ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76. С. 7-20
Visnyk of the Lviv University. Series Mech.-Mat. Issue 76. P. 7-20

УДК 517.956

ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ДО ЗАДАЧІ НІКОЛЕТТІ З НЕВІДОМИМИ ВНУТРІШНІМИ МЕЖАМИ

Володимир КИРИЛИЧ[1], **Андрій ФІЛІМОНОВ**[2]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*
[2] *Московський державний університет шляхів сполучення, вул. Образцова, 15 127994 Москва, Росія*

Доведено існування та єдиність ліпшицевого розв'язку деякого варіанту задачі Ніколетті.
Ключові слова: задача Ніколетті, невідомі межі, гіперболічна система квазілінійних рівнянь.

Вступ. Задача Ніколетті [1–3] полягає у відшуканні розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_j}{dx} = g_j(x, y_1, \dots, y_n), \quad j \in \{1, \dots, n\}, \tag{1}$$

яка задовольняє умови

$$y_j(x_j) = b_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \tag{2}$$

де $d_0 \le x_j \le d_1$, а $d_0, d_1, b_j (j \in \{1, \dots, n\})$ – задані сталі величини. При такому формулюванні задача є розв'язною для достатньо малого значення $d_1 - d_0$ (див., наприклад, [2], де також розглянуто інші можливі варіанти задачі Ніколетті). Ми отримали теорему про розв'язність задачі Ніколетті без додаткового припущення про малість значення $d_1 - d_0$. Проте значення x_j у цьому разі вже не будуть заданими сталими величинами.

Розглянемо деякий видозмінений варіант цієї задачі, в якому точки x_j в умовах (2) "рухаються" з часом вздовж невідомих ліній $x_j = s_j(t)$, які задовольняють певну систему рівнянь. Ці лінії також підлягають визначенню разом з розв'язком системи (1). Такий варіант задачі природно виникає під час аналізу сингулярних гіперболічних систем рівнянь з частинними похідними такого типу.

Повне формулювання задачі виглядає так. У прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x,t) \mid 0 \le x \le \mathbf{l}, 0 \le t \le T_0\}$, де $\mathbf{l} > 0$, $T_0 > 0$ – деякі сталі, розглядаємо систему

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{k}_i(x,t,u,v)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u,v),\ i \in \{1,\ldots,m\}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x,t,u,v),\ j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}s_k(t) = r_k(s(t),t,u(s_k(t),t),v(s_k(t),t)), k \in \{1,\ldots,n\}, \tag{5}$$

де $u = (u_1,\ldots,u_m)^T$, $v = (v_1,\ldots,v_n)^T$, $s = (s_1,\ldots,s_n)^T$, а $\mathbf{k}$ – матриця $m \times m$.

Для функцій u_i $(i \in \{1,\ldots,m\})$ ставимо природні початкові та крайові умови [4]. Функції s_j, v_j задовольняють умови

$$s_j(0) = c_j,\ j \in \{1,\ldots,n\},\ 0 \le c_j \le \mathbf{l}\ , \tag{6}$$

$$v_j(s_j(t),t) = \beta_j(t),\ j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{7}$$

де функції $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$ і сталі c_j $(j \in \{1,\ldots,n\})$ задані.

У працях [4–6] доведено локальну та глобальну узагальнену й класичну коректні розв'язності згаданої задачі для системи (3)–(5) у випадку, коли система (3) записана в інваріантах (тобто, коли матриця $\mathbf{k}(x,t,u,v)$ є діагональною). Проте запропоноване нами доведення розв'язності розглянутого випадку задачі Ніколетті є не тільки, на наш погляд, самостійним результатом, а й може бути використане для вивчення гіперболічних систем у випадку, коли несингулярна частина системи (3)–(5) має загальний вигляд (3).

Розв'язність задачі. У прямокутнику $\Pi(T)$, $T \le T_0$ будемо розглядати неперервні за змінними (x,t) і ліпшицеві за x функції $u : \Pi(T) \to R^m$, $v : \Pi(T) \to R^n$ зі сталими Ліпшиця L_1^u, L_1^v, відповідно. Простори цих функцій з рівномірною нормою позначимо, відповідно, через $\mathbf{E}_0^u$, $\mathbf{E}_0^v$.

