ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 158–169
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 158–169

УДК 517.988.63

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ПІВЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ, ЗБУРЕНОЇ НА КОМПЛЕКСНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ШКАЛАХ

Андрій ЛОПУШАНСЬКИЙ

Інститут математики, Ряшівський університет,
ал. Рейтана, 16 А, Ряшів, 35-959
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

Знайдено нові достатні умови класичної розв'язності задачі Коші для півлінійного абстрактного параболічного рівняння, збуреного в комплексній інтерполяційній шкалі, та достатні умови класичної розв'язності нормальних крайових задач для півлінійних параболічних рівнянь, збурених псевдодиференціальними доданками. Побудовано наближення розв'язків збурених задач розв'язками задач із незбуреним оператором.

Ключові слова: півлінійні параболічні рівняння, збурення на інтерполяційних шкалах.

1. Вступ. Теорія абстрактних параболічних рівнянь подана у працях Аммана Х. [1], Лунарді А. [2], Хенрі Д. [3]. В [4] та [5] знайдено дві умови класичної розв'язності задачі Коші для лінійного абстрактного параболічного рівняння $dv(t)/dt = Av(t) + f(t)$, $t \in (0, T]$ з мінімальними припущеннями щодо неоднорідного доданка f при заданому операторі A, який не залежить від змінної t та є необмеженим замкненим секторіальним лінійним оператором від'ємного типу в деякому комплексному банаховому просторі V_0 із щільною областю визначення $\mathscr{D}(A) := V_1 \subset V_0$. У цьому разі на V_1 задано будь-яку норму $\|\cdot\|_{V_1}$, еквівалентну нормі графіка оператора A, тобто простір V_1 банахів, а вкладення $E_{10} : V_1 \hookrightarrow V_0$ неперервне.

Частковий випадок задачі одержимо, коли A є регулярним еліптичним оператором у функційному просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ над обмеженою областю $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, який задовольняє умови параболічності Агмона. У цьому випадку відповідна незбурена задача Коші буде крайовою задачею для неоднорідного диференціального параболічного рівняння. Зазначимо, що досліджувані далі рівняння задачі зі збуреним оператором загалом можуть вже не бути диференціальними.

Ми одержали достатні умови розв'язності задачі Коші для збуреного в комплексній інтерполяційній шкалі, асоційованій з оператором задачі, півлінійного абстрактного параболічного рівняння. Результати проілюстровано у випадку оператора

A, породженого регулярною еліптичною крайовою задачею і збуреної псевдодиференціальними доданками.

2. Основні позначення та допоміжні леми. Нехай $l_\omega = \{re^{i\omega} : r > 0\}$ – промінь із заданим кутом $\omega \in [0, 2\pi]$. Зафіксуємо деякий кут $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$ і зіставимо йому в комплексній площині $\mathbb{C}$ замкнений сектор з виколотою точкою $\{0\}$ і його замикання, відповідно $\Lambda_0 = \cup\{l_\omega : \omega \in [-\omega_0, \omega_0]\}$ і $\Lambda = \Lambda_0 \cup \{0\}$. Нехай задана пара банахових просторів $(V_0, \|\cdot\|_0)$ та $(V_1, \|\cdot\|_1)$ над полем $\mathbb{C}$ з неперервним та щільним вкладенням $E_{10} : V_1 \looparrowright V_0$. Розглянемо клас секторіальних операторів від'ємного типу

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathscr{L}(V_1; V_0) : \sup_{\lambda\in\Lambda} \left\| (\lambda E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(V_0;V_1)} = K(A) < \infty \right\},$$

де стала $K(A)$ залежить тільки від A. Далі будемо досліджувати півлінійну абстрактну параболічну задачу Коші вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = (A + X)v(t) + g_0\bigl(t, v(t)\bigr), \quad t \in (0, T] \\ v(0) = g \in V_1, \end{cases} \tag{1}$$

де збурювальний оператор X є лінійним і необмеженим у вихідному просторі V_0, а для його області визначення $\mathscr{D}(X)$ виконуються вкладення $V_1 \looparrowright \mathscr{D}(X) \looparrowright V_0$, функція g_0 визначена на $[0, T] \times V_1$.

Розглядаються лише такі збурювальні оператори X, для яких сума $A + X$ залишається секторіальним оператором над вихідним простором V_0, тобто для яких задача (1) залишається параболічною. Тоді у випадку лінійної неоднорідної незбуреної задачі (тобто, при $f(t)$ замість $g_0\,(t, v(t))$), використовуючи метод варіації сталих, розв'язок класу

$$C\left([0, T]; V_1\right) \cap C^1\left([0, T]; V_0\right) \tag{2}$$

можна подати у вигляді

$$v(t) = e^{tA}g + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

де e^{tA} – півгрупа, породжена оператором A (відомо [9], що вона рівномірно обмежена та сильно неперервна при $t \geq 0$ над кожним із просторів V_0, V_1).

