ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 106–114
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 106–114

УДК 512.536.7

ЗАНУРЕННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ ПІВГРУП В ІДЕМПОТЕНТНО ПОРОДЖЕНІ

Олег ГУТІК, Ірина ФІГЕЛЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mails: o_gutik@franko.lviv.ua, figel.iryna@gmail.com

Описано конструкцію занурення компактних цілком (0-) простих топологічних півгруп в ідемпотентно породжені компактні цілком (0-) прості топологічні півгрупи.

Ключові слова: топологічна півгрупа, занурення, матрична півгрупа Ріса, парагрупа.

1. Вступ. Всі простори вважаємо гаусдорфовими. Надалі будемо користуватися термінологією та позначеннями з [8, 9, 10, 11, 15, 23].

Півгрупою називається непорожна множина з заданою на ній бінарною асоціативною операцією.

Елемент e півгрупи S називається *ідемпотентом*, якщо $ee = e$. *Підмножину ідемпотентів* півгрупи S позначатимемо через $E(S)$. На множині ідемпотентів E *природний частковий порядок* визначається так:

$$e \leqslant f \ \text{ тоді і лише тоді, коли } \ ef = fe = e, \ \text{ для } e, f \in E.$$

Ненульовий ідемпотент e півгрупи S називається *примітивним*, якщо e – мінімальний ідемпотент стосовно природного часткового порядку визначеного на $E(S)$.

Півгрупа S називається:

- *простою*, якщо S не містить власних двосторонніх ідеалів;
- 0-*простою*, якщо S не містить відмінних від нуля власних двосторонніх ідеалів;
- *цілком простою*, якщо S – проста і містить примітивний ідемпотент;
- *цілком* 0–*простою*, якщо S – 0-проста і містить примітивний ідемпотент.

Будемо говорити, що півгрупа S є *ідемпотентно породженою*, якщо $E(S) \neq \varnothing$ і для довільного елемента s півгрупи S існують $e_1, \ldots, e_n \in E(S)$, $n \in \mathbb{N}$, такі, що $s = e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$.

Топологічний простір X називається:

- *компактним*, якщо довільне відкрите покриття простору X містить скінченне підпокриття;
- *зліченно компактним*, якщо довільне зліченне відкрите покриття простору X містить скінченне підпокриття;
- *псевдокомпактним*, якщо X – цілком регулярний простір і кожна неперервна дійснозначна функція на X є обмеженою;
- *секвенціально компактним*, якщо кожна послідовність $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в X містить збіжну підпослідовність.

Гаусдорфовий топологічний простір із заданою на ньому неперервною півгруповою операцією називається *топологічною півгрупою*. Топологія τ на півгрупі S така, що (S,τ) – топологічна півгрупа, називається *півгруповою* топологією на S.

Топологічна група – це топологічний простір (G,τ) із заданими на ньому неперервними груповою операцією та інверсією, і в цьому випадку топологія τ на G називається *груповою*.

Нехай I та Λ – непорожні множини, S – півгрупа, $P=(p_{\lambda i})$ – матриця над півгрупою S, тобто P – це відображення з $\Lambda\times I$ в півгрупу S. Через $\mathscr{M}(I,S,\Lambda;P)$ позначимо множину $I\times S\times\Lambda$ з півгруповою операцією

$$(i_1,s_1,\lambda_1)(i_2,s_2,\lambda_2)=(i_1,s_1p_{\lambda_1 i_2}s_2,\lambda_2).$$

Півгрупа $\mathscr{M}(I,S,\Lambda;P)$ називається *матричною півгрупою Ріса над півгрупою S із сендвіч-матрицею P* [10]. Сендвіч-матриця P над групою G називається *нормалізовною*, якщо існують $i_0\in I$ та $\lambda_0\in\Lambda$ такі, що $p_{\lambda_0 i}=p_{\lambda i_0}=e$, де e – одиниця групи G, для всіх $i\in I$ та $\lambda\in\Lambda$. Кожна цілком проста півгрупа ізоморфна матричній півгрупі Ріса над групою G з нормалізовною сендвіч-матрицею P [26]. Сендвіч-матриця P над групою з нулем G^0 називається *регулярною*, якщо кожен її рядок і кожен її стовпець містять ненульовий елемент з G [10]. Кожна цілком 0-проста півгрупа ізоморфна матричній півгрупі Ріса над групою з нулем G^0 з регулярною сендвіч-матрицею P [26].