Нехай функції $\beta_j, q_j, r_k, j \in \{1,\ldots,n\}$, $k \in \{1,\ldots,n\}$ – неперервні в своїх областях визначення і задовольняють локальну умову Ліпшиця за всіма аргументами, крім, можливо, аргументу t. Сталі Ліпшиця для зазначених функцій будемо позначати відповідними великими буквами з індексами, що відповідають аргументам, наприклад, Q_1, Q_3, Q_4 означатимуть сталі Ліпшиця функції $(x,t,u,v) \to q_j(x,t,u,v)$ за аргументами $x, u, v,$ відповідно, а R_1, R_3, R_4 – сталі Ліпшиця функції $(s,t,u,v) \to r_k(x,t,u,v)$ за аргументами $s, u, v,$ відповідно.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Рівняння (4) і (5) з урахуванням умов (6) і (7) перепишемо у вигляді

$$v_j(x,t) = \beta_j(t) + \int\limits_{s_j(t)}^{x} q_j(x,t,u(x,t),v(x,t))dx,\ j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{8}$$

$$s_k(t) = c_k + \int\limits_0^t r_k(s(t),t,u(s_k(t),t),v(s_k(t),t))dt,\ k \in \{1,\ldots,n\}. \tag{9}$$

Припустимо, що виконуються умови.

N1. Нехай функції $(x,t,u,v) \to q_j(x,t,u,v)$, $(s,t,u,v) \to r_k(x,t,u,v)$ $j \in \{1,\ldots,n\}$ не залежать від тих v_p, для яких $c_p \neq c_j$.

N2. Нехай існує стала Q_0 така, що для всіх $j \in \{1,\ldots,n\}$ виконується нерівність: $|q_j(x,t,u,v)| \leq Q_0(1+|v|)$.

Відповідно до наведених вище припущень, функції r, q обмежені в своїх областях визначення. Нехай $w = (u,v)$ і

$$D^1 = [0,T_0] \times \{w \mid w \in R^{m+n}, \|w\| \leq P_0\},$$
$$D^2 = [0,T_0] \times [0,1]^n \times \{w \mid w \in R^{m+n}, \|w\| \leq P_0\},$$

де P_0 - деяка стала, $[0,1]^n \subset R^n$.

Введемо позначення

$$\max_{D^2} |r| \leq R,\ \max_{D^1} |q| \leq Q,\ \max_{[0,T]} |\beta| \leq B.$$

Зауваження 1. Випадок, коли одна або декілька c_j дорівнюють 0 або 1, не розглядаємо. В цьому разі при $c_j = 0$ додатково вимагаємо, щоб $r_j \geq 0$, а при $c_j = 1$ - відповідно, $r_j \leq 0$. Інші міркування в цих випадках будуть аналогічні до наведених нижче. Для того, щоб не перевантажувати викладення, далі розгляд цих випадків опускаємо і вважаємо, що $c_j \neq 0, c_j \neq 1$ для всіх $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Зробимо припущення.

N3. Нехай значення T>0 вибране так, що

$$0 \leq c_j - RT < c_j < c_j + RT \leq 1, \quad j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Лема 1. При сформульованих вище припущеннях для всіх $u \in \mathbf{E}_0^u, v \in \mathbf{E}_0^v$ існує T>0 таке, що на [0,T] маємо єдиний розв'язок системи (9).

Доведення леми випливає з відомої теореми існування та єдиності розв'язку для системи звичайних диференціальних рівнянь [7].

Розв'язок системи (9) $s_j(t)$, зрозуміло, залежить від вибору функцій u, v. Для акцентування на цьому будемо деколи використовувати позначення $s_j(t;u,v)$.

Зафіксуємо деяке $j_0 \in \{1,\ldots,n\}$ і позначимо через J_{j_0} ту множину індексів k, для яких $c_k = c_{j_0}$. Розглянемо систему (8) для $j \in J_{j_0}$. Для кожної фіксованої $u \in \mathbf{E}_0^u$ і для кожного $t \in [0,T]$ для системи (8) виникає аналог задачі Ніколетті з невідомими точками $x_j = s_j(t;u,v), j \in J_{j_0}$, які залежать від розв'язку (8) і від заданої функції $u \in \mathbf{E}_0^u$. Ця залежність визначена системою (9) при $k \in J_{j_0}$.

Означення 1. Для кожної $u \in \mathbf{E}_0^u$ розв'язком системи (8), (9) будемо називати пару $\{v,s\}$, де $v \in \mathbf{E}_0^v$ – розв'язок (8), а s – неперервний розв'язок (9).

