ISSN 2078-3744. Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 168–184
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 168–184

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛIЧНОГО РIВНЯННЯ В ОБЛАСТI ЗI СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ МЕЖI

Тетяна САВIЦЬКА

Львiвський нацiональний унiверситет iменi Iвана Франка,
вул. Унiверситетська, 1, Львiв, 79000
e-mail: tetjankas@mail.ru

Знайдено умови iснування та єдиностi розв'язку оберненої задачi для параболiчного рiвняння з невiдомим коефiцiєнтом при старшiй похiднiй, який залежить вiд часу. Припускається, що межа областi невiдома i вироджується у початковий момент часу. Згадана задача зводиться до оберненої задачi для параболiчного рiвняння з виродженням.

Ключовi слова: обернена задача, параболiчне рiвняння, слабке виродження, виродження межi областi.

1. Вступ. До теорiї обернених задач звертаються у тих випадках, коли визначити ту чи iншу невiдому характеристику неможливо, наприклад, через недоступнiсть матерiалу чи середовища, або ж тодi, коли проведення безпосереднiх вимiрювань неможливе.

Вагоме мiсце в цiй теорiї займають коефiцiєнтнi oбepненi задачi, де серед невiдомих є коефiцiєнт рiвняння або його вiльний член. Iнтенсивний розвиток теорiї обернених задач для параболiчних рiвнянь з невiдомим коефiцiєнтом, який залежить вiд часу, розпочався пiсля появи у 1962 р. працi Б. Джонса [9]. З тих часiв теорiя обернених задач досягла суттєвого розвитку.

Поряд з оберненими важливе мiсце в теорiї диференцiальних рiвнянь займають задачi з вiльною межею. Вони виникають уже в таких простих фiзичних процесах як плавлення твердих тiл або кристалiзацiя рiдин.

Дослiджувала oбepненi задачi для параболiчного рiвняння зi слабким i сильним виродженням Н. Салдiна [5]. Зокрема, Н. Салдiна розглядала й випадки виродження загального вигляду. Г. Снiтко вивчала oбepненi задачi для параболiчного рiвняння в областi з вiльною межею [6]. Oбepненi задачi для параболiчного рiвняння з виродженням в областi з вiльною межею дослiджувала Н. Гринцiв [2]. Особливий випадок задачi в областi з виродженням розглянуто у статтi М. Iванчова [3]. Дослiдження задач, якi б поєднували oбepненi задачi, задачi з вiльною межею i задачi для рiвнянь з виродженням, є актуальними.

2. Формулювання задачі. В області $Q_T \equiv \{(x,t)\colon 0 < x < \psi(t)\tilde{h}(t), 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу для параболічного рівняння

$$u_t = \tilde{a}(t)u_{xx} + \tilde{b}(x,t)u_x + \tilde{c}(x,t)u + \tilde{f}(x,t), \tag{1}$$

з умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(\psi(t)\tilde{h}(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\tilde{a}(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\int\limits_0^{\psi(t)\tilde{h}(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

де функція $\psi(t)$ – додатна, монотонно зростаюча, $t \in (0,T]$ і в точці $t = 0$ дорівнює нулю, а функції $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$, $\tilde{a}(t) > 0$, $\tilde{h}(t) > 0, t \in [0,T]$ – невідомі.

Означення 1. *Виродження називатимемо слабким, якщо функція* $\psi \in C^1(0,T]$, $\psi'(t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$ *і вираз* $\int\limits_0^t \frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{s}}$ *прямує до нуля при* $t \to 0$.

Будемо розглядати такі випадки:
(I) ψ' – монотонно спадна функція, $\psi'(t) \to \infty$ при $t \to 0$;
(II) ψ' – монотонно зростаюча функція, $\psi'(t) \to 0$ при $t \to 0$.

3. Існування розв'язку задачі (1)-(4) (випадок (I)). Нехай виконуються такі припущення:

(A1) $\psi \in C^1(0,T]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,4$, існує границя $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\mu_i'(t)}{\psi'(t)}$, $i = 1,2$, $\mu_3 \in C[0,T]$, коефіцієнти $\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{f} \in C([0,\infty) \times [0,T])$ задовольняють умову Гельдера за змінною x з показником $\alpha \in (0,1)$ рівномірно стосовно $t \in [0,T]$;

(A2) $\mu_i(t) > 0, i = 1,2,3, t \in [0,T]$, $\mu_4(t) > 0, t \in (0,T]$, існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\mu_4(t)}{\psi(t)} > 0$, $\tilde{f}(x,t) \geqslant 0$, $\tilde{c}(x,t) \leqslant 0, (x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\mu_2'(t) - \mu_1'(t)}{\psi'(t)} > 0$, $\psi(0) = 0, \psi(t) > 0, t \in (0,T]$, $\psi'(t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$, $\int\limits_0^t \frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{s}} \to 0, t \to 0$.

(A3) $\mu_1(0) = \mu_2(0)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення **(I)**, **(A1)** – **(A3)**. Тоді існує хоча б один розв'язок* $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$ *задачі (1)-(4), який належить до класу* $C^1(0,T_0] \cap C[0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, *де* T_0, $0 < T_0 \leqslant T$ *визначається через вихідні дані.*

Доведення. Зробивши заміну $y = \frac{x}{\tilde{h}(t)}$, $\sigma = \psi(t)$ в задачі (1)-(4), ми зведемо її до оберненої задачі для виродженого параболічного рівняння

$$v_\sigma = \frac{\varphi'(\sigma)a(\sigma)}{h^2(\sigma)}v_{yy} + \frac{yh'(\sigma) + \varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)}v_y + \varphi'(\sigma)\Big(c(yh(\sigma),\sigma)v + f(yh(\sigma),\sigma)\Big),$$

$$(y,\sigma) \in Q_{T_1}, \tag{5}$$

з умовами

$$v(0,\sigma) = \nu_1(\sigma), \quad v(\sigma,\sigma) = \nu_2(\sigma), \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant T_1, \tag{6}$$

$$a(\sigma)v_y(0,\sigma) = h(\sigma)\nu_3(\sigma), \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant T_1, \tag{7}$$

$$h(\sigma)\int\limits_0^{\sigma} v(y,\sigma)dy = \nu_4(\sigma), \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant T_1, \tag{8}$$

де $Q_{T_1} = \{(y,\sigma) : 0 < y < \sigma, 0 < \sigma < T_1\}$, $T_1 = \psi(T)$, $v(y,\sigma) = u(y\tilde{h}(\psi^{-1}(\sigma)), \psi^{-1}(\sigma))$, $b(yh(\sigma),\sigma) = \tilde{b}(y\tilde{h}(\psi^{-1}(\sigma)), \psi^{-1}(\sigma))$, $c(yh(\sigma),\sigma) = \tilde{c}(y\tilde{h}(\psi^{-1}(\sigma)), \psi^{-1}(\sigma))$, $h(\sigma) = \tilde{h}(\psi^{-1}(\sigma))$, $f(yh(\sigma),\sigma) = \tilde{f}(y\tilde{h}(\psi^{-1}(\sigma)), \psi^{-1}(\sigma))$, $\nu_i(\sigma) = \mu_i(\psi^{-1}(\sigma))$, $i = \overline{1,4}$, $a(\sigma) = \tilde{a}(\psi^{-1}(\sigma))$, $\varphi(\sigma) = \psi^{-1}(\sigma)$.