Якщо I та Λ – гаусдорфові топологічні простори, S – топологічна півгрупа, P – неперервне відображення з $\Lambda\times I$ у півгрупу S, то $\mathscr{M}(I,S,\Lambda;P)$ з топологією добутку є топологічною півгрупою [8]. Кожна проста компактна топологічна півгрупа K топологічно ізоморфна компактній топологічній півгрупі $\mathscr{M}(I,G,\Lambda;P)$, простір $I\times G\times\Lambda$ якої наділений топологією добутку компактних просторів I, G та Λ, де G – максимальна підгрупа в K [29].

Якщо S – (топологічна) група (і I та Λ – гаусдорфові топологічні простори), то (топологічна) півгрупа $\mathscr{M}(I,S,\Lambda;P)$ (з топологією добутку) називається (*топологічною*) *парагрупою* [8].

Задача занурення алгебричних (тополого-алгебричних) об'єктів у алгебричні (тополого-алгебричні) з певними властивостями є однією з ключових в алгебрі (топологічній алгебрі). Питання про те, коли (топологічна) півгрупа занурюється у (топологічну) півгрупу з деякими наперед заданими властивостями, досліджувало багато авторів. Наприклад, Р. Брук у праці [7] довів, що кожна (інверсна) півгрупа занурюється в просту (інверсну) півгрупу з одиницею, Л. Бокуть у [1] побудував конструкцію занурення півгруп у конгруенц-прості півгрупи, а Г. Престон і Н. Рейлі у [25, 27] побудували конструкцію занурення (інверсних) півгруп у біпрості (інверсні) півгрупи. У [19] Дж. Гауі довів, що кожна (інверсна, регулярна, ортодоксальна) півгрупа S ізоморфно занурюється в нільпотентно-породжену (інверсну, регулярну, ортодоксальну) півгрупу $\mathscr{N}_2(S)$, причому індекс нільпотентності всіх нільпотентних елементів, які породжують півгрупу $\mathscr{N}_2(S)$, дорівнює 2. О. Гутік і Ю. Лівач у [4] узагальнили конструкцію Дж. Гауі, довівши, що кожна (інверсна, регулярна, ортодоксальна) півгрупа S занурюється в нільпотентно-породжену (інверсну, регулярну, ортодоксальну) півгрупу $\mathscr{N}_n(S)$, де індекс нільпотентності всіх нільпотентних елементів, які породжують півгрупу $\mathscr{N}_n(S)$ може бути довільним натуральним числом $n \geqslant 2$. У [2, 3, 4] побудовано аналоги конструкцій Брука, Гауі, Гутіка і Лівача для топологічних півгруп, а в [16, 17] – описано категорні властивості нільпотентно-породжених розширень півгруп і топологічних півгруп, які називаються λ^0-розширеннями Брандта.

У працях [18, 6] вперше було доведено, що кожна півгрупа занурюється в ідемпотентно породжену півгрупу. Ф. Пастійн спростив конструкції вкладення, викладені в [18, 6] і довів, що кожна півгрупа занурюється в просту ідемпотентно породжену і в біпросту ідемпотентно породжену півгрупу, а також, що кожна цілком проста півгрупа занурюється в цілком просту ідемпотентно породжену півгрупу [22].

Ми описали конструкції занурення компактних цілком 0-простих і компактних цілком простих топологічних півгруп в ідемпотентно породжені компактні цілком 0-прості і компактні цілком прості, відповідно, топологічні півгрупи.

2. Занурення цілком простих топологічних півгруп у цілком прості ідемпотентно породжені топологічні півгрупи.

Ми скористаємось конструкцією (а точніше її модифікацією, яка пристосована до наших потреб) занурення цілком простих півгруп у цілком прості ідемпотентно породжені півгрупи, яка викладена в [24, § III.2] і [22].

