ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 11–25*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 11–25

УДК 519.21

СТАЦІОНАРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ ТА $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$ З ПОРОГОВИМ БЛОКУВАННЯМ ВХІДНОГО ПОТОКУ

Микола БРАТІЙЧУК[1], Юрій ЖЕРНОВИЙ[2]

[1]*Шльонський політехнічний університет,*
вул. Кашубська, 23, Глівіце, 44-100
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Розглянуто систему обслуговування типу $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ з груповим надходженням замовлень і пороговим блокуванням вхідного потоку. Блокування потоку замовлень відбувається, якщо в момент початку обслуговування чергового замовлення кількість замовлень у системі перевищує заданий пороговий рівень h. Визначено середню тривалість частин періоду зайнятості з відсутністю та наявністю блокування вхідного потоку, ймовірність обслуговування замовлень і стаціонарні характеристики черги. Доведено монотонність залежностей середньої тривалості періоду зайнятості та ймовірності обслуговування від параметрів m і h.

Ключові слова: системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ і $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$, блокування вхідного потоку, період зайнятості, стаціонарні характеристики.

1. Вступ. У статті [1] досліджено систему обслуговування $\mathrm{M}_h^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, яка є системою з груповим надходженням замовлень і пороговим блокуванням вхідного потоку. Коротко опишемо цю систему.

Якщо в момент t початку обслуговування чергового замовлення виконується умова $\xi(t) > h$, де $\xi(t)$ – кількість замовлень у системі, то відбувається блокування вхідного потоку замовлень, яке триває до моменту t початку обслуговування того замовлення, для якого $\xi(t) \le h$. Тут h $(1 \le h \le m-1)$ – заданий пороговий рівень блокування, m – максимальна кількість замовлень, які можуть одночасно перебувати у черзі. Для такої системи в [1] визначено, зокрема, середню тривалість періоду зайнятості й отримано формули для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі.

Мета нашої праці – продовжити дослідження, розпочаті у статті [1]. Ми ставимо завдання визначити середню тривалість тих частин періоду зайнятості, коли немає блокування вхідного потоку, коли вхідний потік заблокований, та стаціонарних імовірностей відповідних станів системи. Це дасть змогу обчислити ймовірність обслуговування замовлень у системі. Визначимо також стаціонарні характеристики черги (середню довжину черги, середній час очікування) і вивчимо поведінку деяких стаціонарних характеристик як функцій параметрів m і h. Як виявили дослідження (див., зокрема, [2-4]), з'ясування характеру монотонної залежності характеристик систем обслуговування від вхідних параметрів відкриває шлях до розв'язання задач оптимального синтезу систем з заданими характеристиками.

2. Період зайнятості: частини з відсутністю та наявністю блокування. Будемо дотримуватись всіх позначень, введених у статті [1], і додатково використовуватимемо символ "хвилька" над величинами, які описують ту частину періоду зайнятості системи, коли вхідний потік заблокований. Це дасть змогу визначити частини періоду зайнятості з відсутністю та наявністю блокування вхідного потоку замовлень.

Повторюючи міркування, викладені у п. 3 статті [1], для умовної ймовірності

$$\varphi_n(t,\, k) = \mathbf{P}_n\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\} \quad (\,1 \le n,\, k \le m+1\,)$$

наявності у системі k замовлень під час періоду зайнятості $\tau(m) = \inf\{\, t \ge 0 : \xi(t) = 0\,\}$ для випадку $h+1 \le n \le m$ отримаємо співвідношення

$$\varphi_n(t,\, k) = \int\limits_0^t \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n-h} \widetilde{\beta}_i \in dx\Big\}\varphi_h(t-x,\, k) +$$

$$+ I\{h+1 \le k \le n\} \int\limits_0^t \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n-k} \widetilde{\beta}_i \in dx\Big\}\,\overline{\widetilde{F}}(t-x).$$

Тут $\widetilde{\beta}_i = \beta_i$ – час обслуговування i–го замовлення, $\widetilde{F}(x) = F(x) = \mathbf{P}\{\beta_i < x\}$ $(\,x \geqslant 0\,)$, $F(0) = 0$, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.

Відповідні рівняння для функцій

$$\Phi_n(s,\, k) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\varphi_n(t,\, k)\, dt, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

для $h+1 \le n \le m$ набудуть вигляду

$$\Phi_n(s,\, k) = \widetilde{f}^{\,n-h}(s)\Phi_h(s,\, k) + I\{h+1 \le k \le n\}\widetilde{f}^{\,n-k}(s)\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}, \tag{1}$$

де

$$\widetilde{f}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} d\widetilde{F}(x) = f(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dF(x).$$

Рівняння (5) і (7) для $\varphi_n(t,\, k)$ і $\Phi_n(s,\, k)$ $(1 \le n \le h)$ статті [1] залишаються незмінними.