Далi зробимо замiну невiдомої функцiї $v(y,\sigma) = \tilde{v}(y,\sigma) + \nu_1(\sigma) + \dfrac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))$ й отримаємо таку задачу стосовно функцiї $\tilde{v}(y,\sigma)$

$$\tilde{v}_\sigma = \frac{\varphi'(\sigma)a(\sigma)}{h^2(\sigma)}\tilde{v}_{yy} + \frac{yh'(\sigma) + \varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)}\tilde{v}_y + \varphi'(\sigma)\Big(c(yh(\sigma),\sigma)\tilde{v} + f(yh(\sigma),\sigma)\Big) -$$

$$-\nu_1'(\sigma) - \frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)) + \frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma}\,\frac{yh'(\sigma) + \varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)} +$$

$$+\varphi'(\sigma)c(yh(\sigma),\sigma)\Big(\nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))\Big), \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1}, \tag{9}$$

$$\tilde{v}(0,\sigma) = \tilde{v}(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0, T_1]. \tag{10}$$

Для того, щоб побудувати розв'язок цiєї задачi, розглянемо таку допомiжну задачу:

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < t, \quad 0 < t < T, \tag{11}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(t,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{12}$$

Нехай функцiя $a \in C[0,T]$ – вiдома i виконуються такi умови: $f \in C[0,T]^2$ та задовольняє умову Гельдера по x з показником $\alpha \in (0,1)$, $\mu_i \in C[0,T], i = 1,2$. Тодi розв'язок задачi (11), (12) набуде вигляду

$$u(x,t) = \int\limits_0^t G_\xi(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau - \int\limits_0^t G_\xi(x,t,\tau,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau G(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

де $G(x,t,\xi,\tau)$ – функцiя Грiна для рiвняння (11), яку можна подати у виглядi [8]

$$G(x,t,\xi,\tau) = G_0(x,t,\xi,\tau) + \int\limits_\tau^t d\sigma\int\limits_0^\sigma G_0(x,t,\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta,$$

$$G_0(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nt)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big) -$$

$$-\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nt)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\Big),$$

$\theta(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$. Функція $\Phi(x,t,\xi,\tau)$ є розв'язком рівняння

$$\Phi(x,t,\xi,\tau) = -LG_0(x,t,\xi,\tau) - \int\limits_\tau^t d\sigma \int\limits_0^\sigma LG_0(x,t,\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta,$$

де $L = \frac{\partial}{\partial t} - a(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Використовуючи сказане вище, побудуємо розв'язок задачі (9), (10). Позначимо

$$F(y,\sigma) \equiv \frac{yh'(\sigma) + \varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)}\tilde{v}_y + \varphi'(\sigma)\Big(c(yh(\sigma),\sigma)\tilde{v} + f(yh(\sigma),\sigma)\Big) - \nu_1'(\sigma) -$$

$$-\frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)) + \frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma}\frac{yh'(\sigma) + \varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)} +$$

$$+\varphi'(\sigma)c(yh(\sigma),\sigma)\Big(\nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))\Big).$$

Тимчасово припускаємо, що функції $a(\sigma), h(\sigma), F(y,\sigma)$ – відомі. Оскільки $\dfrac{y}{\sigma} \leqslant 1$ і виконується умова **(A3)**, то $\dfrac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)) \leqslant \nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)$, а

$$\frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) \leqslant \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} = \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_2(0)}{\sigma} - \frac{\nu_1(\sigma) - \nu_1(0)}{\sigma} \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} \nu_2'(0) - \nu_1'(0).$$

З того, що виконується **(I)**, випливає $\varphi'(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$. Тому з умови **(A1)** отримуємо, що функція $F(y,\sigma)$ неперервна та задовольняє умову Гельдера по y з показником $\alpha \in (0,1)$. Отже, використовуючи функцію Гріна $G(y,\sigma,\eta,\tau)$, визначену вище, де $\theta(\sigma) = \int\limits_0^\sigma \frac{\varphi'(\tau)a(\tau)}{h^2(\tau)}d\tau$, зведемо задачу (9), (10) до такого інтегро-диференціального рівняння стосовно функції $\tilde{v}(y,\sigma)$

$$\tilde{v}(y,\sigma) = \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\frac{\eta h'(\tau) + \varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\tilde{v}_\eta(\eta,\tau) +$$

$$+\varphi'(\tau)\Big(c(\eta h(\tau),\tau)\tilde{v}(\eta,\tau) + f(\eta h(\tau),\tau)\Big) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) +$$

$$+\frac{(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))}{\tau}\frac{\eta h'(\tau) + \varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)} +$$

$$+\varphi'(\tau)c(\eta h(\tau),\tau)\Big(\nu_1(\tau) + \frac{\eta}{\tau}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\Big)\Big)d\eta, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}.$$

Повертаючись до функції $v(y,\sigma)$, отримаємо

$$v(y,\sigma) = \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)} +$$

$$+\frac{\varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\Big)v_\eta(\eta,\tau) + \varphi'(\tau)\Big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau) + f(\eta h(\tau),\tau)\Big) - \nu_1'(\tau) -$$

$$-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\Big)d\eta, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{13}$$

Знайдемо оцінку функції $v(y,\sigma)$ знизу. Позначимо через $v_0(y,\sigma)$ розв'язок задачі

$$v_\sigma = \frac{\varphi'(\sigma)a(\sigma)}{h^2(\sigma)}v_{yy} + \frac{yh'(\sigma)+\varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)}v_y + \varphi'(\sigma)c(yh(\sigma),\sigma)v, (y,\sigma)\in Q_{T_1}, \quad (14)$$

$$v(0,\sigma)=\nu_1(\sigma), \quad v(\sigma,\sigma)=\nu_2(\sigma), \quad 0\leqslant\sigma\leqslant T_1, \quad (15)$$

а через $\widehat{v}(y,\sigma)$ – розв'язок задачі

$$v_\sigma = \frac{\varphi'(\sigma)a(\sigma)}{h^2(\sigma)}v_{yy} + \frac{yh'(\sigma)+\varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)}v_y + \varphi'(\sigma)\Big(c(yh(\sigma),\sigma)v + f(yh(\sigma),\sigma)\Big), \quad (16)$$

