qquad (6)$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \int\limits_s^t \int\limits_{\Omega\setminus S} p_S(t', \alpha', dw') \int\limits_s^{t'} \exp\{[J(s,t'',\cdot), w] - [f, \alpha']\} \times$$

$$\times F(t'', \alpha'', t', f) p_1(t'', w, d\alpha'') dt'' dt'.$$

Частина B не містить жодних рекурсій та нескінченних сум, а також є неперервною та диференційовною по s, тому $\exists\ \partial B/\partial s =: \mathcal{B}$. Для подальших обчислень знайдемо

$$\frac{\partial J(s,t,\cdot)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\int\limits_s^t p(s',w,w)ds' = -p(s,w,w) = -q(s,w).$$

Обчислимо похідну по s від усього функціонала

$$\frac{\partial}{\partial s}F(s,w,t,f) = \frac{\partial A}{\partial s} + \mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial s}I\{w\in\Omega\setminus S\}\exp[f+J(s,t,\cdot),w] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_{\Omega\setminus S}\int\limits_s^t \exp[J(s,s',\cdot),w]F(s',w',t,f)p_1(s',w,dw')ds' + \mathcal{B} =$$

$$= \frac{J(s,t,\cdot)}{\partial s}I\{w\in\Omega\setminus S\}\exp[f+J(s,t,\cdot),w] -$$

$$-\int\limits_{\Omega\setminus S}\exp[J(s,s,\cdot),w]F(s,w',t,f)p_1(s,w,dw') +$$

$$+\frac{\partial J(s,t,\cdot)}{\partial s}\int\limits_{\Omega\setminus S}\int\limits_s^t \exp[J(s,s',\cdot),w]F(s',w',t,f)p_1(s',w,dw')ds' + \mathcal{B} =$$

$$= -q(s,w)\exp[f+J(s,t,\cdot),w]I(w\in\Omega\setminus S) - \int\limits_{\Omega\setminus S}F(s,w',t,f)p_1(s,w,dw') -$$

$$-q(s,q)\int\limits_s^t\int\limits_{\Omega\setminus S}\exp[J(s,s',\cdot),w]F(s',w',t,f)p_1(s',w,dw')ds' + \mathcal{B} =$$

$$= -\int\limits_{\Omega\setminus S}F(s,w',t,f)p(s,w,dw') + \mathcal{B} = -\int\limits_{\Omega}F(s,w',t,f)p_{\bar{S}}(s,w,dw') + \mathcal{B}.$$

Що й треба було довести. □

У випадку, якщо процес не є S-зупиненим, тобто $S=\emptyset$, наш результат збігається з [6]. У тому випадку $p_S(t,\alpha,A) = p(t,\alpha,A\cap S) = p(t,\alpha,A\cap\emptyset) = p(t,\alpha,\emptyset) = 0$, $p_{\overline{S}}(t,\alpha,A) = p(t,\alpha,A\setminus S) = p(t,\alpha,A)$. З цього випливає, що $B=0$, тому і $\mathcal{B}=0$, а

$$-\int\limits_{\Omega}F(s,w',t,f)p_{\bar{S}}(s,w,dw') = -\int\limits_{\Omega}F(s,w',t,f)p(s,w,dw').$$

Звідси і випливає, що при $S=\emptyset$

$$\frac{\partial}{\partial s}F(s,w,t,f) = -\int\limits_{\Omega}F(s,w',t,f)p(s,w,dw').$$

Що є рівносильним рівнянню (2.23) в [6]. Аналогічно це можна звести і до (2.24) в [6].

Список використаної літератури

1. *Єлейко Я.* Асимптотичний аналіз і перехідні явища в матричнозначних випадкових еволюціях, гіллясті процеси та процеси марківського втручання випадку. / *Єлейко Я.* Дис. докт. фіз.-мат. наук. – Львів, 1994.
2. *Севастьянов Б.* Асимптотическое поведение вероятностей вырождения остановленных ветвящихся процессов / *Севастьянов Б.* // Теория вер. и ее прил. – 1988. – Т. 43. – С. 315-322.
3. *Севастьянов Б.* Ветвящиеся процессы / *Севастьянов Б.* – М., 1971.
4. *Харріс Т.* Теория ветвящихся процессов / *Харріс Т.* – М., 1966.
5. *Єлейко Я.* Асимптотична поведінка S-зупинених гіллястих процесів зі зліченним числом типів / *Єлейко Я., Киричинська І., Охрін О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 119-129.
6. *Jirina M.* General branching processes with continuous time parameter / *Jirina M.* // Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. – 1967. – Vol. 2. – P. 389-399.

Стаття: надійшла до редакції 02.09.2010
прийнята до друку 21.09.2011

ON THE GENERATING FUNCTIONAL OF THE SPECIAL CASE OF S-STOPPED BRANCHING PROCESSES

Ostap OKHRIN

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: ostap.okhrin@wiwi.hu-berlin.de

In this paper starting process with the infinite number of types of particles $\mu(t)$ generate stopped branching process $\xi(t)$, if by falling of the first one into the non empty set S process stops. Here we consider the generating functional of the upper defined process.

Key words: branching processes, generating functions, transition probabilities.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74

ОБ ОБРАЗУЮЩЕМ ФУНКЦИОНАЛЕ ЧАСТИЧНОГО СЛУЧАЯ S-ОСТАНОВЛЕННЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

Остап ОХРИН

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ostap.okhrin@wiwi.hu-berlin.de

Начальный процесс с несчисленным количеством типов $\mu(t)$ порождает остановленный ветвящийся процесс $\xi(t)$, если при попадании $\mu(t)$ в некоторое непустое множество S процесс останавливается. Рассматривается образующий функционал вышеприведенного процесса.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, образующий функционал, переходная вероятность.