Виразивши з (1) всі $\Phi_n(s,\,k)$ для $h+1 \le n \le m$ і підставивши їх у співвідношення для $\Phi_n(s,\,k)$ $(1 \le n \le h)$, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned}\Phi_n(s,\,k) - f(s)\sum_{j=-1}^{h-n-1} p_j(s)\Phi_{n+j}(s,\,k) &= \\ &= f(s)L_n(s)\Phi_h(s,\,k) + M_n(s,\,k), \quad 1 \le n \le h.\end{aligned} \tag{2}$$

Тут

$$L_n(s) = \widetilde{f}^{m-h}(s)\overline{p}_{m-n}(s) + \sum_{j=h}^{m-1} p_{j-n}(s)\widetilde{f}^{j-h}(s);$$

$$M_n(s,\,k) = q_{k-n}(s) + I\{k = m+1\}\overline{q}_{m+2-n}(s) + \Bigg(I\{h+1 \le k \le m\}\overline{p}_{m-n}(s)\widetilde{f}^{m-k}(s) +$$
$$+ \sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n}(s)\widetilde{f}^{j-k}(s)I\{h+1 \le k \le j\}\Bigg)f(s)\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}.$$

Шукаючи розв'язки системи рівнянь (2) з граничною умовою $\Phi_0(s,\,k) = 0$ так, як у статті [1], одержимо

$$\Phi_n(s,\,k) = D_n(s)\Phi_h(s,\,k) - \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)M_{n+i}(s,\,k), \quad 1 \le n \le h. \tag{3}$$

Тут

$$\begin{aligned}D_n(s) &= R_{h-n}(s) - f(s)\sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)L_{n+i}(s), \quad n \ge 0;\\ \Phi_h(s,\,k) &= \frac{1}{D_0(s)}\sum_{i=1}^{h} R_i(s)M_i(s,\,k).\end{aligned} \tag{4}$$

Враховуючи, що

$$M_n(s) = \sum_{k=1}^{m+1} M_n(s,\,k) = \frac{1-f(s)}{s} + f(s)\Bigg(\frac{1-\widetilde{f}^{m-h}(s)}{s}\,\overline{p}_{m-n}(s) +$$
$$+ \sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n}(s)\frac{1-\widetilde{f}^{j-h}(s)}{s}\Bigg); \qquad \lim_{s\to+0}\frac{1-\widetilde{f}^{n}(s)}{s} = n\widetilde{m}_1,$$

де

$$\widetilde{m}_1 = \int_0^\infty x\,d\widetilde{F}(x) = m_1 = \int_0^\infty x\,dF(x),$$

використовуючи співвідношення (3), (4) і повторюючи міркування, викладені у п. 4 статті [1], отримаємо формули для середньої тривалості періоду зайнятості

$$\mathbf{M}\,\tau(m) = \sum_{i=1}^{h} R_i\Bigg(m_1 + \widetilde{m}_1\Bigg((m-h)\overline{p}_{m-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1}(j-h)p_{j-i}\Bigg)\Bigg) -$$

$$-\sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \Big(m_1 + \widetilde{m}_1 \Big((m-h)\overline{p}_{m-n-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1} (j-h) p_{j-n-i} \Big)\Big) + \\ + \widetilde{m}_1 \Big(\sum_{n=h+1}^{m} (n-h) a_n + (m+1-h)\overline{a}_{m+1} \Big) \tag{5}$$

і для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі

$$\rho_0(m) = \frac{1}{1+\lambda \mathbf{M}\, \tau(m)}\,;$$

$$\rho_k(m) = \frac{\lambda}{1+\lambda \mathbf{M}\, \tau(m)} \left(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i} \right) \qquad (\, k=\overline{1,\, h}\,);$$

$$\rho_k(m) = \frac{\lambda}{1+\lambda \mathbf{M}\, \tau(m)} \left(\sum_{i=1}^{h} R_i \big(q_{k-i} + \widetilde{m}_1 \overline{p}_{k-i} \big) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \big(q_{k-n-i} + \widetilde{m}_1 \overline{p}_{k-n-i} \big) + \widetilde{m}_1 \overline{a}_k \right) \qquad (\, k=\overline{h+1,\, m}\,); \tag{6}$$

$$\rho_{m+1}(m) = \frac{\lambda}{1+\lambda \mathbf{M}\, \tau(m)} \left(\sum_{i=1}^{h} R_i \overline{q}_{m+1-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \overline{q}_{m+1-n-i} + \widetilde{m}_1 \overline{a}_{m+1} \right).$$

Зрозуміло, що ті доданки у правих частинах співвідношень (5) і (6), які містять співмножник $\widetilde{m}_1$, відповідають періоду блокування вхідного потоку, але лише тій його частині, яка починалась від моменту t початку обслуговування чергового замовлення, для якого виконувалась умова $\xi(t) > h$. Щоб отримати з (5) формулу для середньої тривалості тої частини періоду зайнятості, коли відбувається блокування вхідного потоку (позначимо її через $\tau_{\mathrm{b}}(m)$), треба до зазначеної суми додати вираз

$$\mathbf{M}\, \widetilde{\tau}_{m+1}(m) = \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{q}_{m+1-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \overline{q}_{m+1-n-i}, \tag{7}$$

який входить у чисельник формули для ймовірності $\rho_{m+1}(m)$ і відтворює середню тривалість тієї частини періоду зайнятості, коли вхідний потік заблоковано через перевищення кількості замовлень у системі числа m, і відбувається дообслуговування замовлення, в момент t початку обслуговування якого виконувалась умова $\xi(t) \le h$. Водночас вираз (7) треба відняти від суми тих доданків правої частини формули (5), які не містять співмножника $\widetilde{m}_1$, щоб отримати середню тривалість тої частини періоду зайнятості, коли немає блокування вхідного потоку (позначимо її через $\tau_{\mathrm{nb}}(m)$).