$(y,\sigma)\in Q_{T_1}$,

$$v(0,\sigma)=v(\sigma,\sigma)=0, \quad 0\leqslant\sigma\leqslant T_1. \quad (17)$$

Тоді

$$v(y,\sigma)=v_0(y,\sigma)+\widehat{v}(y,\sigma). \quad (18)$$

З принципу максимуму [7, розд. 2] отримуємо

$$v_0(y,\sigma)\geqslant C_1\min\{\min_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_1(t), \min_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_2(t)\}=M_1>0, \quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1},$$

$$\widehat{v}(y,\sigma)\geqslant 0, \quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}.$$

Отож, одержуємо таку оцінку:

$$v(y,\sigma)\geqslant M_1>0, \quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}. \quad (19)$$

Тому можемо (8) записати у вигляді

$$h(\sigma)=\frac{\nu_4(\sigma)}{\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}, \quad \sigma\in(0,T_1]. \quad (20)$$

Позначимо $w(y,\sigma)\equiv v_y(y,\sigma)$, $p(\sigma)\equiv\sigma h'(\sigma)$ і зведемо рівняння (13) до системи інтегральних рівнянь

$$v(y,\sigma)=\nu_1(\sigma)+\frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))+\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)}+$$
$$+\frac{\varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\Big)w(\eta,\tau)+\varphi'(\tau)\Big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+f(\eta h(\tau),\tau)\Big)-\nu_1'(\tau)-$$
$$-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Big)d\eta, \quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}, \quad (21)$$

$$w(y,\sigma)=\frac{\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma)}{\sigma}+\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau G_y(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)}+\frac{\varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\Big)w(\eta,\tau)+$$
$$+\varphi'(\tau)\Big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+f(\eta h(\tau),\tau)\Big)-\nu_1'(\tau)-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Big)d\eta,$$
$$(y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}. \quad (22)$$

З умови (7) одержимо рівняння

$$a(\sigma)w(0,\sigma)=h(\sigma)\nu_3(\sigma), \quad \sigma\in(0,T_1]. \quad (23)$$

Щоб отримати рівняння, розв'язане стосовно $p(\sigma)$, продиференціюємо умову (8)

$$h'(\sigma)\frac{\nu_4(\sigma)}{h(\sigma)} + h(\sigma)\Big(\nu_2(\sigma) + \int\limits_0^\sigma v_\sigma(y,\sigma)dy\Big) = \nu_4'(\sigma).$$

Використовуючи (5), отримаємо рівняння

$$p(\sigma) = \frac{1}{\nu_2(\sigma)}\Big(\nu_4'(\sigma) - h(\sigma)\nu_2(\sigma) - \frac{\varphi'(\sigma)a(\sigma)}{h(\sigma)}(w(\sigma,\sigma) - w(0,\sigma)) -$$

$$-\varphi'(\sigma)\int\limits_0^\sigma \Big(b(yh(\sigma),\sigma)w(y,\sigma) + h(\sigma)(c(yh(\sigma),\sigma)v(y,\sigma) + f(yh(\sigma),\sigma))\Big)dy\Big), \qquad (24)$$

$\sigma \in (0, T_1]$.

Отже, ми звели задачу (5)-(8) до системи інтегральних рівнянь (20)-(24), де невідомі $(h(\sigma), a(\sigma), v(y,\sigma), w(y,\sigma), p(\sigma))$. Легко довести еквівалентність задач знаходження класичного розв'язку задачі (5)-(8) і знаходження неперервного розв'язку системи рівнянь (20)-(24).

Оскільки задача (5)-(8) еквівалентна системі рівнянь (20)-(24), то будемо доводити існування розв'язку системи (20)-(24), застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку. Для початку знайдемо оцінки розв'язків системи (20)-(24).

З (19) та (20) випливає, що $h(\sigma) \leqslant H_1 < \infty$, $\sigma \in [0, T_1]$. Оскільки $0 \leqslant yh(\sigma) \leqslant$ $\leqslant T_1H_1 = C_2$, то $f(yh(\sigma),\sigma) \leqslant C_3$, тому згідно з принципом максимуму [7, розд. 2] одержуємо

$$v_0(y,\sigma) \leqslant C_4 \max\{\max_{0\leqslant\sigma\leqslant T_1}\nu_1(\sigma), \max_{0\leqslant\sigma\leqslant T_1}\nu_2(\sigma)\} = C_5 < \infty, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1},$$

$$\widehat{v}(y,\sigma) \leqslant C_6 \max_{(y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}} f(yh(\sigma),\sigma) = C_7 < \infty, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1},$$

де $v_0(y,\sigma), \widehat{v}(y,\sigma)$ – розв'язки задач (14), (15) та (16), (17) відповідно. Отже, з (18) отримаємо

$$v(y,\sigma) \leqslant M_2 < \infty, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \qquad (25)$$

Оскільки $\dfrac{\nu_4(\sigma)}{\sigma} = \dfrac{\mu_4(t)}{\psi(t)}$, то з (20), (25) та умови **(A2)** випливає

$$h(\sigma) \geqslant \frac{\nu_4(\sigma)}{\sigma M_2} \geqslant H_0 > 0, \quad \sigma \in [0, T_1].$$

Отже, одержали таку оцінку:

$$0 < H_0 \leqslant h(\sigma) \leqslant H_1 < \infty, \quad \sigma \in [0, T_1]. \qquad (26)$$

З умов **(A1)** – **(A3)** отримуємо

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} = \nu_2'(0) - \nu_1'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\mu_2'(t) - \mu_1'(t)}{\psi'(t)} \geqslant M_3 > 0,$$

тому

$$\frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} \geqslant M_3 > 0, \quad \sigma \in (0, T_1]. \qquad (27)$$

Дослідимо поведінку інтеграла з рівняння (22). Припустимо, що $w(y,\sigma)$, $a(\sigma)$, $p(\sigma)$ – обмежені відомими константами. Використовуючи відомі оцінки функції Гріна [4], отримаємо

$$\Big|\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau G_y(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)}+\frac{\varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\Big)w(\eta,\tau)+\varphi'(\tau)\Big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+$$

$$+f(\eta h(\tau),\tau)\Big)-\nu_1'(\tau)-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Big)d\eta\Big|\leqslant$$

$$\leqslant C_8\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau\Big|G_y(y,\sigma,\eta,\tau)\Big|d\eta\leqslant C_9\int\limits_0^\sigma\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}\leqslant C_{10}\int\limits_0^\sigma\frac{d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma)-\varphi(\tau)}},$$

$$(y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}. \tag{28}$$

Використовуючи заміну $s=\varphi(\tau)$ і означення слабкого виродження, отримаємо

$$\int\limits_0^\sigma\frac{d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma)-\varphi(\tau)}}=\int\limits_0^{\varphi(\sigma)}\frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{\varphi(\sigma)-s}}=\int\limits_0^t\frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{t-s}}=\int\limits_0^{t/2}\frac{\psi'(s)\sqrt{s}ds}{\sqrt{s(t-s)}}+\int\limits_{t/2}^t\frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{t-s}}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{t/2}\frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{s}}+\int\limits_{t/2}^t\frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{t-s}}\underset{t\to0}{\longrightarrow}0,\quad(y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}. \tag{29}$$