Виконується така теорема.

Теорема 1. Для кожної $u \in \mathbf{E}_0^u$ існує T>0 таке, що в $\Pi(T)$ існує єдиний розв'язок системи (8), (9).

Доведення. Зафіксуємо деяку $u \in \mathbf{E}_0^u$ і приймемо $\breve{v},\hat{v} \in E_0^v$. Із леми 1 випливає: існує T>0 таке, що при $t \in [0,T], j \in \{1,\ldots,n\}$ існують єдині розв'язки $s_j(t;u,\breve{v})$, $s_j(t;u,\hat{v})$, які деколи до скорочення будемо позначати через $\breve{s}_j(t)$ і $\hat{s}_j(t)$.

Зафіксуємо довільне $j_0 \in \{1,\ldots,n\}$. На підставі умови N1 далі достатньо аналізувати тільки $j \in J_{j_0}$. Розглянемо

$$
\begin{aligned}
| s_j(t;u,\breve{v}) - s_j(t;u,\hat{v}) | &\le \int_0^t | r_j(\breve{s}(t),t,u(\breve{s}(t),t),\breve{v}(\breve{s}(t),t)) - \\
&\quad - r_j(\hat{s}(t),t,u(\hat{s}(t),t),\hat{v}(\hat{s}_j(t),t)) \,|\, dt \le \\
&\le \int_0^t [(R_1 + R_3 L_1^u) \max_{p \in J_{j0}} | \breve{s}_p(t) - \hat{s}_p(t) | + \\
&\quad + R_4 \max_{p \in J_{j0}} | \breve{v}_p(\breve{s}_j(t),t) - \hat{v}_p(\hat{s}_j(t),t) \pm \breve{v}_p(\hat{s}_j(t),t) |]dt \le
\end{aligned}
$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\leq \int_0^t [(R_1 + R_3 L_1^u) \max_{p \in J_{j0}} | \breve{s}_p(t) - \hat{s}_p(t) | + R_4 \; || \breve{v} - \hat{v} ||] dt \leq$$

$$\leq R_4 T \; || \breve{v} - \hat{v} || + \int_0^t (R_1 + R_3 L_1^u + R_4 L_1^v) \max_{p \in J_{j0}} | \breve{s}_p(t) - \hat{s}_p(t) | \, . \tag{10}$$

Застосуємо до (10) лему Гронуолла-Белмана й одержимо оцінку

$$| s_j(t; u, \breve{v}) - s_j(t; u, \hat{v}) | \leq R_4 E T \; || \breve{v} - \hat{v} ||, \tag{11}$$

де $E = \exp(R_1 + R_3 L_1^u + R_4 L_1^v) T$.

Зафіксуємо тепер $t \in (0, T]$ і розглянемо відрізок (рис. 1)

$$l_{(t)} = \left\{ x \;\middle|\; c_{j_0} - Rt \leq x \leq c_{j_0} + Rt \right\}. \tag{12}$$

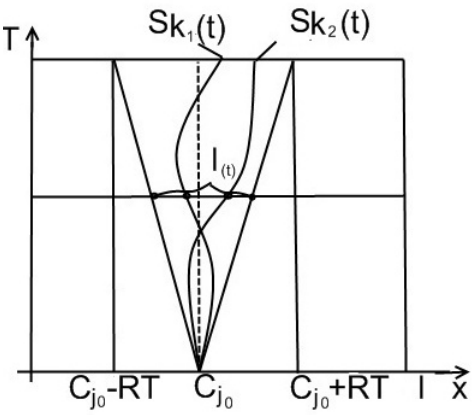

Рис. 1

Очевидно, що $| \mathbf{l}_{(t)} | = 2Rt$. Розглянемо кулю

$$\mathbf{E}_{(t)}^v = \left\{ v \in \mathbf{E}_0^v \;\middle|\; \max_{x \in l_{(t)}} | v(x,t) - \beta(t) | \leq V_1 \right\},$$

де $V_1 > 0$ – деяка стала така, що $V_1 + B < V$.