Без додаткових припущень щодо правої частини f не кожна функція вигляду (3) є розв'зком класу (2) незбуреної задачі. Такими припущеннями щодо f, як відомо, можуть бути умова Гельдера або значно слабша умова Да Прато і Ґрісварда [4] вигляду $f \in C\left([0, T]; I_\vartheta(V)\right)$, де $I_\vartheta(V)$ є довільний простір, породжений неперервним методом інтерполяції банахової пари $V = \{V_0; V_1\}$. У [5] знайдено умову типу Да Прато і Ґрісварда у випадку комплексної інтерполяційної шкали, а саме:

$$f \in C\left([0, T]; V_\vartheta\right), \qquad (0 < \vartheta \leq 1)\,, \tag{4}$$

де $V_\vartheta := \mathscr{D}(-J)^\vartheta$ є областю визначення дробового степеня $(-J)^\vartheta$ довільного секторіального оператора від'ємного типу $J : V_1 \longmapsto V_0$ з не меншою секторіальною областю, ніж заданий оператор A. Варто зауважити, що такий вибір комплексної шкали дає метод розв'язування задачі.

Лема 1. *Якщо* $A \in \mathcal{A}$, $\vartheta \in (0,1)$, $X \in \mathscr{L}(V_\vartheta; V_0)$, *то*

$$A + X|_{V_1} \in \mathcal{A}, \quad \Lambda \subset \varrho(A) \cap \varrho(A+X),$$

де $\varrho(\cdot)$ *позначає резольвентну множину лінійного оператора. У цьому разі*

$$\|R(\lambda, A+X)\|_{\mathscr{L}(V_0)} \leq 2\|R(\lambda, A)\|_{\mathscr{L}(V_0)}, \quad \forall\, \lambda \in \Lambda,$$

де $R(\lambda, A) = E_{10}\,(\lambda E_{10} - A)^{-1}$.

Доведення. У твердженні 2 із [6] доведено оцінку: існує така додатна стала $C'' > 0$, що

$$\left\| \Big(\lambda E_{10} - \frac{A}{s}\Big)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(V_0;V_\vartheta)} \leq \frac{C'' s^\vartheta}{\lambda^{1-\vartheta}} \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}, \quad \forall\, s > 0.$$

Звідси $\|(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(V_0;V_\vartheta)} \leq C''/a^{1-\vartheta}$, а вибираючи $a = \sqrt[1-\vartheta]{2C''\|X\|_{\mathscr{L}(V_\vartheta;V_1)}}$, одержуємо

$$\big\|X(\lambda E_{10} - A)^{-1}\big\|_{\mathscr{L}(V_0)} \leq \|X\|_{\mathscr{L}(V_\vartheta;V_0)} \big\|(\lambda E_{10} - A)^{-1}\big\|_{\mathscr{L}(V_0;V_\vartheta)} \leq \frac{1}{2}.$$

Тоді у банаховій обмежених лінійних операторів алгебрі $\mathscr{L}(V_0)$ збігається ряд

$$\big[E_{00} - XE_{1\vartheta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\big]^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \big[XE_{1\vartheta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\big]^k$$

і $\big\|\big[E_{00} - XE_{1\vartheta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\big]^{-1}\big\|_{\mathscr{L}(V_0)} \leq 2$ для всіх $\lambda \in \Lambda$, де $E_{1\vartheta} \colon V_1 \hookrightarrow V_\vartheta$ позначає тотожне вкладення. Звідси та з резольвентної тотожності вигляду

$$(\lambda E_{10} - A - XE_{1\vartheta})^{-1} = (\lambda E_{10} - A)^{-1}\big[E_{00} - XE_{1\vartheta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\big]^{-1}$$

випливає $\|(\lambda E_{10} - A - XE_{1\vartheta})^{-1}\|_{\mathscr{L}(V_0;V_\vartheta)} \leq 2\|(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(V_0;V_1)}$ для всіх $\lambda \in \Lambda$ та всіх $X \in \mathscr{L}(V_\vartheta; V_0)$, а отже, лема доведена. $\square$

Зауваження 1. Лема 1 поширюється на оператори $X \in \mathscr{L}(U; V_0)$ при певних обмеженнях щодо $\|X\|_{\mathscr{L}(U;V_0)}$, якщо U – довільний правильний проміжний простір банахової пари $\{V_0, V_1\}$ [7].

Надалі вважатимемо, що справджується таке припущення.

Припущення **(A)**: $A, J \in \mathcal{A},\ 0 < \vartheta \leq 1,\ V_\vartheta = \mathscr{D}(-J)^\vartheta,\ X \in \mathscr{L}(V_\vartheta V_0)$, $g \in V_1,\ g_0 \in C\big([0,T] \times V_1;\, V_1\big)$.