З (22), (27), (28) та (29) випливає, що існує число σ_1, $0<\sigma_1\leqslant T_1$ таке, що для $y\in[0,\sigma],\sigma\in[0,\sigma_1]$ виконується така оцінка:

$$w(y,\sigma)\geqslant\frac{1}{2}M_3>0. \tag{30}$$

З (23), (26) та (30) отримуємо

$$a(\sigma)\leqslant A_1<\infty,\quad\sigma\in[0,\sigma_1]. \tag{31}$$

Позначимо

$$W(\sigma)\equiv\max_{0\leqslant y\leqslant\sigma}w(y,\sigma),\quad a_{\min}(\sigma)\equiv\min_{0\leqslant\tau\leqslant\sigma}a(\tau).$$

З (22), (24) знаходимо

$$W(\sigma)\leqslant C_{12}+C_{13}\int\limits_0^\sigma\frac{(1+|p(\tau)|)(W(\tau)+1)}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}d\tau,\quad\sigma\in[0,\sigma_1], \tag{32}$$

$$|p(\sigma)|\leqslant C_{14}+C_{15}W(\sigma),\quad\sigma\in[0,\sigma_1]. \tag{33}$$

Підставимо (33) в (32)

$$W(\sigma)\leqslant C_{12}+C_{16}\int\limits_0^\sigma\frac{(W(\tau)+1)^2}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}d\tau. \tag{34}$$

Позначимо $W_1(\sigma) \equiv W(\sigma) + 1$, тоді (34) зведемо до вигляду

$$W_1(\sigma) \leqslant C_{17} + \frac{C_{18}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}} \int_0^\sigma \frac{W_1^2(\tau)d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(\tau)}}. \tag{35}$$

Піднесемо цю нерівність до квадрата, використаємо нерівність $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$ і нерівність Коші-Буняковського

$$W_1^2(\sigma) \leqslant C_{19} + \frac{C_{20}}{a_{\min}(\sigma)} \int_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(\tau)}} \int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(\tau)}}. \tag{36}$$

З (29) випливає, що інтеграл $I \equiv \int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma)-\varphi(\tau)}}$ прямує до нуля, коли $\sigma \to 0$. Отже, $I \leqslant C_{21}$, $\sigma \in [0, T_1]$ і нерівність (36) запишемо у вигляді

$$W_1^2(\sigma) \leqslant C_{19} + \frac{C_{22}}{a_{\min}(\sigma)} \int_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(\tau)}}.$$

Замінимо в попередній нерівності σ на s, домножимо на $\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(s)}$ і проінтегруємо від 0 до σ

$$\int_0^\sigma \frac{W_1^2(s)ds}{\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(s)}} \leqslant C_{22} + C_{22} \int_0^\sigma \frac{ds}{a_{\min}(s)\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(s)}} \int_0^s \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\varphi(s) - \varphi(\tau)}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{23} + \frac{C_{22}}{a_{\min}(\sigma)} \int_0^\sigma W_1^4(\tau)d\tau \int_\tau^\sigma \frac{ds}{\sqrt{(\varphi(s) - \varphi(\tau))(\varphi(\sigma) - \varphi(s))}}. \tag{37}$$

Оскільки $s \geqslant \tau$ і φ' – монотонно зростаюча функція, бо виконується **(I)**, а

$$\int_\tau^\sigma \frac{\varphi'(s)ds}{\sqrt{(\varphi(s) - \varphi(\tau))(\varphi(\sigma) - \varphi(s))}} = \pi,$$

тому з (37) одержимо

$$\int_0^\sigma \frac{W_1^2(s)ds}{\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(s)}} \leqslant C_{23} + \frac{C_{24}}{a_{\min}(\sigma)} \int_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\varphi'(\tau)}.$$

Підставимо останню нерівність у (35)

$$W_1(\sigma) \leqslant C_{17} + \frac{C_{25}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}} + \frac{C_{26}}{a_{\min}^{3/2}(\sigma)} \int_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\varphi'(\tau)}.$$

Розв'язавши цю нерівність [1], отримаємо

$$W_1(\sigma) \leqslant C_{17} +$$

$$+ \frac{C_{25}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}} + C_{27} \int_0^\sigma \Big(C_{17} + \frac{C_{25}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}}\Big) \frac{d\tau}{a_{\min}^{9/2}(\tau)\varphi'(\tau)} \exp\Big(C_{28} \int_0^\sigma \frac{ds}{a_{\min}^6(s)\varphi'(s)}\Big). \tag{38}$$

Існує таке число $\sigma_2 \in (0, T_1]$, що

$$C_{27} \int_0^{\sigma} \Big(C_{17} + \frac{C_{25}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}}\Big) \frac{d\tau}{a_{\min}^{9/2}(\tau)\varphi'(\tau)} \exp\Big(C_{28} \int_0^{\sigma} \frac{ds}{a_{\min}^{6}(s)\varphi'(s)}\Big) \leqslant C_{17}, \tag{39}$$

тому з (38), (39) і з того, що $W(\sigma) \leqslant W_1(\sigma)$, випливає

$$W(\sigma) \leqslant 2C_{17} + \frac{C_{25}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}}. \tag{40}$$

Звідси та з (23) випливає нерівність

$$2C_{17}a_{\min}(\sigma) + C_{25}\sqrt{a_{\min}(\sigma)} - C_{29} \geqslant 0,$$

тобто

$$\sqrt{a_{\min}(\sigma)} \geqslant \frac{\sqrt{C_{25}^2 + 8C_{17}C_{29}} - C_{25}}{4C_{17}} = \frac{2C_{29}}{C_{25} + \sqrt{C_{25}^2 + 8C_{17}C_{29}}}.$$

Отже,

$$a_{\min}(\sigma) \geqslant \frac{4C_{29}^2}{\Big(C_{25} + \sqrt{C_{25}^2 + 8C_{17}C_{29}}\Big)^2} = A_0 > 0. \tag{41}$$

З (41), (40), (24) одержуємо

$$a(\sigma) \geqslant A_0 > 0, \quad |p(\sigma)| \leqslant M_4, \quad \sigma \in [0, \sigma_2], \quad w(y,\sigma) \leqslant M_5, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{\sigma_2}, \tag{42}$$

де сталі A_0, M_4, M_5 залежать лише від вихідних даних.

Отже, ми отримали оцінки розв'язків системи (20)-(24).