Конструкція 1. Нехай цілком проста топологічна півгрупа S топологічно ізоморфна матричній півгрупі Ріса $\mathscr{M}(I, G, \Lambda; P)$, простір є добутком $I \times G \times \Lambda$ гаусдорфових топологічних просторів I, G та Λ, де G – максимальна підгрупа в півгрупі S, причому $I \cap G = \varnothing$ і $\Lambda \cap G = \varnothing$. Оскільки за теоремою III.2.6 з [24] матриця P є нормалізовною, то для деяких $i_0 \in I$ та $\lambda_0 \in \Lambda$ виконується умова $p_{\lambda_0 i} = p_{\lambda i_0} = e$, де e – одиниця групи G, для всіх $i \in I$ та $\lambda \in \Lambda$. Нехай топологічний простір J є топологічною сумою просторів I та G, а топологічний простір Υ є топологічною сумою просторів Λ та G. Означимо відображення $Q\colon \Upsilon \times J \to G$ (сендвіч-матрицю $Q = (q_{\lambda i})$) за формулою

$$Q(\lambda, i) = \begin{cases} P(\lambda, i), & \text{якщо } \lambda \in \Lambda \text{ та } i \in I; \\ e, & \text{якщо } \lambda \in G \text{ та } i \in I; \\ e, & \text{якщо } \lambda \in \Lambda \text{ та } i \in G; \\ g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot g_1^{-1}, & \text{якщо } \lambda = g_1 \in G \text{ та } i = g_2 \in G. \end{cases}$$

Тоді виконується умова: $q_{\lambda_0 i} = q_{\lambda i_0} = e$, для всіх $i \in J$ та $\lambda \in \Upsilon$, а отже, сендвіч-матриця Q є нормалізовною. Отож, за теоремою Ріса (див. [24, теорема III.2.6]) матрична півгрупа Ріса $T = \mathscr{M}(J, G, \Upsilon; Q)$ над групою G з топологією добутку є цілком простою півгрупою, і очевидно, що півгрупа S топологічно ізоморфна підпівгрупі з T. Для довільних $i \in J$ та $\lambda \in \Upsilon$ елементи (i, e, λ_0) і (i_0, e, λ) є ідемпотентами півгрупи T. Також зауважимо, що елемент (g,g,g) є ідемпотентом півгрупи T для довільного елемента g групи G, оскільки для довільного елемента (i,g,λ) півгрупи T отримаємо, що

$$(i,e,\lambda_0)(g,g,g)(i_0,e,\lambda) = (i, e\cdot q_{\lambda_0 g}\cdot g\cdot q_{gi_0}\cdot e,\lambda) = (i,g,\lambda),$$

то півгрупа T – ідемпотентно породжена.

З твердження 2.2.6 [15] випливає, що відображення $Q\colon \Upsilon\times J\to G$ є неперервним тоді і лише тоді, коли максимальна підгрупа G в S є топологічною групою.

Отже, ми довели теорему.

Теорема 1. *Кожна топологічна парагрупа топологічно ізоморфно занурюється в ідемпотентно породжену топологічну парагрупу.*

За теоремою Уоллеса (див. [29]) кожна компактна проста топологічна півгрупа топологічно ізоморфна компактній топологічній парагрупі $\mathscr{M}(I,G,\Lambda;P)$. Оскільки скінченний добуток компактних просторів і скінченна топологічна сума компактних просторів є компактними просторами (див. [15, теореми 3.2.3 і 3.2.4]), то з конструкції 1 випливає теорема.

Теорема 2. *Кожна проста компактна топологічна півгрупа топологічно ізоморфно занурюється в ідемпотентно породжену просту компактну топологічну півгрупу.*

У [5] доведено, що проста топологічна півгрупа S топологічно ізоморфна топологічній парагрупі, якщо виконується одна з умов:

(1) півгрупа S є цілком простою і всі максимальні підгрупи в S є топологічними групами [5, теорема 1];
(2) півгрупа S містить ідемпотент і її квадрат $S\times S$ – зліченно компактний простір [5, теорема 10];
(3) півгрупа S містить ідемпотент і її квадрат $S\times S$ – псевдокомпактний простір [5, теорема 11];
(4) півгрупа S цілком проста і простір її є псевдокомпактним [5, теорема 12];
(5) півгрупа S є регулярним секвенціально компактним простором [5, теорема 13].