Позначимо через $\rho_{k(\mathrm{b})}(m)$ і $\rho_{k(\mathrm{nb})}(m)$ ті частини ергодичного розподілу кількості замовлень у системі, які відповідають станам системи, коли вхідний потік заблокований і, відповідно, незаблокований. З наведеного та очевидної рівності

$$\sum_{i=1}^{h} R_i - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i = \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}$$

одержимо таке твердження.

Теорема 1. *Середні значення випадкових величин $\tau_{nb}(m)$, $\tau_b(m)$, відповідні частини ергодичного розподілу кількості замовлень у системі $M_h^\theta/G/1/m$ та ймовірність обслуговування замовлень $\mathbf{P}_{sv}(m)$ визначають за формулами:*

$$\mathbf{M}\,\tau_{nb}(m) = m_1 \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i} - \mathbf{M}\,\widetilde{\tau}_{m+1}(m); \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\,\tau_b(m) = m_1 \Bigg(&\sum_{i=1}^{h} R_i \Big((m-h)\overline{p}_{m-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1} (j-h) p_{j-i} \Big) - \\ &- \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \Big((m-h)\overline{p}_{m-n-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1} (j-h) p_{j-n-i} \Big) + \\ &+ \sum_{n=h+1}^{m} (n-h) a_n + (m+1-h)\overline{a}_{m+1} \Bigg) + \mathbf{M}\,\widetilde{\tau}_{m+1}(m);\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\rho_{0(nb)}(m) = \rho_0(m); \qquad \rho_{k(nb)}(m) = \rho_k(m) \quad (k = \overline{1,\, h}); \qquad \rho_{m+1(nb)}(m) = 0; \\ &\rho_{k(nb)}(m) = \frac{\lambda}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(m)} \left(\sum_{i=1}^{h} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i q_{k-n-i} \right) \ (k = \overline{h+1,\, m});\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\rho_{k(b)}(m) = 0 \quad (k = \overline{0,\, h}); \qquad \rho_{m+1(b)}(m) = \rho_{m+1}(m); \\ &\rho_{k(b)}(m) = \frac{\lambda m_1}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(m)} \left(\sum_{i=1}^{h} R_i \overline{p}_{k-i} - \right. \\ &\qquad \left. - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \overline{p}_{k-n-i} + \overline{a}_k \right) \quad (k = \overline{h+1,\, m});\end{aligned} \tag{11}$$

$$\mathbf{P}_{sv}(m) = \frac{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau_{nb}(m)}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(m)} \quad (a_1 = 1; \quad a_n = 0, \quad n \geq 2). \tag{12}$$

Розглянемо систему $\mathrm{M}_h^\theta/\mathrm{G}/1$, для якої немає умови обмеженості довжини черги ($m = \infty$). Прийнявши $m \to \infty$ у співвідношеннях (8)–(12), одержимо таке твердження.

Теорема 2. *Середні значення випадкових величин $\tau_{nb}(\infty)$, $\tau_b(\infty)$, відповідні частини ергодичного розподілу кількості замовлень у системі $M_h^\theta/G/1$ та ймовірність обслуговування замовлень $\mathbf{P}_{sv}(\infty)$ визначають за формулами*

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}\,\tau_{nb}(\infty) = m_1 \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}; \qquad \mathbf{M}\,\tau_b(\infty) = m_1 \Bigg(\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=h+1}^{\infty} (j-h) p_{j-i} - \\ &\qquad - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=h+1}^{\infty} (j-h) p_{j-n-i} + \sum_{n=h+1}^{\infty} (n-h) a_n \Bigg);\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}\,\tau(\infty)=\mathbf{M}\,\tau_{nb}(\infty)+\mathbf{M}\,\tau_b(\infty); \qquad \rho_{0(nb)}(\infty)=\frac{1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)};$$

$$\rho_{k(nb)}(\infty)=\frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\left(\sum_{i=1}^{k}R_iq_{k-i}-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{k-n}R_iq_{k-n-i}\right)\quad (\,k=\overline{1,\,h}\,);$$

$$\rho_{k(nb)}(\infty)=\frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\left(\sum_{i=1}^{h}R_iq_{k-i}-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_iq_{k-n-i}\right)\quad (\,k\geq h+1\,);$$

$$\rho_{k(b)}(\infty)=0 \qquad (\,k=\overline{0,\,h}\,);$$

$$\rho_{k(b)}(\infty)=\frac{\lambda m_1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\left(\sum_{i=1}^{h}R_i\overline{p}_{k-i}-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\overline{p}_{k-n-i}+\overline{a}_k\right)\quad (\,k\geq h+1\,);$$

$$\mathbf{P}_{sv}(\infty)=\frac{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau_{nb}(\infty)}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}. \tag{13}$$

3. Дослідження залежностей $\mathbf{M}\,\tau(\mathbf{m})$ від параметрів m і h. Нагадаємо деякі позначення з [1]

$$\rho=\lambda m_1b_1, \qquad b_1=\sum_{n=1}^{\infty}na_n.$$

Тут λ – параметр вхідного потоку; $a_i=\mathbf{P}\{\theta_n=i\}$; θ_n – кількість замовлень в n-й групі.