Перепишемо цю систему у вигляді

$$\omega = P\omega, \tag{43}$$

де $\omega = (h, v, w, a, p)$, а оператор P визначений правими частинами рівнянь (20)-(24), якщо (23) переписати у вигляді

$$a(\sigma) = \frac{h(\sigma)\nu_3(\sigma)}{w(0,\sigma)}, \quad \sigma \in (0, T_1].$$

Визначимо множину $\mathcal{N} \equiv \{(h,v,w,a,p) \in C[0,\sigma_0] \times (C(\overline{Q}_{\sigma_0}))^2 \times (C[0,\sigma_0])^2 : H_0 \leqslant h \leqslant H_1,$ $M_1 \leqslant v \leqslant M_2,\ \frac{1}{2}M_3 \leqslant w \leqslant M_5,\ A_0 \leqslant a \leqslant A_1,\ |p| \leqslant M_4\}$, де $\sigma_0 = \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Оператор P є компактним на множині $\mathcal{N}$ [6]. Звідси і з отриманих оцінок (19), (25), (26), (30), (31), (42) випливає, що існує хоча б одна нерухома точка оператора P в $\mathcal{N}$. Це означає, що задача (1)-(4) має класичний розв'язок. □

4. Існування розв'язку задачі (1)-(4) (випадок (II)). Нехай виконується умова

(A4) існують границі $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tilde{b}(x,t)}{\psi'(t)},\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tilde{c}(x,t)}{\psi'(t)},\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tilde{f}(x,t)}{\psi'(t)} \in C([0,\infty) \times [0,T]).$

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення **(II)**, **(A1)** – **(A4)**, а також існує границя* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mu_4'(t)}{\psi'(t)}$. *Тоді існує хоча б один розв'язок* $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$ *задачі (1)-(4), який належить до класу* $C^1(0,T_0] \cap C[0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, *де* $T_0,\ 0 < T_0 \leqslant T$ *визначається через вихідні дані.*

Доведення. Зрозуміло, що відмінністю між доведенням теорем 1 і 2 є оцінка виразів $\varphi'(\sigma)(w(\sigma,\sigma)-w(0,\sigma))$, $\varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)w(y,\sigma)$ і $\varphi'(\sigma)(c(yh(\sigma),\sigma)v(y,\sigma)+f(yh(\sigma),\sigma))$ з формул (24), (22). Оскільки виконується умова **(A4)**, то останні два вирази обмежені й особливостей не мають.

Використовуючи (22), отримаємо

$$w(\sigma,\sigma)-w(0,\sigma)=\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau (G_y(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_y(0,\sigma,\eta,\tau))\Big(\Big(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)}+$$

$$+\frac{\varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\Big)w(\eta,\tau)+\varphi'(\tau)\Big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+f(\eta h(\tau),\tau)\Big)-\nu_1'(\tau)-$$

$$-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Big)d\eta,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}.$$

Щоб знайти поведінку $\varphi'(\sigma)(w(\sigma,\sigma)-w(0,\sigma))$ при $\sigma\to 0$, достатньо оцінити вираз

$$\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau |G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)|d\eta,$$

де

$$G_0^{(i)}(y,\sigma,\eta,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\exp\Big(-\frac{(y-\eta+2n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)+$$

$$+(-1)^i\exp\Big(-\frac{(y+\eta+2n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)\Big),\quad i=1,2.$$

Оскільки $G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)\leqslant 0$ і $G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)\geqslant 0$, а $G_{0y}^{(1)}(y,\sigma,\eta,\tau)=-G_{0\eta}^{(2)}(y,\sigma,\eta,\tau)$, то

$$\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau |G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)|d\eta=\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau (G_{0\eta}^{(2)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_{0\eta}^{(2)}(0,\sigma,\eta,\tau))d\eta=$$

$$=\int\limits_0^\sigma (G_0^{(2)}(\sigma,\sigma,\tau,\tau)-G_0^{(2)}(0,\sigma,\tau,\tau)-G_0^{(2)}(\sigma,\sigma,0,\tau)+G_0^{(2)}(0,\sigma,0,\tau))d\tau=$$

$$=\int\limits_0^\sigma \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\Big(\exp\Big(-\frac{(n\sigma-\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)+$$

$$+\exp\Big(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)-2\exp\Big(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)\Big)d\tau.$$

Зробивши заміну в першому доданку $n=-m$ і перепозначивши m на n, отримаємо

$$\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau |G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)|d\eta=$$

$$=\int\limits_0^\sigma \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\Big(\exp\Big(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)-\exp\Big(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)\Big)d\tau.$$

Враховуючи те, що

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\Big(\exp\Big(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)-\exp\Big(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\exp\Big(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)+\exp\Big(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant 2+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(2\exp\Big(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)+\exp\Big(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)+\exp\Big(-\frac{(n\sigma-\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)\Big),$$

з [8] одержимо оцінку

$$\int_0^{\sigma}d\tau\int_0^{\tau}|G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)|d\eta\leqslant C_{30}\int_0^{\sigma}\frac{d\tau}{\sqrt{\pi(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}+C_{31}\sigma.$$

Оскільки ψ' – монотонно зростаюча функція і $\omega\leqslant t$, то

$$\lim_{\sigma\to 0}\varphi'(\sigma)\int_0^{\sigma}\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}\leqslant C_{32}\lim_{t\to 0}\frac{1}{\psi'(t)}\int_0^{t}\frac{\psi'(\omega)d\omega}{\sqrt{t-\omega}}\leqslant C_{32}\lim_{t\to 0}\int_0^{t}\frac{d\omega}{\sqrt{t-\omega}}=0.$$

Враховуючи те, що

$$\lim_{\sigma\to 0}\varphi'(\sigma)\sigma=\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{\psi'(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)t}{\psi(t)-\psi(0)}=0,$$

отримаємо

$$|\varphi'(\sigma)(w(\sigma,\sigma)-w(0,\sigma))|\leqslant C_{33}.$$

Враховуючи це в (24) і (33), далі доводимо цю теорему аналогічно до доведення теореми 1. Зауважимо, що оцінки (42) також правильні у випадку, коли φ' – монотонно спадна функція, оскільки оцінку (37) можна продовжити, використовуючи те, що $s\leqslant\sigma$. □

5. Єдиність розв'язку задачі (1)-(4) (випадок (I)).

Теорема 3. *Нехай виконується припущення **(I)**, $\int_0^t\frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{s}}\to 0, t\to 0$ й умова:*

(A5) $\tilde b,\tilde c,\tilde f\in C^{1,0}([0,+\infty)\times[0,T])$, $\psi\in C^1(0,T]$, $\mu_i\in C^1[0,T]$, $i=1,2$; $\mu_i(t)\neq 0$, $i=2,3$, $\mu_4(t)=\mu_0(t)\psi(t)$, $\mu_0(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$, $\psi(0)=0$, $\psi(t)>0$, $t\in(0,T]$, $\psi'(t)\geqslant 0$, $t\in[0,T]$.