Теорема 3. *Кожна проста топологічна півгрупа S така, що містить ідемпотент, її квадрат $S\times S$ та куб її максимальної підгрупи є зліченно компактними просторами, топологічно ізоморфно занурюється в ідемпотентно породжену (цілком) просту зліченно компактну топологічну півгрупу.*

Доведення. Оскільки простір $S\times S$ зліченно компактний, то за теоремою 10 з [5] топологічна півгрупа є топологічною парагрупою $\mathscr{M}(I,G,\Lambda;P)$. Застосувавши конструкцію 1 до топологічної парагрупи $\mathscr{M}(I,G,\Lambda;P)$, отримуємо, що нам достатньо довести, що топологічний простір півгрупи $\mathscr{M}(J,G,\Upsilon;Q)$ є зліченно компактний. Оскільки проекції

$$\mathrm{pr}_{I\times G\times\Lambda}\colon (I\times G\times\Lambda)^2\to I\times G\times\Lambda, \qquad \mathrm{pr}_{G\times G\times\Lambda}\colon (I\times G\times\Lambda)^2\to G\times G\times\Lambda$$

і $\mathrm{pr}_{I\times G\times G}\colon (I\times G\times\Lambda)^2\to I\times G\times G$ є неперервними відображеннями, то за теоремою 3.10.5 з [15] простори $I\times G\times\Lambda$, $G\times G\times\Lambda$ і $I\times G\times G$ зліченно компактні, оскільки з припущення теореми випливає, що простір $G \times G \times G$ є зліченно компактним, то за теоремою 3.10.10 з [15] простір $\mathscr{M}(J, G, \Upsilon; Q)$ зліченно компактний. $\square$

З теореми 3 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Кожна цілком проста топологічна півгрупа S зі зліченно компактними квадратом $S \times S$ та кубом її максимальної підгрупи топологічно ізоморфно занурюється в ідемпотентно породжену цілком просту зліченно компактну топологічну півгрупу.*

Теорема 4. *Кожна проста топологічна півгрупа S, що містить ідемпотент і її куб $S \times S \times S$ є зліченно компактним простором топологічно ізоморфно занурюється в ідемпотентно породжену (цілком) просту зліченно компактну топологічну півгрупу.*

Доведення. Оскільки простір $S \times S \times S$ зліченно компактний, то з неперервності проекції $\mathrm{pr}_{S \times S} \colon S \times S \times S \to S \times S$ випливає, що квадрат $S \times S$ зліченно компактний простір, тоді за теоремою 10 з [5] топологічна півгрупа є топологічною парагрупою $\mathscr{M}(I, G, \Lambda; P)$. З того, що проекція $\mathrm{pr}_{G \times G \times G} \colon (I \times G \times \Lambda)^3 \to G \times G \times G$ є неперервним відображенням, випливає, що топологічний простір $G \times G \times G$ зліченно компактний, а отже, виконуються припущення теореми 3. $\square$

З теореми 4 випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *Кожна цілком проста топологічна півгрупа S зі зліченно компактним кубом $S \times S \times S$ топологічно ізоморфно занурюється в ідемпотентно породжену цілком просту зліченно компактну топологічну півгрупу.*

Зауваження 1. Зауважимо, що у разі використання конструкції 1 топологічного занурення цілком простих топологічних півгруп в ідемпотентно породжені цілком прості топологічні півгрупи, не можна послабити умови, викладені у теоремах 3 і 4 та наслідках 1 і 2, оскільки при певному теоретико-множинному припущенні (а саме в припущенні $MA_{\mathrm{countable}}$) для довільного натурального числа k існує топологічна група G така, що G^k зліченно компактний простір, а G^{k+1} – ні [28].