Для всіх $j \in J_{j_0}$ розглянемо оператор, що діє на v, як функцію x за фіксованого параметра t

$$\mathrm{B}_t \{v\}_j(x) = \beta_j(t) + \int_{s_j(t;u,v)}^{x} q_j(x, t, u(x,t), v(x,t)) dx. \tag{13}$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Тоді для $x \in \mathbf{l}_{(t)}$ одержимо

$$| \mathrm{B}_t\{v\}_j(x) - \beta_j(t) | \le Q \, | x - s_j(t;u,v) | \le 2Rt, \tag{14}$$

тобто при $2RT \le V_1$ оператор $\mathrm{B}_t : \mathbf{E}^v_{(t)} \to \mathbf{E}^v_{(t)}$ (ліпшицевість $\mathrm{B}_t\{v\}$ за x зі сталою Q очевидна, тому достатньо вважати, що $L^v_1 \ge Q$). Далі нехай $\check{s}_j(t) \le \hat{s}_j(t)$. Усі можливі випадки взаємного розміщення $\check{s}_j(t)$ і $\hat{s}_j(t)$ зображені на рис. 2.

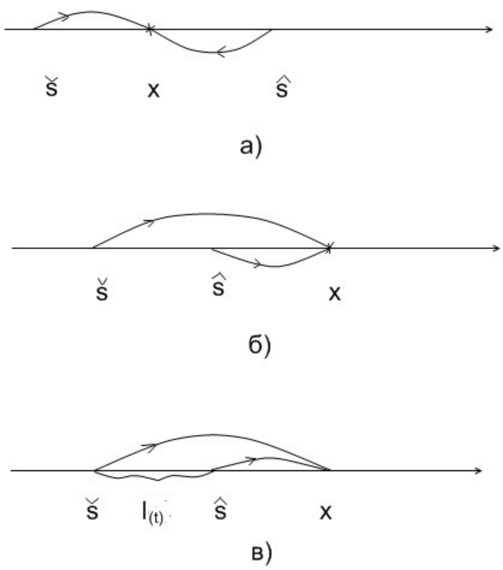

Рис. 2.

Якщо $\check{s}_j(t) \le x \le \hat{s}_j(t)$, то

$$| \mathrm{B}_t\{\check{v}\}_j(x) - \mathrm{B}_t\{\hat{v}\}_j(x) | \le$$
$$\le \left| \int_{\check{s}_j}^{x} q_j(x,t,u(x,t),\check{v}(x,t))dx - \int_{\hat{s}_j}^{x} q_j(x,t,u(x,t),\hat{v}(x,t))dx \right| \le$$
$$\le \int_{\check{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} 2Q dx \le 2Q \, | \hat{s}_j(t) - \check{s}_j(t) | \le 2QR_4ET \, \| \check{v} - \hat{v} \| \tag{15}$$

на підставі оцінки (11).

Якщо ж $\check{s}_j(t) \le \hat{s}_j(t) \le x,$ то

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$|\mathrm{B}_t\{\tilde{v}\}_j(x) - \mathrm{B}_t\{\hat{v}\}_j(x)| \le \left|\int_{\tilde{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} q_j(x,t,u(x,t),\tilde{v}(x,t))dx\right| +$$

$$+\left|\int_{\tilde{s}_j}^{x}(q_j(x,t,u(x,t),\tilde{v}(x,t)) - q_j(x,t,u(x,t),\hat{v}(x,t)))dx\right| \le$$

$$\le Q\,|\hat{s}_j(t) - \tilde{s}_j(t)| + \int_{\hat{s}_j(t)}^{x} Q_4\,\|\tilde{v} - \hat{v}\|\,dx \le$$

$$\le QR_4ET\,\|\tilde{v} - \hat{v}\| + Q_4\,\|\tilde{v} - \hat{v}\|\,|x - \hat{s}_j(t)|\,. \tag{16}$$

Оскільки ж $x \in \mathbf{l}_{(t)}$, то $|x - \hat{s}_j(t)| \le 2Rt$. Тому з (16) одержимо

$$|\mathrm{B}_t\{\tilde{v}\}_j(x) - \mathrm{B}_t\{\hat{v}\}_j(x)| \le (QR_4E + 2Q_4R)T\,\|\tilde{v} - \hat{v}\|\,. \tag{17}$$

Із (15) та (17) випливає, що при

$$T < \min\left\{\frac{1}{2QR_4E}, \frac{1}{QR_4E + 2Q_4R}\right\} \tag{18}$$

оператор B_t відображає кулю $\mathbf{E}^{v}_{(t)}$ в себе і буде стискувальним. Це доводить існування і єдиність розв'язку системи (8)–(9) при $x \in \mathbf{l}_{(t)}$.