З леми 1 та з [8] одержуємо, що при зазначених припущеннях існує єдиний класичний розв'язок $w(t) = e^{t(A+X)}g$ класу $C\big([0,T]; V_1\big) \cap C^1\big([0,T]; V_0\big)$ задачі

$$\frac{dw(t)}{dt} = (A+X)w(t), \qquad v(0) = g. \tag{5}$$

Лема 2. *Якщо виконуються припущення* **(A)** *і функція* $v \in C\big([0,T]; V_1\big)$ *є розв'язком інтегрального рівняння*

$$v(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)(A+XE_{1\vartheta})} g_0(\tau, v(\tau))\, d\tau + e^{t(A+XE_{1\vartheta})} g, \tag{6}$$

то вона належить класу (2) *і є розв'язком задачі Коші* (1).

Доведення. Нехай деяка функція $v \in C\big([0,T];V_1\big)$ є розв'язком інтегрального рівняння (6). За лемою 1, $e^{t(A+XE_{1\theta})}g \in V_1$. Введемо позначення $f(t)=g_0(t,v(t))$. Тоді $f \in C\big([0,T];V_1\big)$. Оскільки оператор A – генератор півгрупи при $t-\tau>0$ [9, с. 139], то при $t-\tau>0$, враховуючи лему 1,

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\tau}^{t}(A+XE_{1\theta})e^{(\varsigma-\tau)(A+XE_{1\theta})}f(\tau)\,d\varsigma=\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d}{d\varsigma}\,e^{(\varsigma-\tau)(A+XE_{1\theta})}f(\tau)\,d\varsigma=\\&=e^{(\varsigma-\tau)(A+XE_{1\theta})}f(\tau)\Big|_{\varsigma=\tau}^{\varsigma=t}=e^{(t-\tau)(A+XE_{1\theta})}f(\tau)-f(\tau),\end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(t)\;&=\int\limits_0^t e^{(t-\tau)(A+XE_{1\theta})}f(\tau)\,d\tau=\\&=\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\tau}^{t}(A+XE_{1\theta})e^{(\varsigma-\tau)(A+XE_{1\theta})}f(\tau)\,d\varsigma\,d\tau=\\&=\int\limits_0^t\left[f(\tau)+(A+XE_{1\theta})\int\limits_{\tau}^{t}e^{(\varsigma-\tau)(A+XE_{1\theta})}f(\tau)\,d\varsigma\right]d\tau=\\&=\int\limits_0^t\Big[f(\tau)+(A+XE_{1\theta})\mathcal{I}(\tau)\Big]\,d\tau.\end{aligned}$$

Звідси $\mathcal{I}'(t)=f(t)+(A+XE_{1\theta})\mathcal{I}(t)$, $\mathcal{I}\in C^1\big(\big[0,T\big];\,V_1\big)$ і якщо функція v є розв'язком інтегрального рівняння (6), а отже, $v(t)\equiv\mathcal{I}(t)$, то v є розв'язком класу (2) задачі (1):

$$\begin{aligned}v'(t)\;&=\mathcal{I}'(t)+(A+XE_{1\theta})e^{t(A+XE_{1\theta})}g=\\&=g_0(t,v(t))+(A+XE_{1\theta})\mathcal{I}(t)+(A+XE_{1\theta})e^{t(A+XE_{1\theta})}g=\\&=g_0(t,v(t))+(A+XE_{1\theta})[\mathcal{I}(t)+e^{t(A+XE_{1\theta})}g]=\\&=g_0(t,v(t))+(A+XE_{1\theta})v(t),\quad t\in(0,T],\\v(0)\;&=g.\end{aligned}$$

Отож, v є розв'язком задачі (1) і лема доведена. □

3. Розв'язність збуреної півлінійної задачі Коші. Введемо скорочені позначення

$$W = C\big([0,T];V_1\big), \quad \|z\|_W = \|z\|_{C([0,T];V_1)} = \max_{t\in[0,T]}\|z(t)\|_{V_1},$$
$$W_1 = C\big([0,T];V_1\big) \cap C^1\big([0,T];V_0\big),$$
$$\|z\|_{W_1} = \max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|z(t)\|_{V_1}, \max_{t\in[0,T]}\|z'(t)\|_{V_0}\right\},$$
$$W_C = \big\{z\in W : \|z\|_W \le C\big\} \text{ – замкнена куля в } W,$$
$$V_{1,C} = \big\{z\in V_1 : \|z\|_{V_1} \le C\big\} \text{ – замкнена куля в } V_1.$$

Вважаємо, що справджується таке припущення.

Припущення **(B)**: Існують такі додатні сталі K_1, K_2, q, C, що
$$\|g_0(t,z)\|_{V_1} \le K_1\|z\|^q_{V_1} \quad \forall\, t\in[0,T], \quad z\in V_{1,C},$$
$$\|g_0(t,z_1) - g_0(t,z_2)\|_{V_1} \le K_2\|z_1 - z_2\|^q_{V_1} \quad \forall\, t\in[0,T], \quad z_1,z_2\in V_{1,C}.$$

Теорема 1. *За припущень* **(A-B)** $\big($*та при додатковому обмеженні* $K_1\|g\|^{q-1}_{V_1} \le \tilde C$ *у випадку* $q\ge 1$, *де* $\tilde C = \tilde C(A,X,q,T)$ *– певна додатна стала*$\big)$, *існує розв'язок* $v\in W_1$ *задачі* (1).