Теорема 5. *Кожна проста топологічна півгрупа S, що містить ідемпотент і її квадрат $S \times S$ є псевдокомпактним простором, топологічно ізоморфно занурюється в ідемпотентно породжену (цілком) просту псевдокомпактну топологічну півгрупу.*

Доведення. Оскільки простір $S \times S$ є псевдокомпактним, то за теоремою 11 з [5] топологічна півгрупа є топологічною парагрупою $\mathscr{M}(I, G, \Lambda; P)$. З конструкції 1 випливає таке: достатньо довести, що топологічний простір півгрупи $\mathscr{M}(J, G, \Upsilon; Q)$ є псевдокомпактним. Оскільки проекції

$$\mathrm{pr}_{I \times G \times \Lambda} \colon (I \times G \times \Lambda)^2 \to I \times G \times \Lambda, \qquad \mathrm{pr}_{G \times G \times \Lambda} \colon (I \times G \times \Lambda)^2 \to G \times G \times \Lambda$$

і $\mathrm{pr}_{I \times G \times G} \colon (I \times G \times \Lambda)^2 \to I \times G \times G$ є неперервними відображеннями, то за теоремою 3.10.24 з [15] простори $I \times G \times \Lambda$, $G \times G \times \Lambda$ і $I \times G \times G$ псевдокомпактні, оскільки вони цілком регулярні. За теоремою Комфорта-Росса (див. [12, теорема 1.4]) довільний добуток псевдокомпактних топологічних груп є псевдокомпактним простором, а отже, простір $G \times G \times G$ псевдокомпактний. Далі, використавши теорему 3.10.25 з [15], отримуємо, що простір $\mathscr{M}(J, G, \Upsilon; Q)$ псевдокомпактний. $\square$

З теореми 5 випливає такий наслідок.

Наслідок 3. *Кожна цілком проста топологічна півгрупа S з псевдокомпактним квадратом $S \times S$ топологічно ізоморфно занурюється в ідемпотентно породжену цілком просту псевдокомпактну топологічну півгрупу.*

Теорема 6. *Кожна проста секвенціально компактна топологічна півгрупа S, простір якої є регулярним, топологічно ізоморфно занурюється в ідемпотентно породжену (цілком) просту секвенціально компактну топологічну півгрупу.*

Доведення. Оскільки простір півгрупи S секвенціально компактний, то за теоремою 13 з [5] топологічна півгрупа є топологічною парагрупою $\mathscr{M}(I, G, \Lambda; P)$. З конструкції 1 випливає, що нам достатньо довести, що простір півгрупи $\mathscr{M}(J, G, \Upsilon; Q)$ є секвенціально компактним. Оскільки проекції $\mathrm{pr}_I \colon I \times G \times \Lambda \to I$, $\mathrm{pr}_G \colon I \times G \times \Lambda \to G$ і $\mathrm{pr}_\Lambda \colon I \times G \times \Lambda \to \Lambda$ є неперервними відображеннями, то за теоремою 3.10.32 з [15] простори I, G і Λ секвенціально компактні, а отже, за теоремою 3.10.34 з [15] простір $\mathscr{M}(J, G, \Upsilon; Q)$ секвенціально компактний. $\square$

За теоремою Доббінса-Оуена (див. [13, теорема 1.6] і [20, теорема 3.2]) кожна цілком проста локально компактна топологічна півгрупа S топологічно ізоморфна топологічній парагрупі $\mathscr{M}(I, G, \Lambda; P)$. Оскільки замкнений підпростір локально компактного простору локально компактний (див. [15, теорема 3.3.8]), то з конструкції 1, застосованої до півгрупи $\mathscr{M}(I, G, \Lambda; P)$, випливає, що I, Λ і G – локально компактні простори, а отже, за теоремами 3.3.12 і 3.3.13 з [15] топологічний простір $\mathscr{M}(J, G, \Upsilon; Q)$ локально компактний. Тобто виконується теорема.

Теорема 7. *Кожна цілком проста локально компактна топологічна півгрупа S топологічно ізоморфно занурюється в ідемпотентно породжену цілком просту локально компактну топологічну півгрупу.*

3. Занурення цілком 0-простих топологічних півгруп у цілком 0-прості ідемпотентно породжені топологічні півгрупи.