Далі на підставі умови N2 можна стандартним способом продовжити розв'язок $v(x,t)$ за x на весь відрізок $[0,\mathbf{l}]$. Оскільки розв'язок $v(x,t)$ уже визначений у точках $x = c_j \pm Rt$, то одержуємо задачу Коші з початковими умовами в цих точках, що й завершує доведення теореми 1.

Зазначимо, що неперервність за x, t і ліпшицевість за x функції v відразу випливає з (9), причому можна взяти $L_1^v = Q$. Щодо функцій s, то відповідно до зроблених припущень, із (9) отримаємо їхню гладкість.

У теоремі 1 функція $\overset{(0)}{u} \in E_0^u$ була фіксована, і для кожної такої функції (на підставі цієї ж теореми 1) існує єдиний розв'язок системи

$$\begin{cases} v = \mathrm{B}(\overset{(0)}{u}, v, s), \\ s = \mathrm{C}(\overset{(0)}{u}, v, s). \end{cases} \tag{19}$$

Тут через оператори B і C позначимо праві частини системи (8) і (9), відповідно.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Як ми вже згадували, отримані результати можна застосовувати для дослідження гіперболічних систем з несингулярною частиною (3) загального вигляду. Враховуючи ці застосування, сформулюємо такі дві теореми.

Нехай тепер маємо фундаментальну послідовність $\{\overset{(k)}{u}\}$, для всіх $\overset{(k)}{u} \in \mathbf{E}_0^u$. Розглянемо відповідні послідовності розв'язків системи (19).

Справджується така теорема.

Теорема 2. Для кожних $\breve{u},\hat{u} \in E_0^u$ існує T>0 і сталі $M_1^0 > 0, M_2^0 > 0$ такі, що для відповідних розв'язків системи (19) $(\breve{v},\breve{s}),(\hat{v},\hat{s})$ виконуються нерівності

$$||\breve{v} - \hat{v}|| \le M_1^0 \, ||\breve{u} - \hat{u}||, \, ||\breve{s} - \hat{s}|| \le M_2^0 \, ||\breve{u} - \hat{u}|| \, .$$

Доведення. Нехай $\breve{u},\hat{u} \in E_0^u$. Тоді на підставі (19) можна знайти відповідні $(\breve{v},\breve{s})$ і $(\hat{v},\hat{s})$.

Для кожної множини J_{j_0} розглянемо

$$|\breve{s}_j(t;\breve{u},\breve{v}) - \hat{s}_j(t;\hat{u},\hat{v})| \le |\int_0^t [r_j(\breve{s}(t),t,\breve{u}(\breve{s}(t),t),\breve{v}(\breve{s}(t),t)) -$$

$$-r_j(\hat{s}(t),t,\hat{u}(\hat{s}(t),t),\hat{v}(\hat{s}(t),t))]dt | \le \int_0^t [R_1 \max_{p\in J_{j0}} |\breve{s}_p(t) - \hat{s}_p(t)| +$$

$$+R_3 \, |\breve{u}(\breve{s}_j(t),t) - \hat{u}(\hat{s}_j(t),t) \pm \breve{u}(\hat{s}_j(t),t)| + R_4 \, |\breve{v}(\breve{s}_j(t),t) -$$

$$+R_3 \, ||\breve{u} - \hat{u}|| + R_4 \, ||\breve{v} - \hat{v}||]dt \le (R_3 + R_4)T(||\breve{u} - \hat{u}|| + ||\breve{v} - \hat{v}||) +$$

$$+\int_0^t (R_1 + R_3 L_1^u + R_4 L_1^u) \max_{p\in J_{j0}} |\breve{s}_p(t) - \hat{s}_p(t)| \, dt. \tag{20}$$

Застосуємо до (20) лему Гронуолла-Белмана, одержимо

$$\max_{p\in J_{j0}} |\breve{s}_p(t;\breve{u},\breve{v}) - \hat{s}_p(t;\hat{u},\hat{v})| \le (R_3 + R_4)ET(||\breve{u} - \hat{u}|| + ||\breve{u} - \hat{u}||), \tag{21}$$

де $E = \exp((R_1 + R_3 L_1^u + R_4 L_1^v)T)$.

Нехай тепер для визначеності, $\breve{s}_j(t) \le \hat{s}_j(t)$.