Тоді задача (1)-(4) не може мати більше одного розв'язку $(\tilde h(t),\tilde a(t),u(x,t))$, *який належить до класу* $C^1(0,T]\cap C[0,T]\times C[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Оскільки задача (1)-(4) еквівалентна задачі (5)-(8), то достатньо довести єдиність розв'язку задачі (5)-(8). Нехай існують два різних розв'язки $(h_i(\sigma),a_i(\sigma),v_i(y,\sigma))$, $i=1,2$ задачі (5)-(8). Позначимо $h(\sigma)\equiv h_1(\sigma)-h_2(\sigma)$, $a(\sigma)\equiv a_1(\sigma)-a_2(\sigma)$, $v(y,\sigma)\equiv v_1(y,\sigma)-v_2(y,\sigma)$.

Розглянемо

$$b(yh_1(\sigma),\sigma)-b(yh_2(\sigma),\sigma)=\int\limits_0^1\frac{d}{ds}b(yh_2(\sigma)+sy(h_1(\sigma)-h_2(\sigma)),\sigma)ds=$$

$$=y(h_1(\sigma)-h_2(\sigma))\int\limits_0^1\frac{\partial b(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+sy(h_1(\sigma)-h_2(\sigma))}ds.$$

Аналогічно можна подати різниці $c(yh_1(\sigma),\sigma)-c(yh_2(\sigma),\sigma)$ і $f(yh_1(\sigma),\sigma)-f(yh_2(\sigma),\sigma)$. Тоді з (5)-(8) одержуємо таку задачу стосовно $(h(\sigma),a(\sigma),v(y,\sigma))$

$$v_\sigma=\frac{\varphi'(\sigma)a_1(\sigma)}{h_1^2(\sigma)}v_{yy}+\Big(\frac{yh_1'(\sigma)}{h_1(\sigma)}+\frac{\varphi'(\sigma)b(yh_1(\sigma),\sigma)}{h_1(\sigma)}\Big)v_y+\varphi'(\sigma)c(yh_1(\sigma),\sigma)v+$$

$$+\frac{\varphi'(\sigma)(a(\sigma)h_2^2(\sigma)-a_2(\sigma)h(\sigma)(h_1(\sigma)+h_2(\sigma)))}{h_1^2(\sigma)h_2^2(\sigma)}v_{2yy}+\Big(\frac{y(h'(\sigma)h_2(\sigma)-h_2'(\sigma)h(\sigma))}{h_1(\sigma)h_2(\sigma)}+$$

$$+\frac{\varphi'(\sigma)h(\sigma)}{h_1(\sigma)h_2(\sigma)}\Big(yh_2(\sigma)\int\limits_0^1\frac{\partial b(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds-b(yh_2(\sigma),\sigma)\Big)\Big)v_{2y}+$$

$$+yh(\sigma)\varphi'(\sigma)\Big(v_2\int\limits_0^1\frac{\partial c(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds+\int\limits_0^1\frac{\partial f(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds\Big),$$

$$(y,\sigma)\in Q_{T_1}, \tag{44}$$

$$v(0,\sigma)=v(\sigma,\sigma)=0,\quad 0\leqslant\sigma\leqslant T_1, \tag{45}$$

$$a_1(\sigma)v_y(0,\sigma)=\nu_3(\sigma)h(\sigma)-a(\sigma)v_{2y}(0,\sigma),\quad 0\leqslant\sigma\leqslant T_1, \tag{46}$$

$$h_1(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy=-h(\sigma)\int\limits_0^\sigma v_2(y,\sigma)dy,\quad 0\leqslant\sigma\leqslant T_1. \tag{47}$$

Використовуючи функцію Гріна $G^*(y,\sigma,\eta,\tau)$ для рівняння

$$v_\sigma=\frac{\varphi'(\sigma)a_1(\sigma)}{h_1^2(\sigma)}v_{yy}+\Big(\frac{yh_1'(\sigma)}{h_1(\sigma)}+\frac{\varphi'(\sigma)b(yh_1(\sigma),\sigma)}{h_1(\sigma)}\Big)v_y,\quad (y,\sigma)\in Q_{T_1},$$

з умовами (44), зведемо задачу (44)-(47) до такої системи рівнянь:

$$v(y,\sigma)=\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau G^*(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\varphi'(\tau)c(\eta h_1(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+$$

$$+\frac{\varphi'(\tau)(a(\tau)h_2^2(\tau)-a_2(\tau)h(\tau)(h_1(\tau)+h_2(\tau)))}{h_1^2(\tau)h_2^2(\tau)}v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+\Big(\frac{\eta(h'(\tau)h_2(\tau)-h_2'(\tau)h(\tau))}{h_1(\tau)h_2(\tau)}+$$

$$+\frac{\varphi'(\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}\Big(\eta h(\tau)h_2(\tau)\int\limits_0^1\frac{\partial b(z,\tau)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\tau)+syh(\tau)}ds-b(\eta h_2(\tau),\tau)h(\tau)\Big)\Big)v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$

$$+\varphi'(\tau)\Big(h(\tau)\eta v_2(\eta,\tau)\int\limits_0^1 \frac{\partial c(z,\tau)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\tau)+syh(\tau)}ds+$$

$$+\eta h(\tau)\int\limits_0^1 \frac{\partial f(z,\tau)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\tau)+syh(\tau)}ds\Big)\Big)d\eta, \quad (y,\sigma)\in Q_{T_1}, \tag{48}$$

$$h(\sigma) = -\frac{h_1(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\int\limits_0^\sigma v_2(y,\sigma)dy}, \quad \sigma\in[0,T_1], \tag{49}$$

$$a(\sigma) = \frac{\nu_3(\sigma)h(\sigma) - a_1(\sigma)v_y(0,\sigma)}{v_{2y}(0,\sigma)}, \quad \sigma\in[0,T_1]. \tag{50}$$

Оскільки задача (5)-(8) еквівалентна задачі (20)-(24), то $p_i(\sigma) \equiv \sigma h_i'(\sigma)$, $i = 1,2$ задовольняють (24). Звідси одержимо

$$p(\sigma) = \frac{1}{\nu_2(\sigma)}\Big(-h(\sigma)\nu_2(\sigma) - \varphi'(\sigma)\Big(\frac{a_1(\sigma)}{h_1(\sigma)}(v_y(\sigma,\sigma)-v_y(0,\sigma)) + \int\limits_0^\sigma\Big(b(yh_1(\sigma),\sigma)v_y(y,\sigma)+$$

$$+h_1(\sigma)c(yh_1(\sigma),\sigma)v(y,\sigma)\Big)dy + \frac{a(\sigma)h_2(\sigma)-a_2(\sigma)h(\sigma)}{h_1(\sigma)h_2(\sigma)}(v_{2y}(\sigma,\sigma)-v_{2y}(0,\sigma))+$$

$$+\int\limits_0^\sigma\Big(yh(\sigma)v_{2y}(y,\sigma)\int\limits_0^1 \frac{\partial b(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds+$$

$$+(h_1(\sigma)yh(\sigma)\int\limits_0^1 \frac{\partial c(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds + h(\sigma)c(yh_2(\sigma),\sigma))v_2(y,\sigma)+$$

$$+yh(\sigma)\int\limits_0^1 \frac{\partial f(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds\Big)dy\Big)\Big), \quad \sigma\in(0,T_1], \tag{51}$$

де $p(\sigma) = \sigma h'(\sigma)$.