Лема 1. *Для послідовностей $\{p_i\}$, $\{R_i\}$, введених в [1], справджуються такі рівності:*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\overline{p}_j=\rho; \qquad \sum_{i=1}^{k}R_i\sum_{j=0}^{k-i}\overline{p}_j=\sum_{i=1}^{k}R_i-k. \tag{14}$$

Доведення. Враховуючи, що згідно з означенням послідовності ймовірностей $\{p_i\}$ $(i\geq -1)$

$$\sum_{i=-1}^{\infty}(i+1)p_i=\rho,$$

одержимо

$$\sum_{i=-1}^{\infty}(i+1)p_i=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)p_j=\sum_{j=0}^{\infty}\overline{p}_j=\rho.$$

Використовуючи співвідношення (див. [1])

$$\sum_{i=1}^{k}R_i\overline{p}_{k-i}=R_k-1, \tag{15}$$

отримуємо

$$\sum_{i=1}^{k}R_i\sum_{j=0}^{k-i}\overline{p}_j=\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j}R_i\overline{p}_{h-j-i}=\sum_{j=0}^{k-1}(R_{h-j}-1)=\sum_{i=1}^{k}R_i-k.$$

Лему доведено. □

Лема 2. *Середні тривалості періодів зайнятості систем $M_h^\theta/G/1/m$ та $M_h^\theta/G/1$ визначають за формулами*

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\,\tau(m) = m_1\bigg(b_1 + \rho\sum_{i=1}^{h} R_i\overline{a}_{h+1-i} - \sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty}\overline{p}_j +\\ + \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty}\overline{p}_j - \sum_{n=m+2}^{\infty}(n-m-1)a_n\bigg);\end{aligned} \tag{16}$$

$$\mathbf{M}\,\tau(\infty) = m_1\bigg(b_1 + \rho\sum_{i=1}^{h} R_i\overline{a}_{h+1-i}\bigg). \tag{17}$$

Доведення. Для відшукання $\mathbf{M}\,\tau(m)$ використаємо співвідношення (5), в якому $\widetilde{m}_1 = m_1$. Враховуючи рівності (14), після нескладних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned}(m-h)\overline{p}_{m-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1}(j-h)p_{j-i} = \sum_{j=h+1-i}^{\infty}\overline{p}_j - \sum_{j=m+1-i}^{\infty}\overline{p}_j =\\ = \rho - \sum_{j=0}^{h-i}\overline{p}_j - \sum_{j=m+1-i}^{\infty}\overline{p}_j;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{h} R_i\bigg((m-h)\overline{p}_{m-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1}(j-h)p_{j-i}\bigg) = \sum_{i=1}^{h} R_i\bigg(\rho - \sum_{j=0}^{h-i}\overline{p}_j - \sum_{j=m+1-i}^{\infty}\overline{p}_j\bigg) =\\ = h + \sum_{i=1}^{h} R_i\bigg(\rho - 1 - \sum_{j=m+1-i}^{\infty}\overline{p}_j\bigg);\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=h+1}^{m}(n-h)a_n + (m+1-h)\overline{a}_{m+1} =\\ = b_1 - \sum_{n=1}^{\infty} na_n + \sum_{n=h+1}^{m} na_n - h\overline{a}_{h+1} + (m+1)\overline{a}_{m+1} =\\ = b_1 - \sum_{n=m+2}^{\infty}(n-m-1)a_n - \sum_{n=1}^{h} na_n - h\overline{a}_{h+1}.\end{aligned}$$

Після аналогічних до виконаних у (18) перетворень виразу

$$\sum_{i=1}^{h-n} R_i\bigg((m-h)\overline{p}_{m-n-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1}(j-h)p_{j-n-i}\bigg)$$

знайдемо

$$\mathbf{M}\,\tau(m) = m_1\bigg((1+\rho)\sum_{i=1}^{h} R_i\overline{a}_{h+1-i} - \bigg(\sum_{i=1}^{h} R_i\overline{a}_{h+1-i} - h + \sum_{n=1}^{h-1} a_n(h-n)\bigg) -$$

$$-\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j + \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j + b_1 -$$
$$- \sum_{n=m+2}^{\infty} (n-m-1)a_n - \sum_{n=1}^{h} n a_n - h\overline{a}_{h+1}\Bigg).$$

Звідси, враховуючи, що

$$h - \sum_{n=1}^{h-1}(h-n)a_n = h - \sum_{n=1}^{h}(h-n)a_n = h\overline{a}_{h+1} + \sum_{n=1}^{h} n a_n,$$

отримаємо формулу (16), а після переходу в ній до границі при $m \to \infty$ – співвідношення (17). Лему доведено. □

Теорема 3. *А)* $\mathbf{M}\,\tau(m)$ *зростає як функція параметра* m. *Б)* $\mathbf{M}\,\tau(m)$ *і* $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ *зростають як функції параметра* h.

Доведення. *А*) З формули (16) для $\mathbf{M}\,\tau(m)$ випливає, що

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{M}\,\tau(m) = m_1\Bigg(b_1 + \rho \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\Bigg).$$

Тому для доведення першої частини теореми достатньо довести, що

$$\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j + \sum_{n=m+2}^{\infty} (n-m-1)a_n > 0.$$

Отримали

$$\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j =$$
$$= \overline{a}_h \sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j + \sum_{n=1}^{h-1} a_n \Bigg(\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j - \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j\Bigg) =$$
$$= \overline{a}_h \sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j + \sum_{n=1}^{h-1} a_n \Bigg(\sum_{i=1}^{n} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j +$$
$$+ \sum_{i=1}^{h-n} (R_{n+i} - R_i) \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j\Bigg) > 0,$$

оскільки $R_{n+1} - R_n > 0$ для всіх натуральних значень n.