Розглянемо $|\breve{v}_j(x,t) - \hat{v}_j(x,t)|$. Якщо $\breve{s}_j(t) \le x \le \hat{s}_j(t)$, то на підставі (21) одержимо

$$|\breve{v}_j(x,t)-\hat{v}_j(x,t)| \le \int\limits_{\breve{s}_j}^{x} q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\breve{v}(x,t))dx \, -$$

$$-\int\limits_{\hat{s}_j}^{x} q_j(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{v}(x,t))dx \;| \le \int\limits_{\breve{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} |\, q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\breve{v}(x,t))\,|\, dx \, +$$

$$+\int\limits_{\breve{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} |\, q_j(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{v}(x,t))\,|\, dx \le$$

$$\le 2Q\,|\,\hat{s}_j(t)-\breve{s}_j(t)\,| \le 2Q(R_3+R_4)ET(||\,\breve{u}-\hat{u}\,||+||\,\breve{v}-\hat{v}\,||). \qquad (22)$$

Якщо ж $\breve{s}_j(t) \le \hat{s}_j(t) \le x \le c_{j0}+RT,$ то

$$|\breve{v}_j(x,t)-\hat{v}_j(x,t)| \le \int\limits_{\breve{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\hat{v}(x,t))dx \, +$$

$$+\int\limits_{\hat{s}_j}^{x} |\, q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\breve{v}(x,t)) - q_j(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{v}(x,t))dx \;| \le$$

$$\le Q\,|\,\hat{s}_j(t)-\breve{s}_j(t)\,| + (Q_3\,||\,\breve{u}-\hat{u}\,|| + Q_4\,||\,\breve{v}-\hat{v}\,||)\,|\,x-\hat{s}_j(t)\,|\,. \qquad (23)$$

Оскільки в розглянутому випадку $x \in \mathbf{l}_{(t)}$, то із (23) з урахуванням (21) одержимо

$$|\breve{v}_j(x,t)-\hat{v}_j(x,t)| \le Q(R_3+R_4)ET(||\,\breve{u}-\hat{u}\,||+||\,\breve{v}-\hat{v}\,||)+$$

$$+(Q_3\,||\,\breve{u}-\hat{u}\,|| + Q_4\,||\,\breve{v}-\hat{v}\,||)2RT \le MT(||\,\breve{u}-\hat{u}\,||+||\,\breve{v}-\hat{v}\,||), \qquad (24)$$

де $M = 2\max\{Q(R_3+R_4)E,(Q_3+Q_4)R\}$.

Зрештою, якщо $\breve{s}_j(t) \le \hat{s}_j(t) \le c_{j0}+RT \le x \le \mathbf{l},$ то з урахуванням (24) одержимо

$$|\breve{v}_j(x,t)-\hat{v}_j(x,t)| \le \int\limits_{\breve{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\breve{v}(x,t))dx \, +$$

$$+\int\limits_{\hat{s}_j}^{c_{j0}+RT} |\, q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\breve{v}(x,t)) - q_j(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{v}(x,t))dx \;| +$$

$$+\int_{c_{j0}+RT}^{x} |\, q_j(x,t,\tilde{u}(x,t),\tilde{v}(x,t)) - q_j(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{v}(x,t))\, dx \,| \le$$

$$\le MT(\|\tilde{v}-\hat{v}\| + \|\tilde{u}-\hat{u}\|) + \int_{c_{j0}+RT}^{x} [Q_3\, \|\tilde{u}-\hat{u}\| +$$

$$+\max_{p\in J_{j0}} |\, \tilde{v}_p(x,t) - \hat{v}_p(x,t)\,|]dx \le MT\, \|\tilde{v}-\hat{v}\| +$$

$$+M_1T\, \|\tilde{u}-\hat{u}\| + \int_{c_{j0}+RT}^{x} Q_4 \max |\, \tilde{v}_p(x,t) - \hat{v}_p(x,t)\,| dx, \tag{25}$$

де $M_1 = \max\{MT, Q_3 \mathbf{l}\}$.

Застосуємо до (25) лему Гронуолла-Белмана й одержимо

$$\max_{p\in J_{j0}} |\, \tilde{v}_p(x,t) - \hat{v}_p(x,t)\,| \le (MT\, \|\tilde{v}-\hat{v}\| + M_1\, \|\tilde{u}-\hat{u}\|)\exp(Q_4 \mathbf{l}). \tag{26}$$

Нерівність (26) справджується для всіх $j_0 \in \{1,\ldots,n\}$.