Доведення. Враховуючи лему 2, достатньо довести розв'язність інтегрального рівняння (6) у класі W. За лемами 1, 2 та за припущення щодо g_0 інтегральний оператор H,
$$(Hv)(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)(A+XE_{1\theta})}g_0(\tau,v(\tau))\,d\tau + e^{t(A+XE_{1\theta})}g, \quad v\in W,$$
діє з W в $W_1\subset W$. З результатів [8] випливає оцінка
$$\max_{t\in[0,T]}\big\|(Hv)(t)\big\|_{V_1} \le K\left[T\max_{t\in[0,T]}\big\|g_0(t,v(t))\big\|_{V_1} + C_1\right], \tag{7}$$
де $C_1 = \|g\|_{V_1}$, а K – певна додатна стала $\big($пропорційна такій сталій $B>0$, що $\|R(\lambda,J)\|_{\mathscr{L}(V_0,V_1)} \le B/|\lambda|$ для всіх $\lambda\in\Lambda_0\big)$.

Для доведення існування нерухомої точки оператора H застосуємо принцип Шаудера при $q\in(0,1)$ та принцип стисних відображень при $q\ge 1$. З оцінки (7) для довільної $v\in W_C$ одержуємо
$$\max_{t\in[0,T]}\big\|(Hv)(t)\big\|_{V_1} \le K\left[T\max_{t\in[0,T]}\big\|g_0(t,v(t))\big\|_{V_1} + C_1\right] \le K\left[TK_1\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|^q_{V_1} + C_1\right].$$
Звідси отримуємо нерівність
$$\|Hv\|_W \le K[TK_1C^q + C_1] \qquad \forall\, v\in W_C. \tag{8}$$
За властивостями функції $h(C) := KTK_1C^q + KC_1$ при довільних додатних сталих K, K_1, C_1 у випадку $q\in(0,1)$ та при $KTK_1 < 1$, якщо $q=1$, існує така додатна стала C_0, що при всіх $C > C_0$ виконується $h(C) < C$. Тоді при $C > C_0$ матимемо
$$\|Hv\|_W \le C \qquad \forall\, v\in W_C, \tag{9}$$

а отже, $H : W_C \longmapsto W_C$. Із нерівності

$$K[TK_1C^q + C_1] < rC, \qquad r \in (0,1), \tag{10}$$

випливає існування сталих $C > 0$, при яких виконується (9). Для виконання (10) при $q > 1$ достатньо ([10], с. 320) виконання нерівності

$$\min_{C\geq 0}[h(C) - rC] \leq -KC_1.$$

Доведемо виконання цієї умови при $q > 1$. Число $C_0 = \sqrt[q-1]{\frac{r}{KTK_1q}}$ є точкою мінімуму функції $h(C) - rC$ по C. Знаходимо

$$h(C_0) - rC_0 = C_0\left(KTK_1C_0^{q-1} - r\right) = C_0\left(KTK_1\frac{r}{KTK_1q} - r\right) = -C_0r\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Звідси отримуємо, що $-C_0r\left(1 - \frac{1}{q}\right) \leq -KC_1 \Longleftrightarrow TK_1K^qC_1^{q-1} \leq \frac{r}{q}(q-1)^{q-1}$. Отже, за таких обмежень існує така стала $C > 0$, що виконується (10) та $H : W_C \longmapsto W_C$.

Аналогічно для довільних $v_1, v_2 \in W_C$ отримаємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|(Hv_1)(t) - (Hv_2)(t)\right\|_{V_1} \leq KT\max_{t\in[0,T]}\left\|g_0(t, v_1(t)) - g_0(t, v_2(t))\right\|_{V_1} \leq$$
$$\leq KTK_2\max_{t\in[0,T]}\|v_1(t) - v_2(t)\|_{V_1}^q.$$

Звідси одержуємо неперервність оператора H на W_C.

При $q > 1$ отримаємо

$$\|Hv_1 - Hv_2\|_W \leq KTK_2\|v_1 - v_2\|_W^q \leq KTK_2a^*(q)qC^{q-1}\|v_1 - v_2\|_W,$$

де $a^*(q) = 2^{2-q}$ при $q \in (1,2)$, $a^*(q) = 1$ при $q \geq 2$. Оскільки $KTK_2a^*(q)qC_0^{q-1} = ra^*(q)\frac{K_2}{K_1}$, то вибором числа r $\left(\text{а саме, } r < \min\left\{1, \frac{K_1}{K_2a^*(q)}\right\}\right)$ досягаємо нерівності $KK_2a^*(q)qC_0^{q-1} < 1$. Отже, у випадку $q > 1$ існує таке $C > 0$, що оператор $H : W_C \longmapsto W_C$ стисний на W_C. За принципом стисних відображень інтегральне рівняння (6) має розв'язок у W_C.