Б) Позначимо через $\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(m)$ значення правої частини (16) після заміни h на $h+1$. Тоді з (16) одержимо

$$\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(m) - \mathbf{M}\,\tau(m) = m_1\Bigg(\rho - \sum_{j=m-h}^{\infty} \overline{p}_j\Bigg)\Bigg(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i}\Bigg) > 0, \qquad (19)$$

оскільки $\rho = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{p}_j > \sum\limits_{j=m-h}^{\infty} \overline{p}_j$, і послідовність R_n зростає. З (19) отримаємо

$$\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(\infty) - \mathbf{M}\,\tau(\infty) = m_1\rho\Big(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i}\Big) > 0.$$

Теорему доведено. $\square$

4. Дослідження залежностей імовірності обслуговування від параметрів m і h.

Теорема 4. *А)* $\mathbf{P}_{sv}(\infty)$ *зростає як функція параметра* h. *Б) Якщо* $a_1 = 1$, *то* $\mathbf{P}_{sv}(m)$ *зростає як функція параметра* m.

Доведення. *А*) Співвідношення (13) можна записати так:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty) = \frac{1 + \lambda m_1 \sum\limits_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}}{1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)}. \tag{20}$$

Позначимо через $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}(h+1)}(\infty)$ значення правої частини (20) після заміни h на $h+1$. Тоді за допомогою (20) одержимо

$$\begin{gathered}\big(\mathbf{P}_{\mathrm{sv}(h+1)}(\infty) - \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty)\big)\big(1 + \lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)\big)\big(1 + \lambda\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(\infty)\big) = \\ = \Big(1 + \lambda m_1 \sum_{i=1}^{h+1} R_i \overline{a}_{h+2-i}\Big)\big(1 + \lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)\big) - \Big(1 + \lambda m_1 \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\Big)\times \\ \times\big(1 + \lambda\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(\infty)\big) = (1-\rho)\lambda m_1\Big(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i}\Big) + \\ +(\lambda m_1)^2 \sum_{i=1}^{h+1} R_i \overline{a}_{h+2-i}\Big(b_1 + \rho\sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\Big) - \\ -(\lambda m_1)^2 \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\Big(b_1 + \rho\sum_{i=1}^{h+1} R_i \overline{a}_{h+2-i}\Big) = \lambda m_1\Big(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i}\Big) > 0,\end{gathered}$$

що й доводить першу частину теореми.

Б) У випадку, коли замовлення надходять по одному ($a_1 = 1$), зі співвідношень (12) і (16) отримаємо

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m) = \frac{1 + \lambda\Big(m_1 R_h - R_h \overline{q}_{m+1-h} + \sum\limits_{i=1}^{h-1} R_i q_{m-i}\Big)}{1 + \lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}; \tag{21}$$

$$\mathbf{M}\,\tau(m) = m_1\Big(1 + \lambda m_1 R_h - R_h \sum_{j=m+1-h}^{\infty} \overline{p}_j + \sum_{i=1}^{h-1} R_i \overline{p}_{m-i}\Big). \tag{22}$$

Позначимо чисельник правої частини формули (21) через $\mathbf{P}_{\text{num}}(m)$. З означень послідовностей q_i, p_i [1] у випадку, коли $a_1 = 1$, можна вивести такі співвідношення:

$$\lambda q_i = \overline{p}_i \qquad (\, i \geq 0\,). \tag{23}$$

Тоді за допомогою (21)-(23) одержимо

$$\mathbf{P}_{\text{num}}(m+1) - \mathbf{P}_{\text{num}}(m) = R_h \overline{p}_{m+1-h} - \sum_{i=1}^{h-1} R_i p_{m-i};$$

$$\mathbf{M}\,\tau(m+1) - \mathbf{M}\,\tau(m) = m_1 \biggl(R_h \overline{p}_{m+1-h} - \sum_{i=1}^{h-1} R_i p_{m-i} \biggr);$$

$$\bigl(\mathbf{P}_{\text{sv}}(m+1) - \mathbf{P}_{\text{sv}}(m)\bigr)\bigl(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m)\bigr)\bigl(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m+1)\bigr) =$$
$$= \bigl(\mathbf{P}_{\text{num}}(m+1) - \mathbf{P}_{\text{num}}(m)\bigr)\bigl(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m)\bigr) - \lambda \mathbf{P}_{\text{num}}(m)\bigl(\mathbf{M}\,\tau(m+1) -$$
$$-\mathbf{M}\,\tau(m)\bigr) = \biggl(R_h \overline{p}_{m+1-h} - \sum_{i=1}^{h-1} R_i p_{m-i} \biggr)\bigl(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m) - \lambda m_1 \mathbf{P}_{\text{num}}(m)\bigr) =$$
$$= R_h \overline{p}_{m+1-h} - \sum_{i=1}^{h-1} R_i p_{m-i} > 0.$$