Доведемо інтегровність ядер системи (48)-(51). З умови **(A5)** та з того, що $v_2(y,\sigma)$ задовольняє (7), випливає, що знаменники (50), (51) відмінні від нуля. Оскільки $v_2(y,\sigma)$ також задовольняє (8), то з (49) та умови **(A5)** за теоремою про середнє отримаємо

$$h(\sigma) = -\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\nu_4(\sigma)} = -\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\sigma\nu_0(\sigma)} = -\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\sigma v(\tilde{y},\sigma)}{\sigma\nu_0(\sigma)} =$$

$$= -\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)v(\tilde{y},\sigma)}{\nu_0(\sigma)}, \quad \tilde{y}\in[0,\sigma], \quad \sigma\in[0,T_1],$$

де $\nu_0(\sigma) = \mu_0(\varphi(\sigma))$. Підставляючи сюди значення v з (48), бачимо, що ядро в (49) неперервне.

Дослідимо поведінку $v_{2yy}(y,\sigma)$ при $\sigma \to 0$. Зробимо заміну $v_2(y,\sigma) = \tilde{v}_2(y,\sigma) + \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))$. Тоді з (5)-(8) отримаємо задачу стосовно функції $\tilde{v}_2(y,\sigma)$

$$\tilde{v}_{2\sigma} = \frac{\varphi'(\sigma)a_2(\sigma)}{h_2^2(\sigma)}\tilde{v}_{2yy} + \Big(\frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)} + \frac{\varphi'(\sigma)b(yh_2(\sigma),\sigma)}{h_2(\sigma)}\Big)\tilde{v}_{2y} + \varphi'(\sigma)\Big(c(yh_2(\sigma),\sigma)\tilde{v}_2 + f(yh_2(\sigma),\sigma)\Big) - \nu_1'(\sigma) - \frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)) + \frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \Big(\frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)} + \frac{\varphi'(\sigma)b(yh_2(\sigma),\sigma)}{h_2(\sigma)}\Big)\frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} + \varphi'(\sigma)c(yh_2(\sigma),\sigma)\Big(\nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))\Big),$$

$$(y,\sigma) \in Q_{T_1}, \tag{52}$$

$$\tilde{v}_2(0,\sigma) = \tilde{v}_2(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{53}$$

Використовуючи функцію Гріна $G^{**}(y,\sigma,\eta,\tau)$ для рівняння

$$\tilde{v}_{2\sigma} = \frac{\varphi'(\sigma)a_2(\sigma)}{h_2^2(\sigma)}\tilde{v}_{2yy} + \Big(\frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)} + \frac{\varphi'(\sigma)b(yh_2(\sigma),\sigma)}{h_2(\sigma)}\Big)\tilde{v}_{2y} + \varphi'(\sigma)c(yh_2(\sigma),\sigma)\tilde{v}_2,$$

з умовами (53), знаходимо розв'язок задачі (52), (53)

$$v_2(y,\sigma) = \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G^{**}(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\varphi'(\tau)f(\eta h_2(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) + \Big(\frac{\eta h_2'(\tau)}{h_2(\tau)} + \frac{\varphi'(\tau)b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2(\tau)}\Big)\frac{\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)}{\tau} + \varphi'(\tau)c(\eta h_2(\tau),\tau)\Big(\nu_1(\tau) + \frac{\eta}{\tau}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\Big)\Big)d\eta, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{54}$$

Продиференціюємо вираз (54) двічі по y

$$v_{2yy}(y,\sigma) = \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G_{yy}^{**}(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\varphi'(\tau)f(\eta h_2(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) + \Big(\frac{\eta h_2'(\tau)}{h_2(\tau)} + \frac{\varphi'(\tau)b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2(\tau)}\Big)\frac{\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)}{\tau} + \varphi'(\tau)c(\eta h_2(\tau),\tau)\Big(\nu_1(\tau) + \frac{\eta}{\tau}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\Big)\Big)d\eta, \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1}. \tag{55}$$

Оскільки $\nu_i'(\sigma) = \mu_i'(\varphi(\sigma))\varphi'(\sigma)$, $i = 1,2$, $\eta = \eta^\gamma \eta^{1-\gamma}$, де $\gamma \in (0,1)$ і $\eta \leqslant \tau$, то з [7] одержимо

$$\Big|\int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G_{yy}^{**}(y,\sigma,\eta,\tau)\frac{\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)}{\tau}\eta d\eta\Big| \leqslant C_{34}\int_0^\sigma \frac{\varphi'(\tau)\tau^{1-\gamma}}{\tau}d\tau \int_0^\tau |G_{yy}^{**}(y,\sigma,\eta,\tau)|d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C_{35}\int_0^\sigma \frac{\varphi'(\tau)d\tau}{\tau^\gamma(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\gamma/2}}, \tag{56}$$

де $\theta_2(\sigma) = \int\limits_0^\sigma \dfrac{a_2(\tau)\varphi'(\tau)}{h_2^2(\tau)}d\tau$. Решту доданків в (55) оцінюємо аналогічно, використовуючи умову **(A5)**. Зрозуміло, що $C_{36}\varphi(\sigma) \leqslant \theta_2(\sigma) \leqslant C_{37}\varphi(\sigma)$, тому $\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau) \geqslant$ $\geqslant C_{38}(\varphi(\sigma) - \varphi(\tau))$. Тоді з (55) і (56) отримаємо

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant C_{39} \int\limits_0^\sigma \frac{\varphi'(\tau)d\tau}{\tau^\gamma(\varphi(\sigma) - \varphi(\tau))^{1-\gamma/2}}.$$

Оскільки $\varphi(\sigma) - \varphi(\tau) = \int_\tau^\sigma \varphi'(s)ds$ і φ' – монотонно зростаюча функція, $s \geqslant \tau$, $\tau \leqslant \sigma$, то

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant C_{39} \int\limits_0^\sigma \frac{\varphi'(\tau)d\tau}{\tau^\gamma\Big(\int\limits_\tau^\sigma \varphi'(s)ds\Big)^{1-\gamma/2}} \leqslant C_{39} \int\limits_0^\sigma \frac{\varphi'(\tau)d\tau}{\tau^\gamma\varphi'(\tau)^{1-\gamma/2}(\sigma-\tau)^{1-\gamma/2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{39}\varphi'(\sigma)^{\gamma/2} \int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\gamma(\sigma-\tau)^{1-\gamma/2}}. \tag{57}$$