Доведемо компактність оператора H на W_C у випадку $q \in (0,1)$. Вище доведена рівномірна обмеженість $\left\|Hv\right\|_W$ для довільної $v \in W_C$. Доведемо одностайну неперервність множини W_C в W. Для довільних $v \in W_C$, $s \in \mathbb{R}$ одержимо

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|(Hv)(t+s) - (Hv)(t)\right\|_{V_1} = \max_{t\in[0,T]}\left\|\int_t^{t+s} e^{(t-\tau)(A+XE_{1\theta})}g_0(\tau, v(\tau))d\tau\right\|_{V_1} \leq$$
$$\leq K^*|s|\max_{t\in[0,T]}\left\|g_0(\tau, v(\tau))\right\|_{\vartheta},$$

де K^* – певна додатна стала [8]. Враховуючи припущення **(B)**, отримаємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|(Hv)(t+s) - (Hv)(t)\right\|_{V_1} \leq |s|K^*K_2C^q.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $s_1 = s_1(C) > 0$ $\left(s_1 = \frac{\varepsilon}{K^*K_2C^q}\right)$, що при всіх $v \in W_C$, $s \in \mathbb{R}$, $|s| < s_1$, маємо $\max_{t\in[0,T]}\left\|(Hv)(t+s) - (Hv)(t)\right\|_{V_1} < \varepsilon$. Ми показали виконання умов принципу Шаудера для оператора H при $q \in (0,1)$. Теорема доведена. $\square$

Зауваження 2. Якщо замість **(B)** виконується припущення,

Припущення **(B1):** існує така стала $K_1 > 0$, що

$$||g_0(t, z_1) - g_0(t, z_2)||_{V_1} \leq K_1 ||z_1 - z_2||_{V_1} \quad \forall\, t \in [0, T], \quad z_1, z_2 \in V_1,$$

то за умов теореми 1, використовуючи метод послідовних наближень, доводимо однозначну розв'язність задачі (1) у класі $C\big([0,T]; V_1\big) \cap C\big([0,T]; V_1\big)$.

4. Наближення розв'язку. В [11] побудовано наближення розв'язку збуреної в комплексних інтерполяційних шкалах задачі Коші для лінійного параболічного рівняння. Подібні наближення можна побудувати для півлінійного рівняння. Введемо позначення

$$G_{l-1}(t, X) := \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{t\lambda} E_{10} (\lambda E_{10} - A)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [X E_{1\theta} (\lambda E_{10} - A)^{-1}]^k d\lambda,$$

де $u_l(t)$ – розв'язок інтегрального рівняння

$$u_l(t) = \int\limits_0^t G_{l-1}(t - \tau, X) g_0(\tau, u_l(\tau)) d\tau + G_{l-1}(t, X) g. \tag{11}$$

Тут контур $\Gamma_{a,\omega} := \big\{re^{i\omega} : r \geq a\big\} \cup \big\{ae^{i\tau} : \tau \in [\omega, 2\pi - \omega]\big\} \cup \big\{re^{-i\omega} : r \geq a\big\}$ обходить спектр оператора в додатному напрямі та $\Gamma_{a,\omega} \in \varrho(A + X E_{1\vartheta})$. У цьому разі інтеграл по $\Gamma_{a,\omega}$ не залежить від вибору числа a: $0 < a < r(A)$ та кута ω: $\omega_0 - c \leq \omega \leq \omega_0$ [7].

Теорема 2. *Нехай $\mathscr{D}(X) = V_\vartheta = \mathscr{D}(-J)^\vartheta$ при деякому $\vartheta \in (0, 1)$ та довільному $J \in \mathcal{A}$. Нехай виконуються припущення* **(A-B)** *при $q \geq 1$ і $u(t)$ є розв'язком класу W_1 задачі* (1)*. Тоді*

$$\max_{t \in [0,T]} \|u(t) - u_l(t)\|_{V_0} \to 0 \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Доведення. Використовуючи зображення півгрупи $e^{t(A + X E_{1\vartheta})}$ за допомогою контурного інтеграла

$$e^{t(A + X E_{1\theta})} = \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{t\lambda} E_{10} (\lambda E_{10} - A - X E_{1\vartheta})^{-1} d\lambda,$$

в [11] виведено оцінку

$$\left\| \left[e^{t(A + X E_{1\theta})} - G_{l-1}(t, X) \right] g \right\|_{\mathscr{L}(V_0)} \leq \frac{B(A, X)}{2^{l-1}} ||g||_{V_0}$$

з певною додатною сталою $B(A, X)$, що не залежить від норми збурювального оператора X. Нехай

$$f(t) = g_0(t, u(t)), \qquad f_l(t) = g_0(t, u_l(t)),$$

$$(H_l u_l)(t) = \int\limits_0^t G_{l-1}(t - \tau, X) g_0(\tau, u_l(\tau)) d\tau + G_{l-1}(t, X) g.$$