Теорему доведено. □

5. Визначення стаціонарних характеристик черги. Розглянемо стаціонарні характеристики черги: середню довжину черги $\mathbf{M}\,Q(m)$ та середній час очікування $\mathbf{M}\,w(m)$. Для системи з обмеженою чергою їх знаходимо за формулами

$$\mathbf{M}\,Q(m) = \sum_{k=1}^{m} k \rho_{k+1}(m); \qquad \mathbf{M}\,w(m) = \frac{\mathbf{M}\,Q(m)}{\lambda b_1 \mathbf{P}_{\text{sv}}(m)}. \tag{24}$$

Співвідношення для $\mathbf{M}\,w(m)$ випливає з формули Літтла для систем обслуговування з втратами замовлень. Перед тим, як скористатися формулами (24), треба знайти ймовірності $\rho_i(m)$ та $\mathbf{P}_{\text{sv}}(m)$, визначені співвідношеннями (6) і (12) (при $a_1 = 1$), відповідно.

Формулу (12) не можна використати у випадку групового надходження замовлень ($a_1 < 1$), тому що для системи з обмеженою чергою деякі замовлення, які прибувають на вхід системи в момент, коли вхідний потік не блокується, можуть бути втрачені. Відповідну формулу для $\mathbf{P}_{\text{sv}}(m)$ можна отримати як границю при $T \to \infty$ відношення кількості обслужених замовлень до кількості всіх, що надійшли за час T. Середня кількість замовлень, які прибули на вхід системи за час T, дорівнює $\lambda b_1 T$, а середня кількість обслужених за той самий час становить $\bigl(1 - \rho_0(m)\bigr)T/m_1$. У підсумку одержимо таку формулу для ймовірності обслуговування:

$$\mathbf{P}_{\text{sv}}(m) = \frac{\mathbf{M}\,\tau(m)}{m_1 b_1 \bigl(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m)\bigr)}.$$

У випадку системи з необмеженою чергою з (24) отримаємо рівності

$$\mathbf{M}\,Q(\infty)=\sum_{k=1}^{\infty}k\rho_{k+1}(\infty);\qquad \mathbf{M}\,w(\infty)=\frac{\mathbf{M}\,Q(\infty)}{\lambda b_1\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty)}.\tag{25}$$

Отже, для відшукання $\mathbf{M}\,Q(\infty)$ треба знайти суму нескінченного ряду.

Визначимо $\mathbf{M}\,Q(\infty)$ для випадку, коли замовлення надходять по одному ($a_1=1$), і формули для ергодичного розподілу $\rho_i(\infty)$, отримані з (6) при $m\to\infty$, спрощуються

$$\rho_0(\infty)=\frac{1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\,;\qquad \rho_1(\infty)=\frac{R_1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\,;$$

$$\begin{gathered}\rho_k(\infty)=\frac{R_k-R_{k-1}}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\qquad (\,k=\overline{1,\,h}\,);\qquad \rho_k(\infty)=\frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\Bigg(R_h(q_{k-h}+\\ +m_1\overline{p}_{k-h})+\sum_{i=1}^{h-1}R_i(q_{k-i}-q_{k-1-i}-m_1p_{k-1-i})\Bigg)\quad (\,k>h\,).\end{gathered}\tag{26}$$

Теорема 5. *Якщо $a_1=1$ (замовлення надходять по одному, $\rho=\lambda m_1$), то середню довжину черги для системи $M_h^{\theta}/G/1$ визначають за формулою*

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\,Q(\infty)=\frac{1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\Bigg(\sum_{i=1}^{h-1}(R_h-R_i)+(1+\rho)\bigg((h-1)\big(1-\\ -R_h(1-\rho)\big)+\sum_{k=1}^{\infty}\bigg(R_h\sum_{i=k}^{\infty}\overline{p}_i-\sum_{i=1}^{h-1}R_i\overline{p}_{h+k-1-i}\bigg)\bigg)\Bigg).\end{gathered}\tag{27}$$

Доведення. Ввівши позначення $\overline{\rho}_k(\infty)=\sum\limits_{i=k}^{\infty}\rho_i(\infty)$, першу з формул (25) запишемо у вигляді

$$\mathbf{M}\,Q(\infty)=\sum_{k=2}^{\infty}\overline{\rho}_k(\infty).\tag{28}$$

Використовуючи першу з рівностей (14) та співвідношення (15) і (23), за допомогою (26) послідовно знаходимо

$$\overline{\rho}_{h+k}(\infty)=\frac{1+\rho}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\bigg(R_h\sum_{i=k}^{\infty}\overline{p}_i-\sum_{i=1}^{h-1}R_i\overline{p}_{h+k-1-i}\bigg)\qquad (\,k\geq 1\,);$$

$$\overline{\rho}_{h+1}(\infty)=\frac{1+\rho}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\big(1-R_h(1-\rho)\big);$$

$$\overline{\rho}_k(\infty)=\frac{1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\big(R_h-R_{k-1}+(1+\rho)\big(1-R_h(1-\rho)\big)\big)\quad (\,k=\overline{2,\,h}\,).$$

Підставляючи одержані вирази для $\overline{\rho}_k(\infty)$ у формулу (28), отримаємо співвідношення (27). Теорему доведено. □

Для деяких розподілів часу обслуговування суми нескінченних рядів у (27) вдається знайти. Розглянемо два такі випадки.