Конструкція 2. Нехай цілком 0-проста півгрупа S ізоморфна матричній півгрупі Ріса $\mathscr{M}^0(I, G, \Lambda; P)$ над групою з нулем $G^0 = G \cup \{0\}$ та регулярною сендвіч-матрицею P такі, що $I \cap G^0 = \varnothing$ і $\Lambda \cap G^0 = \varnothing$. Нехай $i_0 \notin I \cup G^0$ і $\lambda_0 \notin \Lambda \cup G^0$. Нехай e – одиниця групи G, $J_0 = I \cup \{i_0\} \cup G$ і $\Upsilon_0 = \Lambda \cup \{\lambda_0\} \cup G$. Означимо відображення $Q \colon \Upsilon_0 \times J_0 \to G^0$ за формулою:

$$Q(\lambda, i) = \begin{cases} P(\lambda, i), & \text{якщо } \lambda \in \Lambda \text{ та } i \in I; \\ e, & \text{якщо } \lambda = \lambda_0 \text{ або } i = i_0; \\ e, & \text{якщо } \lambda \in G \text{ та } i \in I; \\ e, & \text{якщо } \lambda \in \Lambda \text{ та } i \in G; \\ g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot g_1^{-1}, & \text{якщо } \lambda = g_1 \in G \text{ та } i = g_2 \in G. \end{cases}$$

Очевидно, що сендвіч-матриця Q є регулярною. Отже, за теоремою Ріса (див. [10, теорема 3.5]) матрична півгрупа Ріса $T = \mathscr{M}^0(J_0, G, \Upsilon_0; Q)$ над групою з нулем G^0 цілком 0-проста півгрупа, і очевидно, що півгрупа S є підпівгрупою в T. Для довільних $i \in J_0$ та $\lambda \in \Upsilon_0$ елементи (i, e, λ_0) і (i_0, e, λ) є ідемпотентами півгрупи T. Також зауважимо, що елемент (g, g, g) є ідемпотентом півгрупи T для довільного елемента g групи G, оскільки для довільного елемента (i, g, λ) півгрупи T отримаємо, що

$$(i, e, \lambda_0)(g, g, g)(i_0, e, \lambda) = (i, e \cdot q_{\lambda_0 g} \cdot g \cdot q_{g i_0} \cdot e, \lambda) = (i, g, \lambda),$$

то півгрупа T ідемпотентно породжена.

Отож, ми довели теорему.

Теорема 8. *Кожна цілком* 0*-проста півгрупа ізоморфно занурюється в цілком* 0*-просту ідемпотентно породжену півгрупу.*

Будемо говорити, що топологічна матрична півгрупа Ріса $\mathscr{M}^0(I, G, \Lambda; P)$ над групою з нулем G^0 з регулярною сендвіч-матрицею P є *топологічною* 0*-парагрупою*, якщо виконуються такі умови:

(i) топологічний простір $\mathscr{M}^0(I, G, \Lambda; P) \setminus \{0\}$ є добутком $I \times G \times \Lambda$ гаусдорфових топологічних просторів I, G та Λ, де G – максимальна підгрупа півгрупи $\mathscr{M}^0(I, G, \Lambda; P)$ і $G \neq \{0\}$;

(ii) максимальна підгрупа G в $\mathscr{M}^0(I, G, \Lambda; P) \setminus \{0\}$ є топологічною групою;

(iii) відображення $P\colon \Lambda \times I \to G^0$ є неперервним.

Теорема 9. *Кожна топологічна* 0*-парагрупа топологічно ізоморфно занурюється в ідемпотентно породжену топологічну* 0*-парагрупу.*

Доведення. Нехай топологічна 0-парагрупа S є топологічною матричною півгрупою Ріса $\mathscr{M}^0(I, G, \Lambda; P)$ над групою з нулем G^0 з регулярною сендвіч-матрицею P і $\mathscr{M}^0(I, G, \Lambda; P)$ задовольняє умови (i) – (iii). Нехай:

а) e – одиниця групи G;

б) J_0 – топологічна сума просторів I, G та ізольованої точки i_0;

в) Υ_0 – топологічна сума просторів Λ, G та ізольованої точки λ_0.