З неперервності вкладення $V_1 \hookrightarrow V_0$ випливає існування інтегралів $\int_0^t \|f(t)\|_{V_0} dt$, $\int_0^t \|f_l(t)\|_{V_0} dt$. Тому

$$\begin{aligned}\|Hu - H_l u_l\|_{V_0} &= \left\| \int_0^t [e^{(t-\tau)(A+XE_{1\vartheta})} f(\tau) - G_{l-1}(t-\tau, X) f_l(\tau)] d\tau \right\|_{V_0} = \\ &= \Bigg\| \int_0^t [e^{(t-\tau)(A+XE_{1\vartheta})} - G_{l-1}(t-\tau, X)] f(\tau) d\tau + \\ &\qquad + \int_0^t G_{l-1}(t-\tau, X)[f(\tau) - f_l(\tau)] d\tau \Bigg\|_{V_0} \le \\ &\le \frac{B(A,X)}{2^{l-1}} \int_0^T \|f(\tau)\|_{V_0} d\tau + K'' \int_0^t \|f(\tau) - f_l(\tau)\|_{V_0}\, d\tau\end{aligned}$$

з певною додатною сталою K''. Позначимо $U_{l-1}(t) := u(t) - u_l(t)$. За лемою 1 $Hu = u$, з (11) $H_l u_l = u_l$, а тоді $U_{l-1} = Hu - H_l u_l$. Враховуючи припущення **(B)**, отримаємо

$$\|U_{l-1}(t)\|_{V_0} \le \frac{B(A,X)K_1}{2^{l-1}} \int_0^T \|u(\tau)\|_{V_0}^q d\tau + K'' K_2 \int_0^t \|U_{l-1}(\tau)\|_{V_0}^q d\tau.$$

Оскільки за теоремою 1 існує така додатна стала C, що $||u||_W \le C$, то

$$\|U_{l-1}(t)\|_{V_0} \le \frac{B(A,X)K_1 T C^q}{2^{l-1}} + K'' K_2 \int_0^t \|U_{l-1}(\tau)\|_{V_0}^q d\tau. \tag{12}$$

Розв'язуючи нерівність (12) типу Гронуолла-Белмана $v(t) \le A_1 \int_0^t v^q(\tau) d\tau + B_1$, одержуємо оцінки

$$\|U_{l-1}(t)\|_{V_0} \le \frac{B(A,X)K_1 T C}{2^{l-1}} e^{K'' K_2 t}, \quad t \in [0,T] \quad \text{при} \quad q = 1,$$
$$\|U_{l-1}(t)\|_{V_0} \le \frac{B(A,X)K_1 T C^q}{2^{l-1}} \big[1 - d\big]^{\frac{-1}{q-1}} \quad \text{при} \quad q > 1,$$

де $d = K'' K_2 (q-1) T [B(A,X) K_1 T C^q]^{q-1} < 1$. Враховуючи, що $KTK_1 C^q < rC$ (випливає з доведення теореми 1), при $q > 1$ одержимо

$$\|U_{l-1}(t)\|_{V_0} < \frac{B(A,X) r C}{K 2^{l-1}} \big[1 - d\big]^{\frac{-1}{q-1}},$$

а для виконання умови $d < 1$ достатньо, щоб

$$\frac{K'' K_2 (q-1) B^{q-1}(A,X)}{K_1} \Big(\frac{r}{K}\Big)^q < 1.$$

Виконання останньої умови з врахуванням умов існування розв'язку досягаємо вибором числа r

$$r < \min\left\{1, \frac{K}{B(A,X)}\Big(\frac{K_1 B(A,X)}{K'' K_2(q-1)}\Big)^{\frac{1}{q}}, \frac{K_1}{K_2 a^*(q)}\right\}.$$

З одержаних вище оцінок випливає, що $\max\limits_{t\in[0,T]} ||U_{l-1}(t)||_{V_0} \to 0, \quad l \to +\infty.$ $\square$

Зауваження 3. Враховуючи результати [5], теореми 1 та 2 поширюються на випадок $g_0 \in C\big([0,T] \times V_\eta; V_\vartheta\big)$. У цьому разі одержуємо розв'язок класу $C\big([0,T]; V_{1+\eta}\big)\cap$ $\cap C^1\big([0,T]; V_\eta\big)$, $0 < \eta < \vartheta \le 1$.

5. Розв'язність збуреної півлінійної крайової параболічної задачі. Розглянемо нормальну крайову задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= (L(x,D) + X)u = g_0(x,t,u(x,t)), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \\ B_j u|_{\partial\Omega} &= 0, \qquad j = 1,\dots,m, \qquad u(x,0) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{13}$$

в обмеженій області $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ класу C^∞, де

$$L(x,D) = \sum_{|\gamma|\le 2m} a_\gamma(x) D^\gamma, \qquad a_\gamma(x) \in L_\infty(\Omega)$$

– сильно еліптичний лінійний оператор, тобто такий, для якого виконується нерівність $\mathrm{Re}\, a(x,\zeta) = \mathrm{Re} \sum_{|\gamma|=2m} a_\gamma(x)\zeta^\gamma > 0$, $\forall\, \zeta \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $x \in \overline{\Omega}$,

$$B_j(x,D) = \sum_{|\gamma|\le k_j} b_{j,\gamma}(x) D^\gamma, \qquad b_{j,\gamma} \in C^{2m-k_j}(\partial\Omega), \quad j = 1,\dots,m,$$

– крайові диференціальні вирази, $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, $D^\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{\gamma_n}}$, $\zeta^\gamma = \zeta_1^{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot\zeta_n^{\gamma_n}$. Вважаємо також функції $a_\gamma(x)$ при $|\gamma| = 2m$ неперервними в $\overline{\Omega}$.