Теорема 6. *Нехай $a_1 = 1$ (замовлення надходять по одному). А) У випадку показникового розподілу часу обслуговування ($F(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x \geq 0$; $\rho = \lambda m_1 = \lambda/\mu$)*

$$\mathbf{M}\,Q(\infty) = \frac{1}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)}\Bigg(\sum_{i=1}^{h-1}(R_h - R_i) + (1+\rho)\Bigg((h-1)\big(1- \\ - R_h(1-\rho)\big) + R_h\rho^2 - \rho\sum_{i=1}^{h-1} R_i\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{h-i}\Bigg)\Bigg). \tag{29}$$

Б) Якщо час обслуговування розподілений за законом Ерланга другого порядку ($F(x) = 1 - (1+\mu x)e^{-\mu x}$, $x \geq 0$; $\rho = \lambda m_1 = 2\lambda/\mu$), то

$$\mathbf{M}\,Q(\infty) = \frac{1}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)}\Bigg(\sum_{i=1}^{h-1}(R_h - R_i) + (1+\rho)\Bigg((h-1)\big(1- \\ - R_h(1-\rho)\big) + \frac{3}{4}R_h\rho^2 - \sum_{i=1}^{h-1} R_i(\rho+h+2-i)\left(\frac{\rho}{2+\rho}\right)^{h+1-i}\Bigg)\Bigg). \tag{30}$$

Доведення. *А*) Для часу обслуговування, розподіленого за показниковим законом, з означення послідовності $\{p_i\}$ (див. [1]) отримуємо

$$p_i = \frac{\mu\Lambda^{i+1}}{\lambda+\mu}, \quad \overline{p}_i = \Lambda^{i+1} \quad (\,i \geq -1\,); \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,; \quad \sum_{i=k}^{\infty}\overline{p}_i = \rho\Lambda^k; \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}\overline{p}_i = \rho^2,$$

і формула (27) набуває вигляду (29).

Б) Якщо $F(x) = 1 - (1+\mu x)e^{-\mu x}$, $x \geq 0$, то

$$p_i = \frac{(i+2)\mu^2\Lambda^{i+1}}{(\lambda+\mu)^2}, \quad \overline{p}_i = \frac{\big(\lambda + (i+2)\mu\big)\Lambda^{i+1}}{\lambda+\mu} \quad (\,i \geq -1\,); \quad \sum_{i=k}^{\infty}\overline{p}_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \times \\ \times\Lambda^{k-1}\big(k+2-2(k+1)\Lambda + k\Lambda^2\big); \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}\overline{p}_i = \Lambda\sum_{k=1}^{\infty}k\Lambda^k + \rho\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda^k = \frac{3}{4}\rho^2,$$

і з (27) одержуємо співвідношення (30). Теорему доведено. □

6. Приклади обчислення стаціонарних характеристик. Припустимо, що час обслуговування розподілений за законом Ерланга другого порядку з параметром μ ($m_1 = 2/\mu$). Для системи $\mathrm{M}_h^{\theta}/\mathrm{G}/1$ розглянемо випадки: $a_1 = 0,75$, $a_2 = 0,25$ (замовлення надходять по одному та по двоє, приклад 1); $a_1 = 1$ (замовлення надходять по одному, приклад 2).

Позначимо через $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ імовірність втрати замовлення для системи $\mathrm{M}_h^{\theta}/\mathrm{G}/1$, тоді

$$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty) = 1 - \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty). \tag{31}$$

Нехай $\lambda = 2$, $\mu = 3$. Результати обчислень стаціонарних характеристик системи, отримані для прикладів 1 і 2 з використанням формул (17), (20), (25), (30) і (31), наведено в таблицях 1 і 2, відповідно. Для порівняння у цих таблицях записані також значення деяких характеристик, одержані за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World [5, 6] для значень часу роботи системи обслуговування

$t = 10^5$ (табл. 1) і $t = 3 \cdot 10^5$ (табл. 2). Програми GPSS World, які використовували для обчислень, можна знайти в [1]. В них внесено невеликі зміни, пов'язані з особливостями надходження замовлень (розподіл $\{a_i\}$) для прикладів 1 і 2.

Таблиця 1. Стаціонарні характеристики системи $\mathrm{M}_h^\theta/\mathrm{G}/1$ (прикл. 1)

h	$\mathbf{M}\,\tau(\infty)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ (GPSS)
1	3,920	0,468	0,465
2	8,326	0,434	0,435
3	15,701	0,419	0,418
4	28,801	0,410	0,410
5	52,045	0,406	0,409
6	93,273	0,403	0,404
7	166,399	0,402	0,402

Таблиця 2. Стаціонарні характеристики системи $\mathrm{M}_h^\theta/\mathrm{G}/1$ (прикл. 2)

h	$\mathbf{M}\,\tau(\infty)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ (GPSS)	$\mathbf{M}\,w(\infty)$	$\mathbf{M}\,w(\infty)$ (GPSS)
1	3,136	0,353	0,352	0,919	0,917
2	5,550	0,312	0,312	1,316	1,313
3	9,140	0,289	0,289	1,781	1,783
4	14,448	0,275	0,276	2,290	2,292
5	22,291	0,266	0,266	2,833	2,833
6	33,873	0,261	0,261	3,403	3,403
7	50,978	0,257	0,257	3,995	3,995

Отримані результати підтверджують висновки теорем 3 і 4 про характер монотонної залежності характеристик $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ і $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty)$ від параметра h. Порівняння даних таблиць 1 і 2 засвідчує, що середня тривалість періоду зайнятості $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ і ймовірність втрати замовлення $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ зменшуються зі зменшенням навантаження на систему (навантаження більше для прикладу 1, коли замовлення можуть надходити й по двоє).

