ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 47–51*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 47–51

УДК 512.552.12

ДОПОВНЕННЯ РЯДКА НАД КОМУТАТИВНИМ КІЛЬЦЕМ БЕЗУ ДО МАТРИЦІ З ВИЗНАЧНИКОМ, ЯКИЙ ДОРІВНЮЄ НАЙБІЛЬШОМУ СПІЛЬНОМУ ДІЛЬНИКУ ЕЛЕМЕНТІВ РЯДКА

Андрій ГАТАЛЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Доведено, що над комутативним кільцем Безу стабільного рангу n, довільний рядок довжини $n+1$ доповнюється до матриці, визначник якої дорівнює найбільшому спільному дільнику елементів цього рядка.

Ключові слова: кільце Безу, кільце Ерміта, кільце елементарних дільників, стабільний ранг.

Задача доповнення унімодулярного рядка над кільцем до оборотної матриці стала вже класичною [1, 2]. Зазначимо тісний зв'язок цієї задачі з задачами про умови, коли проективний модуль над кільцем вільний [3]. В останні роки з'явилось багато праць [4-6], в яких знайдено зв'язок важливого інваріанта як стабільний ранг кільця, з цією задачею та з задачею діагоналізації матриць над кільцями, особливо над кільцями Безу.

Мета нашої праці – довести, що над комутативним кільцем Безу стабільного рангу n, довільний рядок довжини $n+1$ доповнюється до матриці, визначник якої дорівнює найбільшому спільному дільника всіх елементів цього рядка.

Під кільцем R будемо розуміти комутативне кільце з $1 \neq 0$. Рядок $(a_1, \ldots, a_n)$ елементів з кільця R називається унімодулярним, якщо $a_1R + \cdots + a_nR = R$. Скажемо, що натуральне число n є стабільним рангом кільця R, якщо для довільного унімодулярного рядка $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ існують такі елементи $x_1, \ldots, x_n \in R$, що рядок $(a_1 + a_{n+1}x_1, \ldots, a_n + a_{n+1}x_n)$ є унімодулярним [6]. Кільце Безу це кільце, в якому довільний скінченнопороджений ідеал є головним. Кільце Ерміта це кільце, в якому для довільних елементів $a, b \in R$ існує оборотна матриця P і такий елемент $d \in R$, що $(a, b)P = (d, 0)$.

Теорема 1. *Нехай R – комутативне кільце Безу стабільного рангу n. Тоді для довільних таких елементів $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in R$, що $a_1R + \cdots + a_nR + a_{n+1}R =$*

$= dR$ існує квадратна матриця порядку $n+1$ з першим рядком $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$, визначник якої дорівнює d.

Доведення. Спочатку покажемо, що довільний унімодулярний рядок $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ довжини $n+1$ над кільцем R може бути доповнений до оборотної матриці A порядку $n+1$, причому $\det A = 1$.

Оскільки стабільний ранг кільця R дорівнює n, то існує такий рядок $(x_1, \dots, x_n)$ над R, що

$$(a_1 + a_{n+1}x_1)R + \dots + (a_n + a_{n+1}x_n)R = R,$$

або

$$(a_1 + a_{n+1}x_1)u_1 + \dots + (a_n + a_{n+1}x_n)u_n = 1,$$

для деяких елементів $u_1, \dots, u_n$ кільця R.

Приймемо

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & u_1(1-a_{n+1}) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & u_2(1-a_{n+1}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & u_n(1-a_{n+1}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $\det P_1 = \det P_2 = 1$. Звідси одержимо

$$(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})P_1P_2 = (1, a'_2, \dots, a'_{n+1}).$$

Очевидно, що існує така оборотна матриця P_3 з $\det P_3 = 1$ порядку $n+1$, що $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})P_1P_2P_3 = (1, 0, \dots, 0)$. Позначимо через $P = P_1P_2P_3$. Очевидно, що $\det P = 1$ і нехай $P^{-1} = (p_{ij})$. Тоді з рівності $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = (1, 0, \dots, 0)P^{-1}$ випливає, що

$$a_1 = p_{11}, \dots, a_{n+1} = p_{1,n+1},$$

тобто рядок $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ є першим рядком матриці P^{-1}, причому $\det P^{-1} = 1$.

Оскільки кільце R є кільцем Безу, то для довільних елементів $a_1, \dots, a_{n+1} \in R$ існує такий елемент $d \in R$, що $a_1R + \dots + a_{n+1}R = dR$. Тут d – найбільший спільний дільник елементів $a_1, \dots, a_{n+1}$. Звідси $a_1u_1 + \dots + a_{n+1}u_{n+1} = d$ та $a_1 = da_1^0, \dots, a_{n+1} = da_{n+1}^0$ для деяких елементів $u_1, \dots, u_{n+1}, a_1^0, \dots, a_{n+1}^0 \in R$.

Звідси одержуємо

$$d(a_1^0u_1 + \dots + a_{n+1}^0u_{n+1} - 1) = 0$$

і $a_1^0R + \dots + a_{n+1}^0R + cR = R$ для деякого такого елемента $c \in R$, що $dc = 0$.