Оскільки відображення $P\colon \Lambda \times I \to G^0$ є неперервним і максимальна підгрупа G в $\mathscr{M}^0(I, G, \Lambda; P) \setminus \{0\}$ є топологічною групою, то з твердження 2.2.6 [15] випливає, що відображення $Q\colon \Upsilon_0 \times J_0 \to G^0$ є неперервним. Означимо топологію на півгрупі $\mathscr{M}^0(J_0, G, \Upsilon_0; Q)$ так: топологічний простір $\mathscr{M}^0(J_0, G, \Upsilon_0; Q)$ є топологічною сумою просторів $\mathscr{M}^0(I, G, \Lambda; P)$, $I \times G \times G$, $I \times G \times \{\lambda_0\}$, $G \times G \times \Lambda$, $G \times G \times G$, $G \times G \times \{\lambda_0\}$, $\{i_0\} \times G \times \Lambda$, $\{i_0\} \times G \times G$ і $\{i_0\} \times G \times \{\lambda_0\}$. Тоді півгрупова операція в $\mathscr{M}^0(J_0, G, \Upsilon_0; Q)$ неперервна і ця півгрупа є топологічною 0-парагрупою. □

Теорема 10. *Кожна* 0*-проста компактна топологічна півгрупа топологічно ізоморфно занурюється в ідемпотентно породжену* 0*-просту компактну топологічну півгрупу.*

Доведення. За теоремою Паалман-де-Міранди (див. [21, теорема 2.3.9]) кожна 0-проста компактна топологічна півгрупа топологічно ізоморфна компактній топологічній 0-парагрупі Ріса $\mathscr{M}^0(I, G, \Lambda; P)$ над компактною групою з нулем G^0, причому топологічні простори I і Λ компактні, а нуль півгрупи $\mathscr{M}^0(I, G, \Lambda; P)$ є ізольованою точкою. Тоді за теоремами 3.2.3 і 3.2.4 з [15] топологічний простір $\mathscr{M}^0(J_0, G, \Upsilon_0; Q)$ компактний, і твердження теореми випливає з конструкції 2. □

Список використаної літератури

1. *Бокуть Л.А.* Некоторые теоремы вложения для колец и полугрупп, I. / *Бокуть Л.А.* // Сиб. мат. журн. – 1963. – Т. 4, №3. – С. 500-518.
2. *Гутик О.В.* Вложение топологических полугрупп / *Гутик О.В.* // Матем. Студії. – 1994. – Т. 3. – С. 10-14.
3. *Гутік О.В.* Про напівгрупу Гауі / *Гутік О.В.* // Мат. методи фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, №4. – С. 127-132.
4. *Гутік О.В.* Занурення топологічних напівгруп у нільпотентно-породжені напівгрупи / *Гутік О.В., Лівач Ю.М.* // Мат. методи фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48, №4. – С. 66-77.
5. *Banakh T.O.* The Rees-Suschkewitsch theorem for simple topological semigroups / *Banakh T.O., Dimitrova S., Gutik O.V.* // Матем. Студії. – 2009. – Т. 31, №2. – С. 211-218.
6. *Benzaken C.* Notion de demi-bande: demi-bande de type deux / *Benzaken C., Mayr H.C.* // Semigroup Forum. – 1975. – Vol. 10. – P. 115-128.
7. *Bruck R.H.* A survey of binary systems, Berlin-Göttingen-Heidelberg: / *Bruck R.H.* // Springer-Verlag. VII, Ergebn. Math., Heft 20, 1958.
8. *Carruth J.H.* The Theory of Topological Semigroups / *Carruth J.H., Hildebrant J.A., Koch R.J.* // Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, Vol. I (1983).
9. *Carruth J.H.* The Theory of Topological Semigroups / *Carruth J.H., Hildebrant J.A., Koch R.J.* // Marcel Dekker, Inc., New York and Basel. Vol. II, 1986.
10. *Clifford A.H.* The Algebraic Theory of Semigroups *Clifford A.H., Preston G.B.* // Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R. I. Vol. I, 1961.
11. *Clifford A.H.* The Algebraic Theory of Semigroups / *Clifford A.H., Preston G.B.* // Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R. I. Vol. II, 1967.
12. *Comfort W.W.* Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups / *Comfort W.W., Ross K.A.* // Pacif. J. Math. – 1966. – Vol. 16, №3. – P. 483-496.
13. *Dobbins J.G.* On the kernel of a locally compact semigroup. / *Dobbins J.G.* // Duke Math. J. – 1972. – Vol. 39, №2. – P. 327-331.
14. *Ellis R.* Locally compact transformation groups / *Ellis R.* // Duke Math. J. – 1957. – Vol. 24, №2. – P. 119-125.
15. *Engelking R.* General Topology / *Engelking R.* // Heldermann, Berlin, 2nd ed., 1989.
16. *Gutik O.* Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt λ^0-extensions / *Gutik O., Pavlyk K., Reiter A.* // Мат. Студії. – 2009. – Т. 32, №2. – С. 115-131.
17. *Gutik O.* On Brandt λ^0-extensions of monoids with zero / *Gutik O., Repovš D.* // Semigroup Forum – 2010. – Т. 80, №1. – С. 8-32.
18. *Howie J.M.* The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation semigroup / *Howie J.M.* // J. London Math. Soc. – 1966. – Vol. 41. – P. 707-716.
19. *Howie J.M.* Embedding semigroups in nilpotent-generated semigroups / *Howie J.M.* // Math. Slovača. – 1989. – Vol. 39, №1. – P. 47-54.
20. *Owen W.S.* The Rees theorem for locally compact semigroups / *Owen W.S.* // Semigroup Forum. – 1973. – Vol. 6. – P. 133-152.
21. *Paalman-de-Miranda W.S.* Topological Semigroup / *Paalman-de-Miranda W.S.* // Mathematical Centre Tracts, Mathematisch Centrum, Amsterdam. Vol. 11, 1964.
22. *Pastijn F.* Embedding semigroups in semibands / *Pastijn F.* // Semigroup Forum. – 1977. – Vol. 14. – P. 247-263.
23. *Petrich M.* Inverse Semigroups / *Petrich M.* – John Wiley & Sons, New York, 1984.
24. *Petrich M.* Completely Regular Semigroups *Petrich M., Reilly N.R.* – John Wiley & Sons, New York, 1999.
25. *Preston G.B.* Embedding any semi-group in a $\mathscr{D}$-simple semigroup / *Preston G.B.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – Vol. 93. – P. 351-355.