Припускаємо, що система $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ нормальна [12, с. 178] і щодо оператора $L(x,D)$ додатково виконуються умови параболічності Агмона [13].

Припущення **(Ag)**: $\forall\, \omega \in [-\omega_0\, \omega_0]$ такого, що $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$,

- $a(x,\xi) \ne e^{i\omega}$;
- для будь-якого дотичного вектора μ_x та нормального вектора ν_x в точці $x \in \partial\Omega$ кожен поліном $\mathbb{C} \ni z \to a(x, \mu_x + z\,\nu_x) - \lambda$, $(\lambda \in l_\omega)$, має рівно m коренів $z_1,\dots,z_m$ з додатною уявною частиною і поліноми $\{b_j\,(x,\, \mu_x + z\,\nu_x)\}_{j=1}^m$ є лінійно незалежними за модулем $\prod_{j=1}^m (z - z_j)$.

Розглянемо замкнений оператор

$$(Av)(x) = L(x,D)\, v(x),$$

заданий у просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ на щільному підпросторі

$$V_1 = H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) := \Big\{v \in H^{2m}_p(\Omega) \ : \ B_j(x,D)v_{\,|\,\partial\Omega} = 0; \ \ j = \overline{1,m}\Big\}.$$

Тут $H_p^{2m}(\Omega)$ – простір беселевих потенціалів, підпростір $H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ замкнений у $H_p^{2m}(\Omega)$ і наділений його нормою.

Припустимо далі, що $0 < \vartheta < 1$,

$$V_\theta = H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) := \Big\{ v \in H_p^{2m\theta}(\Omega) \ \ : \ \ B_j(x,D)v_{\,|\,\partial\Omega} = 0; \ \ j = \overline{1,m} \Big\}$$

з нормою простору беселевих потенціалів $H_p^{2m\vartheta}(\Omega)$ порядку $2m\vartheta$. Це щільний в $L_p(\Omega)$ підпростір, замкнений в $H_p^{2m\vartheta}(\Omega)$).

Нехай задано замкнений в $L_p(\Omega)$ лінійний оператор

$$X: \ H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega).$$

Наприклад, може бути $X = (-\Delta)^{m\vartheta}$, де Δ – оператор Лапласа. Нехай

$$H^{2m}_{p,\{B_j\},C}(\Omega) = \Big\{ v \in H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \ \ : \ \ \|v\|_{H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)} \le C \Big\}$$

– замкнена куля в $H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$.

Припущення **(G)**: $g \in H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega), \ \ g_0 \in C\Big(\Omega \times [0,T] \times H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega);\, L_p(\Omega)\Big)$.

Припущення **(G0)**: Існують такі додатні сталі K_1, K_2, q, C, що

$$\|g_0(x,t,z)\|_{L_p(\Omega)} \le K_1 \|z\|^q_{H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)} \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0,T], \quad z \in H^{2m}_{p,\{B_j\},C}(\Omega),$$

$$\|g_0(x,t,z_1) - g_0(x,t,z_2)\|_{L_p(\Omega)} \le K_2 \|z_1 - z_2\|^q_{H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)}$$
$$\forall\, x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0,T], \quad z_1, z_2 \in H^{2m}_{p,\{B_j\},C}(\Omega).$$

Теорема 3. *Якщо оператор* $L(x,D)$ *задовольняє умови* **(Ag)**, *задовольняється нерівність*

$$k_j < 2m\vartheta - \frac{1}{p} \quad \forall\, j = 1, \ldots, m \tag{14}$$

і виконуються припущення **(G-G0)**, *то (за певних обмежень щодо сталої* $K_1 ||g(x)||^{q-1}_{H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)}$, *якщо* $q \ge 1$*) існує розв'язок задачі* (13) *класу*

$$u \in C\Big(\Omega \times [0,T]; H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big) \cap C^1\Big(\Omega \times [0,T]; L_p(\Omega)\Big).$$

Доведення. Відомо (див. [14, теорема Сілі, с. 400]) таке: якщо для нормальної системи $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ виконуються нерівності (14), то реалізується ізоморфізм банахових просторів

$$H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \simeq \big[L_p(\Omega), H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big]_\vartheta,$$

де справа проміжний простір з показником ϑ, породжений методом комплексної інтерполяції пари $V = \big\{L_p(\Omega),\, H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big\}$. У цьому разі $H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) = \mathscr{D}(J^\vartheta)$ – область визначення дробового степеня оператора

$$J = \big[E_{10} - (-\Delta)^{1/2}\big]^{2m} : \ H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega)$$

(див. [14, 2.5.3]). Це дає змогу до оператора A застосувати відомі результати про інтерполяцію дробовими степенями операторів.