Оскільки стабільний ранг кільця R дорівнює n, то

$$(a_1^0 + cv_1)R + \dots + (a_{n+1}^0 + cv_{n+1})R = R$$

для деяких елементів $v_1, \dots, v_{n+1} \in R$.

За доведеним вище унімодулярний рядок $(a_1^0 + cv_1, \ldots, a_{n+1}^0 + cv_{n+1})$ можна доповнити до такої оборотної матриці P, що $\det P = 1$. Домноживши перший рядок матриці P на елемент d, отримаємо матрицю C порядку $n+1$ вигляду

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_{n+1} \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

причому $\det C = d$, що і треба було довести. □

Оскільки згідно з означенням кільце стабільного рангу n є кільцем стабільного рангу m, де $m \geqslant n$, то як очевидний наслідок теореми 1 одержимо такий результат.

Наслідок 1. *Нехай R – комутативне кільце Безу стабільного рангу n. Тоді для довільного рядка $(a_1, \ldots, a_m)$, де $m \geqslant n+1$, існує квадратна матриця порядку m з першим рядком $(a_1, \ldots, a_m)$, визначник якої дорівнює d, де $dR = a_1R + \cdots + a_mR$.*

Оскільки комутативне кільце Безу є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли його стабільний ранг дорівнює 2, то як наслідок отримуємо відомий результат Капланського [2].

Наслідок 2 ([2], т. 3.7)**.** *Нехай R – комутативне кільце Ерміта. Тоді для довільних елементів $a_1, \ldots, a_n$ кільця R існує квадратна матриця порядку n, визначник якої дорівнює d, де d – найбільший спільний дільник елементів $a_1, \ldots, a_n$.*

Зауважимо, що задача доповнювальності унімодулярного рядка до оборотної матриці тісно пов'язана з задачею діагоналізації матриць. Подамо необхідні означення.

Будемо позначати через $diag(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r)$ матрицю з елементами $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r$ по головній діагоналі і нулями на інших місцях. Матриці A і B називаються еквівалентними, якщо існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів, що $B = PAQ$. Якщо матриця A еквівалентна до деякої діагональної матриці

$$diag(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r, 0, \ldots, 0),$$

де $\epsilon_i | \epsilon_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots r-1$, то кажуть, що матриця A має властивість діагональної редукції. Елементи $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r$ називаються елементарними дільниками матриці A. Кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця над R має діагональну редукцію [2].

В [2] наведено такі умови діагоналізації матриць.

Теорема 2 ([2], т. 5.2)**.** *Комутативне кільце Ерміта R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільного унімодулярного рядка (a, b, c) над R існують такі елементи $p, q \in R$, що рядок $(ap + bq, cp)$ є унімодулярним.*

Ці умови в термінах доповняльності унімодулярних рядків до оборотних матриць можна сформулювати так.

Теорема 3. *Комутативне кільце Ерміта R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли довільний унімодулярний рядок (a, b, c) над R можна доповнити до оборотної матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -q & p & 0 \\ -v & 0 & u \end{pmatrix},$$

де u, v *такі елементи кільця* R*, що* $(ap + bq)u + cpv = 1.$

Список використаної літератури

1. *Newman M.* Integral matrices / *Newman M.* – New-York, 1972.
2. *Kaplansky I.* Elementary divisor rings and modules / *Kaplansky I.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 66. – P. 464-491.
3. *Roitman M.* Completing unimodular rows to invertible matrices / *Roitman M.* // J. Algebra – 1977. – Vol. 49. – P. 206-211.
4. *Zabavsky B.V.* Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range / *Zabavsky B.V.* // Alg. and Discr. Math. – 2005. – Vol. 1. – P. 151-165.
5. *Zabavsky B.V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank / *Zabavsky B.V.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 206-211.
6. *Забавський Б.В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 / *Забавський Б.В.* // Укр. мат. журн. – 2003. – № 55. – С. 550-554.

Стаття: надійшла до редакції 30.03.2011
доопрацьована 29.06.2011
прийнята до друку 21.06.2011

COMPLETING ROW OVER COMMUTATIVE BEZOUT RING TO MATRIX DETERMINANT OF WHICH ONE OF THE MOST COMMON DIVISOR OF ALL ELEMENTS OF THIS ROW

Andriy GATALEVYCH

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Proved that over a commutative Bezout ring of stable range n, any row of length $n + 1$ is completable to the matrix, determinant of which one of the most common divisor of all elements of this row.

Key words: Bezout ring, Hermite ring, elementary divisor ring, stable range.

ДОПОЛНЕНИЕ СТРОКИ НАД КОММУТАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ БЕЗУ К МАТРИЦЕ С ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ, КОТОРЫЙ РАВЕН НАИБОЛЬШЕМУ ОБЩЕМУ ДЕЛИТЕЛЮ ЭЛЕМЕНТОВ СТРОКИ

Андрей ГАТАЛЕВИЧ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Доказано, что над коммутативным кольцом Безу стабильного ранга n, произвольная строка длинны $n+1$ дополняется к матрице, определитель которой равен наибольшему общему делителю элементов строки.

Ключевые слова: кольцо Безу, кольцо Эрмита, кольцо элементарных делителей, стабильный ранг.