Після заміни $z = \dfrac{\tau}{\sigma}$ в (57) отримаємо

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant \frac{C_{39}\varphi'(\sigma)^{\gamma/2}}{\sigma^{\gamma/2}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{z^\gamma(1-z)^{1-\gamma/2}} = \frac{C_{40}}{\sigma^{\gamma/2}}.$$

Оскільки $\gamma \in (0,1)$, то ця особливість є інтегровною і за властивостями інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду система рівнянь (48)-(51) має тільки тривіальний розв'язок $v(y,\sigma) \equiv 0,\ h(\sigma) \equiv 0,\ a(\sigma) \equiv 0,\ p(\sigma) \equiv 0,\ y \in [0,\sigma],\ \sigma \in [0,T_1]$. Тому розв'язок задачі (5)-(8), а отже, і задачі (1)-(4) – єдиний. □

Теорема 4. *Нехай виконуються умови **(II)**, **(A5)** й існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mu_2'(t) - \mu_1'(t)}{\psi'(t)}$. *Тоді задача (1)-(4) не може мати більше одного розв'язку* $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$, *який належить до класу* $C^1(0,T] \cap C[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Зрозуміло, що відмінністю між доведенням теорем 3 і 4 є дослідження поведінки $\varphi'(\sigma)v_{2yy}(y,\sigma)$ при $\sigma \to 0$. Як і в теоремі 3, отримаємо

$$\Big|\int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G_{yy}^{**}(y,\sigma,\eta,\tau)\frac{\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)}{\tau}\eta d\eta\Big| \leqslant C_{41} \int\limits_0^\sigma \frac{\tau^{-\gamma}d\tau}{(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\gamma/2}}, \tag{58}$$

бо з того, що існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\mu_2'(t)-\mu_1'(t)}{\psi'(t)}$ випливає, що $\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma) = (\mu_2'(\varphi(\sigma)) - \mu_1'(\varphi(\sigma)))\varphi'(\sigma) \leqslant C_{42}$.

Тоді з (55) і (58) одержимо

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant C_{43} \int\limits_0^\sigma \frac{\tau^{-\gamma}d\tau}{(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\gamma/2}} \leqslant C_{44} \int\limits_0^\sigma \frac{\tau^{-\gamma}d\tau}{(\varphi(\sigma) - \varphi(\tau))^{1-\gamma/2}}.$$

Оскільки φ' – монотонно спадна функція, а $s \leqslant \sigma$, то

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant C_{44}\int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\gamma\Big(\int\limits_\tau^\sigma \varphi'(s)ds\Big)^{1-\gamma/2}} \leqslant \frac{C_{44}}{\varphi'(\sigma)^{1-\gamma/2}}\int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\gamma(\sigma-\tau)^{1-\gamma/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{45}}{\varphi'(\sigma)^{1-\gamma/2}\sigma^{\gamma/2}}. \tag{59}$$

Отже,

$$\varphi'(\sigma)|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant \frac{C_{45}\varphi'(\sigma)^{\gamma/2}}{\sigma^{\gamma/2}}.$$

Враховуючи те, що $\varphi(\sigma) = \int\limits_0^\sigma \varphi'(\tau)d\tau \geqslant \varphi'(\sigma)\int\limits_0^\sigma d\tau = \sigma\varphi'(\sigma)$, отримуємо $\varphi'(\sigma) \leqslant \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}$. Зважаючи на те, що функція φ – монотонно зростаюча, а $\tau \leqslant \sigma$, то звідси одержимо

$$\int\limits_0^\sigma \frac{\varphi'(\tau)^{\gamma/2}}{\tau^{\gamma/2}}d\tau \leqslant \int\limits_0^\sigma \frac{\varphi(\tau)^{\gamma/2}d\tau}{\tau^\gamma} \leqslant \varphi(\sigma)^{\gamma/2}\int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\gamma} = \frac{\sigma^{1-\gamma}\varphi(\sigma)^{\gamma/2}}{1-\gamma}.$$

Оскільки $\gamma \in (0,1)$, то і в цьому випадку за властивостями інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду система рівнянь (48)-(51) має тільки тривіальний розв'язок $v(y,\sigma) \equiv 0,\ h(\sigma) \equiv 0,\ a(\sigma) \equiv 0,\ p(\sigma) \equiv 0,\ y \in [0,\sigma],\ \sigma \in [0,T_1]$. Тому розв'язок задачі (5)-(8), а отже, і задачі (1)-(4) єдиний. $\square$

Список використаної літератури

1. *Баранська І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами / *Баранська І., Іванчов М.* // Укр. мат. вісник. – 2007. – Т. 4, №4. – С. 457-484.
2. *Гринців Н.М.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею / *Гринців Н.М.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. -– 2006. — Вип. 66. — С. 45-59.
3. *Іванчов М.І.* Задача теплопровідності з вільною межею, яка вироджується у початковий момент часу / *Іванчов М.І.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №3. – С. 82-87.
4. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* – М., 1967.
5. *Салдіна Н.В.* Обернена задача для параболічного рівняння зі слабким виродженням / *Салдіна Н.В.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, №3. – С. 7-17.
6. *Снітко Г.А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / *Снітко Г.А.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №4. – С. 7-18.
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа / *Фридман А.* – М., 1968.
8. *Ivanchov M.* Inverse problem for equation of parabolic type / *Ivanchov M.* – L., 2003.
9. *Jones B.F.* The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I. Existence and uniqueness / *Jones B.F.* // J. Math. Mech. – 1962. – Vol. 11, №5. – P. 907-918.

Стаття: надійшла до редакції 28.12.2010
прийнята до друку 21.09.2011

AN INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION IN THE DOMAIN WITH A WEAKLY DEGENERATE BOUNDARY

Tetiana SAVITSKA

Ivan Franro National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: tetjankas@mail.ru

We establishe conditions of existence and uniqueness of the solution of an inverse problem for a parabolic equation with unknown time-dependent coefficient at the highest derivative. It is assumed that the boundary of the domain is unknown and degenerates at the initial moment. The given problem is reduced to an inverse problem for a degenerate parabolic equation.

Key words: inverse problem, parabolic equation, weak degeneration, degenerate boundary.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ СО СЛАБО ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

Татьяна САВИЦКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: tetjankas@mail.ru

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при старшей производной, зависящим от времени. Предполагается, что граница области неизвестна и вырождается в начальный момент времени. Указанная задача сводится к обратной задаче для параболического уравнения с вырождением.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, слабое вырождение, вырождающаяся граница области.