Отже, зіставляючи (24), (27), (28), одержуємо, що

$$\|\tilde{v}-\hat{v}\| \le MT\, \|\tilde{v}-\hat{v}\| \exp(Q_4 \mathbf{l}) + M_1\, \|\tilde{u}-\hat{u}\|. \tag{27}$$

Виберемо $T>0$ так, щоб

$$MT\exp(Q_4 \mathbf{l}) < 1.$$

Тоді

$$\|\tilde{v}-\hat{v}\| \le \frac{M_1}{1-MT\exp(Q_4 \mathbf{l})} \|\tilde{u}-\hat{u}\|. \tag{28}$$

Крім того, з (21) і (27) випливає, що

$$\|\tilde{s}(t)-\hat{s}(t)\| \le (R_3+R_4)ET\left(\frac{M_1}{1-MT\exp(Q_4 \mathbf{l})}+1\right)\|\tilde{u}-\hat{u}\|. \tag{29}$$

Звідки й отримаємо твердження теореми 2 при

$$M_1^0 = \frac{M_1}{1-MT\exp(Q_4 \mathbf{l})},\quad M_2^0 = (R_3+R_4)ET\Big(\frac{M_1}{1-MT\exp(Q_4 \mathbf{l})}+1\Big).$$

Зауваження 2. Для спрощення викладення всі твердження доведені в припущеннях виконання умови Ліпшиця для вихідних даних задачі. Однак

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

цілком аналогічно можна отримати подібні результати в разі заміни умови Ліпшиця відповідними умовами Каратеодорі за змінною t.

Зазначимо важливий частинний випадок теореми 2.

Наслідок 1. Нехай $Q_3 = 0$. Тоді з (25) і (28) одержимо, що

$$\| \breve{v} - \hat{v} \| \le \frac{MT}{1 - MT\exp(Q_4 l)} \| \breve{u} - \hat{u} \|,$$

тобто можна записати

$$\| \breve{v} - \hat{v} \| \le \rho(T) \| \breve{u} - \hat{u} \|, \tag{30}$$

де $\rho(T) \to 0^+$ при $T \to 0^+$.

N4. Додатково вважатимемо, що функції q і β задовольняють умову Ліпшиця за t зі сталими Q_2 і B_2, відповідно.

Нехай $u \in E^u$ (нагадаємо, що це простір ліпшицевих за x, t функцій $u : \Pi(T) \to R^m$ зі сталими L_1^u, L_2^u, відповідно).

Теорема 3. Нехай $u \in E^u$ і додатково виконується умова N4 щодо функцій β, q, r. Тоді функція $(x,t) \to v(x,t)$, що задовольняє систему (8), (9), є ліпшицевою за t зі сталою

$$L_2^v = \max\left(2QR + B_2, B_2 + QR + Q_2 l + Q_3 L_2^u\right) e^{Q_4 l}. \tag{31}$$

Доведення. Нехай $u \in E^u$ і пара (v,s) задовольняє систему

$$\begin{cases} v = \mathrm{B}\{u,v,s\}, \\ s = \mathrm{C}\{u,v,s\}. \end{cases}$$

Для кожного фіксованого $j_0 \in \{1,\ldots,n\}$ і $j \in J_{j_0}$ та $t^1, t^2 \in [0,T]$ розглянемо

$$| v_j(x,t^1) - v_j(x,t^2) | \le B_2 \, | t^1 - t^2 | + \Bigg| \int\limits_{s_j(t^1)}^{x} q_j(\xi, u(\xi,t^1), v(\xi,t^1)) d\xi -$$

$$- \int\limits_{s_j(t^2)}^{x} q_j(\xi, u(\xi,t^2), v(\xi,t^2)) d\xi \Bigg|.$$

Нехай $s_j(t^1) \le x \le s_j(t^2)$. Тоді

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\left| \int_{s_j(t^1)}^{x} q_j(\xi,u(\xi,t^1),v(\xi,t^1))d\xi - \int_{s_j(t^2)}^{x} q_j(\xi,u(\xi,t^2),v(\xi,t^2))d\xi \right| \le$$

$$\le \int_{s_j(t^1)}^{s_j(t^2)} |q_j(\xi,u(\xi,t^1),v(\xi,t^1))|\,d\xi + \int_{s_j(t^1)}^{s_j(t^2)} |q_j(\xi,u(\xi,t^2),v(\xi,t^2))|\,d\xi \le$$