7. Про можливість розв'язання задач оптимального синтезу. Інформацію про характер монотонної залежності характеристики системи обслуговування від одного з параметрів системи можна використати для розв'язання задачі оптимального синтезу системи з заданою характеристикою. Покажемо це на прикладі ймовірності втрати замовлення $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$.

Сформулюємо задачу оптимального синтезу так: *для фіксованих значень параметрів* λ, m_1 *та* a_i $(i \geq 1)$ *знайти таке найменше значення порога блокування* h*, при якому* $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ *не перевищує заданого значення* P_0. З теореми 4 та формули (31) випливає, що $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ спадає як функція параметра h. Очевидно, що розв'язок сформульованої задачі визначається за алгоритмом

$$h_{\mathrm{opt}} = \min\{\, h \in \mathbb{N} : \ \mathbf{P}_{\mathrm{LS}(h)}(\infty) \leq P_0 \,\}, \tag{32}$$

де $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}(h)}(\infty) = \mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ для конкретного значення h. Для реалізації алгоритму (32) достатньо мати результати обчислень значень $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ для різних h, такі як, наприклад, наведені у таблицях 1 і 2.

Таблиця 3. Розв'язки задачі оптимального синтезу для даних прикладу 1

P_0	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47
h_{opt}	5	3	3	2	2	2	1

Таблиця 4. Розв'язки задачі оптимального синтезу для даних прикладу 2

P_0	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36
h_{opt}	7	5	4	3	3	3	2	2	2	2	1

Розв'язки задач оптимального синтезу для даних прикладів 1 і 2, отримані за допомогою таблиць 1 і 2, подано у таблицях 3 і 4, відповідно.

Список використаної літератури

1. *Братійчук М.* Дослідження систем M/G/1/m та M/G/1 з груповим надходженням замовлень і пороговим блокуванням вхідного потоку / *Братійчук М., Жерновий Ю.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 21-35.
2. *Жерновий К.* Оптимізація режимів обслуговування для систем M/M/1/m та M/M/1 з блокуванням вхідного потоку / *Жерновий К.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 92-101.
3. *Жерновый Ю.В.* Решение задач оптимального синтеза для некоторых марковских моделей обслуживания / *Жерновый Ю.В.* // Информационные процессы. – 2010. – Т. 10, № 3. – С. 257-274.
4. *Братійчук А.М.* Дослідження систем обслуговування з обмеженою чергою / *Братійчук А.М.* Дис. канд. фіз.-мат. наук. – К., 2008.
5. *Боев В.Д.* Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World / *Боев В.Д.* – С.-П., 2004.
6. *Жерновий Ю.В.* Імітаційне моделювання систем масового обслуговування / *Жерновий Ю.В.* – Л., 2007.

Стаття: надійшла до редакції 10.02.2011
прийнята до друку 21.09.2011.

STATIONARY CHARACTERISTICS OF $M^\theta/G/1/m$ AND $M^\theta/G/1$ QUEUES WITH THRESHOLD BLOCKING OF AN INPUT FLOW

Mykola BRATIICHUK[1], Yuriy ZHERNOVYI[2]

[1]*Silesian University of Technology,*
Kashubska Str., 23, Gliwice, 44-100
[2]*Ivan Franko National University of L'viv,*
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

The $M^\theta/G/1/m$ queue with group arrivals and threshold blocking strategy of an input flow is considered. If at the moment of beginning the service of the next customer the number of customers in the system exceeds some level h, the input flow is blocked while service process goes its own way. The arrivals of the new customers resume when the number of customers in the system decreases to the level h. Average duration of parts of the busy time with absence and presence of blocking of input flow, probability of service of customers and stationary characteristics of queue are found. Monotonicity of dependences of average duration of the busy time and probability of service on the parameters m and h is proved.

Key words: the $M^\theta/G/1/m$ and $M^\theta/G/1$ queueing systems, blocking of an input flow, busy time, stationary characteristics.

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ $M^\theta/G/1/m$ И $M^\theta/G/1$ С ПОРОГОВОЙ БЛОКИРОВКОЙ ВХОДНОГО ПОТОКА

Николай БРАТИЙЧУК[1], Юрий ЖЕРНОВЫЙ[2]

[1]*Шлёнский политехнический университет,*
ул. Кашубская, 23, Гливице, 44-100
[2]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Рассмотрено систему обслуживания типа $M^\theta/G/1/m$ с групповым поступлением заявок и пороговой блокировкой входного потока. Блокировка потока заявок осуществляется, если в момент начала обслуживания очередной заявки число заявок в системе превышает заданный пороговый уровень h. Определено среднюю продолжительность частей периода занятости с отсутствием и наличием блокировки входного потока, вероятность обслуживания заявок и стационарные характеристики очереди. Доказана монотонность зависимостей средней продолжительности периода занятости и вероятности обслуживания от параметров m и h.

Ключевые слова: системы $M^\theta/G/1/m$ и $M^\theta/G/1/m$, блокировка входного потока, период занятости, стационарные характеристики.