26. *Rees D.* On semi-groups / *Rees D.* // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1940. – Vol. 36. – P. 387-400.
27. *Reilly N.R.* Embedding inverse semigroups in bisimple inverse semigroups / *Reilly N.R.* // Quarterly J. Math. Oxford. – 1965. – Vol. 16, №62. – P. 183-187.
28. *Tomita A.H.* A group under $MA_{\text{countable}}$ whose square is countably compact but whose cube is not / *Tomita A.H.* // Topology Appl. – 1999. – Vol. 91, №2. – P. 91-104.
29. *Wallace A.D.* The Suschkewitsch-Rees structure theorem for compact simple semigroups / *Wallace A.D.* // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1956. – Vol. 42. – P. 430-432.

Стаття: надійшла до редакції 25.05.2011
прийнята до друку 14.12.2011

EMBEDDING OF TOPOLOGICAL SEMIGROUPS INTO IDEMPOTENT GENERATED TOPOLOGICAL SEMIGROUPS

Oleg GUTIK, Iryna FIHEL

Ivan Franko Lviv National University,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000
e-mails: o_gutik@franko.lviv.ua, figel.iryna@gmail.com

In this paper we describe a contruction of an embedding of a compact completely (0-)simple semigroup into an idempotent generated compact completely (0-)simple semigroup.

Key words: Topological semigroup, embedding, Rees matrix semigroup, paragroup.

ВЛОЖЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП В ИДЕМПОТЕНТНО ПОРОЖДЁННЫЕ

Олег ГУТИК, Ирина ФИГЕЛЬ

Львовский национальный университет имени Івана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mails: o_gutik@franko.lviv.ua, figel.iryna@gmail.com

Описано конструкцию вложения компактных вполне (0-)простых топологических полугрупп в идемпотентно порождённые компактные вполне (0-)простые топологические полугруппы.

Ключевые слова: топологическая полугруппа, вложение, матричная полугруппа Риса, парагруппа.