$$\le 2Q\,|s_j(t^2)-s_j(t^1)| \le 2QR\,|t^2-t^1|. \qquad (32)$$

Якщо ж $s_j(t^1) \le s_j(t^2) \le x$, то

$$\left| \int_{s_j(t^1)}^{x} q_j(\xi,u(\xi,t^1),v(\xi,t^1))d\xi - \int_{s_j(t^2)}^{x} q_j(\xi,u(\xi,t^2),v(\xi,t^2))d\xi \right| \le$$

$$\le \left| \int_{s_j(t^1)}^{s_j(t^2)} |q_j(\xi,u(\xi,t^1),v(\xi,t^1))|\,d\xi \right| + \int_{s_j(t^2)}^{x} |q_j(\xi,u(\xi,t^1),v(\xi,t^1)) -$$

$$-q_j(\xi,u(\xi,t^1),v(\xi,t^1))|\,d\xi \le QR\,|t^2-t^1| + \int_{s(t^2)}^{x} \Big(Q_2\,|t^2-t^1| + Q_3L_2^u\,|t^2-t^1| +$$

$$+Q_4\,|v(\xi,t^2)-v(\xi,t^1)|\Big)d\xi \le (QR + Q_2 l + Q_3L_2^u)\,|t^2-t^1| +$$

$$+\int_0^x Q_4 \max_{\xi,j\in J_{j_0}} |v_j(\xi,t^2)-v_j(\xi,t^1)|\,d\xi.$$

Отже,

$$\max_{x,j\in J_{j_0}} v_j(x,t^1)-v_j(x,t^2) \le (B_2 + QR + Q_2 l + Q_3L_2^u)\,|t^2-t^1| +$$

$$+\int_0^x Q_4 \max_{\varsigma,j,J_{j0}} |v_j(\xi,t^2)-v_j(\xi,t^1)|\,d\xi.$$

З цього на підставі леми Гронуолла–Белмана та (32) одержимо (31).
Важливий частинний випадок.

Наслідок 2. Нехай $Q_3 = 0$. Тоді з (31) одержимо, що стала Ліпшиця L_2^v не залежить від L_2^u.

Список використаної літератури

1. *Nicoletti O.* Sulle condizioni iniziali che determiniano gli integrali della equazioni differenziali ordinare / O. Nicoletti // Atti della R. Acc. Sc. – Torino. – 1897-1898. – Vol. 33. – P. 746–759.
2. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.
3. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. – К. : Наук. думка, 1984.
4. *Кирилич В. М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / В. М. Кирилич, А. М. Филимонов // Матем. студії. – 2008. – Т. 30. – № 1. – С. 42–60.
5. *Кирилич В.* Локальна гладка розв'язність задачі з вільними межами для сингулярних гіперболічних систем квазілінійних рівнянь / Володимир Кирилич, Андрій Філімонов // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 115–151.
6. *Кирилич В.* Глобальна гладка розв'язність гіперболічної квазілінійної задачі Валле-Пуссена з вільними межами / Володимир Кирилич, Андрій Філімонов // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 38–65.
7. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. – М. : МГУ, 1984.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ЗАДАЧЕ НИКОЛЕТТИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ВНУТРЕННИМИ ГРАНИЦАМИ

Владимир КИРИЛИЧ[1], **Андрей ФИЛИМОНОВ**[2]

[1]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина
[2]*Московский государственный университет путей сообщения,*
ул. Образцова, 15, 127994 Москва, Россия

Доказано существование и единственность липшицевого решения некоторого варианта задачи Николетти.

Ключевые слова: задача Николетти, неизвестные грани, гиперболическая система квазилинейных уравнений.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

SOME REMARKS FOR FREE BOUNDARY NICOLETTI'S PROBLEM

Volodymyr KYRYLYCH[1], Andrij FILIMONOV[2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine
[2]*Moskov State University of Railway Engineering,*
Obrazcova Str., 15 127994 Moskov, Russia

The existence and uniqueness of Lipschitz solution of a variant of Nicoletti's problem are proved. We obtained some results which may be applied to hyperbolic system of quasi-linear partial differential equations.

Key words: Nicoletti's problem, unknown boundaries, hyperbolic system of quasi-linear partial differential equations.

Стаття надійшла до редколегії 20.01.12
Прийнята до друку 31.05.12