Задачу (13) можна записати у вигляді задачі Коші для півлінійного абстрактного параболічного рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = (A+X)\, v(x,t) \, + g_0(x,t,v(x,t)), \\ v(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{15}$$

На підставі теореми Агмона [13] та результатів [7] існує таке $X\beta \in \mathbb{R}$, що оператор $A_\beta = A + \beta E_{10}$ належить класу $\mathcal{A}$. За допомогою заміни $v = we^{\beta t}$ задача (15) зводиться до задачі такого ж вигляду з оператором A_β замість A та вільним членом $e^{-\beta t} g_0\big(t, w(t)e^{\beta t}\big)$. Для розв'язків класу $C([0,T]; H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L_p(\Omega))$ задачі (15) з оператором A_β використовуємо теорему 1. Теорему доведено. $\square$

Використовуючи [11], для розв'язку задачі (13) також можна побудувати наближення за допомогою резольвенти незбуреного оператора – за допомогою функції Гріна нормальної параболічної крайової задачі [12] та її ітерацій.

Список використаної літератури

1. *Amman H.* Linear and quasilinear parabolic problem. / *Amman H.* – Basel, Boston, Berlin: Birkhauser. – Vol. 1., 1995.
2. *Lunardi A.* Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic equations. / *Lunardi A.* – Basel: Birkhauser, 1995.
3. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. / *Хенри Д.* – М.: Мир, 1985.
4. *Da Prato G.* Equations d'evolution abstractes non lineaire de type parabolique / *Da Prato G., Grisvard P.* // Ann. Mat. Pure Appl. – 1979. – Vol. 120, №4. – P. 329-396.
5. *Лопушанский А.О.* Абстрактная параболическая задача Коши в комплексных интерполяционных шкалах / *Лопушанский А.О.* // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, №12. – С. 1799-1803.
6. *Лопушанський А.О.* Числення секторіальних операторів з від'ємним типом і комплексні інтерполяційні шкали / *Лопушанський А.О.* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, №3. – С. 75-82.
7. *Лопушанський А.О.* Числення секторіальних операторів з від'ємним типом і аналітичні півгрупи / *Лопушанський А.О.* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, №2. – С. 65-73.
8. *Лопушанский А.О.* Сильно неперервні півгрупи збурень абстрактних параболічних рівнянь / *Лопушанский А.О.* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, №4. – С. 19-27.
9. *Клемент Ф.* Однопараметрические полугруппы. / *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* – М.: Мир, 1992.
10. Функциональный анализ / [под общей редакцией С.Г. Крейна.] Сер. "СМБ". – М.: Наука, 1972.
11. *Лопушанский А.О.* Розв'язок крайової задачі для параболічного рівняння, збуреного псевдодиференціальним доданком / *Лопушанский А.О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 115-127.
12. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. / *Ивасишен С.Д.* – К.: Вища шк., 1990.
13. *Tanabe N.* Equations of evolution. / *Tanabe N.* – London: Pitman, 1979.
14. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. / *Трибель Х.* – М.: Мир, 1980.

Стаття: надійшла до редакції 14.09.2011
прийнята до друку 14.12.2011

THE SOLVABILITY OF SEMI-LINEAR CAUCHY PROBLEM, PERTURBED ON COMPLEX INTERPOLATION SCALES

Andriy LOPUSHANSKY

Institute of Mathematics, Rzeszów University,
Al. Rejtana, 16 A, Rzeszo'w, 35-959
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

New sufficient conditions of classical solvability of the Cauchy problem for semilinear abstract parabolic equation, perturbed on complex interpolation scale, and sufficient conditions of classical solvability of the boundary value problems for semilinear parabolic equations by pseudo-differential operators, are obtained. Approximations of solutions of perturbed problems by solutions of non-perturbed problems with a given operator are constructed.

Key words: semilinear parabolic equations, perturbations on interpolation scales.

РАЗРЕШИМОСТЬ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОШИ, ВОЗМУЩЕННОЙ НА КОМПЛЕКСНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ШКАЛАХ

Андрей ЛОПУШАНСКИЙ

Институт математики, Жешовский университет,
ал. Рейтана, 16 А, Жешов, 35-959
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

Найдено новые достаточные условия классической разрешимости задачи Коши для полулинейного абстрактного параболического уравнения, возмущенного в комплексной интерполяционной шкале, достаточные условия классической разрешимости нормальных краевых задач для полулинейных параболических уравнений, возмущенных псевдодифференциальными слагаемыми. Построено приближения решений возмущенных задач решениями задач с невозмущенным оператором.

Ключевые слова: полулинейные параболические уравнения, возмущения на интерполяционных шкалах.