ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76. С. 21-28
Visnyk of the Lviv University. Series Mech.-Mat. Issue 76. P. 21-28

УДК 539.3

ЕФЕКТ МЕЖОВОГО ШАРУ В НЕСТАЦІОНАРНІЙ ПЛОСКІЙ ДЕФОРМАЦІЇ ЦИЛІНДРА ЗА НЕНУЛЬОВИХ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Віталій ГАЛАЗЮК, **Георгій СУЛИМ**, **Андрій ПРОКОПІВ**

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розв'язана плоска динамічна задача теорії пружності для циліндра за ненульових початкових умов та існування на його поверхні межового шару (наноплівки). З'ясовано, що за певних механічних властивостей межового шару існує ефект фокусування нормальних напружень на осі циліндра.

Ключові слова: динамічна задача теорії пружності, початкові умови, ефект фокусування напружень.

У класичному формулюванні нестаціонарних задач теорії пружності у переміщеннях зазвичай початкові умови приймають нульовими для уникнення потреби виконання узгодженості крайових умов з початковими, як того потребує коректне [1] формулювання задач математичної фізики. Зазначимо, що початкові умови на переміщення і швидкості задаються у всьому тілі, тому однозначно визначають початкові напруження у ньому, враховуючи його межу. У цьому разі початкові розподіли переміщень і швидкостей зумовлюють початкову механічну енергію тіла, тому є визначальними для його подальшого руху. Подальша зміна енергії у кожній точці тіла буде визначатися його фізико-механічними властивостями, геометрією та крайовими умовами, які разом забезпечуватимуть напрям та інтенсивність енергетичних потоків.

У запропонованому формулюванні нестаціонарної задачі межу циліндра відповідно до відомого [2] ефекту реставрації поверхні моделюємо межовим шаром (наноплівкою). Введений у розгляд межовий шар реалізує початковий розподіл нормального напруження на поверхні циліндра і створює стежаче нормальне довантаження, яке забезпечує існування заникаючого в часі (дисипативного) нестаціонарного процесу.

1. Тіло циліндричної форми віднесемо до циліндричної системи координат $\left(\boldsymbol{R}\alpha, \beta, \boldsymbol{R}\gamma\right)$, де $\boldsymbol{R}$ – радіус циліндра, і вважатимемо, що вектор пружного переміщення u має тільки одну радіальну складову $\boldsymbol{R u}_{\alpha}\left(\alpha, \tau\right)$, яка не дорівнює нулю. У цьому випадку рівняння руху пружного тіла в переміщеннях

$$\boldsymbol{c}_1^2 \boldsymbol{graddiv}\, \mathrm{u} - \boldsymbol{c}_2^2 \boldsymbol{rotrot}\, \mathrm{u} = \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \boldsymbol{t}^2}$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

зводиться до одного хвильового рівняння

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha\left(\alpha\partial_\alpha\theta\right)=\partial_\tau^2\theta\,,\quad 0\le\alpha\le 1\,,\tag{1}$$

стосовно об'ємної деформації $\theta\left(\alpha,\tau\right)=\alpha^{-1}\partial_\alpha\left(\alpha\boldsymbol{u}_\alpha\right)$. В рівнянні (1) ∂_α і ∂_τ – оператори диференціювання за α і τ, відповідно, $\tau=\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{t}\boldsymbol{R}^{-2}$ – безрозмірний час, $\boldsymbol{c}_1^2=\left(\lambda+2\mu\right)/\mu$ – швидкість поширення поздовжніх хвиль.

Розв'язок рівняння в частинних похідних (1) подамо інтегралом Фур'є за часовою змінною

$$\theta\left(\alpha,\tau\right)=\int\limits_0^\infty\xi\boldsymbol{A}\left(\xi,\boldsymbol{q}\right)\mathrm{J}_0\left(\xi\alpha\right)\sin\xi\tau\boldsymbol{d}\xi+\int\limits_0^\infty\xi\boldsymbol{B}\left(\xi,\boldsymbol{q}\right)\mathrm{J}_0\left(\xi\alpha\right)\cos\xi\tau\boldsymbol{d}\xi\,,\tag{2}$$

де $\boldsymbol{A}\left(\xi,\boldsymbol{q}\right)$ і $\boldsymbol{B}\left(\xi,\boldsymbol{q}\right)$ – довільні функції, які визначаються початковими умовами задачі; $\boldsymbol{q}>0$ – параметр; $\mathrm{J}_0\left(\xi\alpha\right)$ – функція Бесселя нульового порядку. Якщо функція $\theta\left(\alpha,\tau\right)$ (2) знайдена, то відповідно до її означення шляхом інтегрування знайдемо, що

$$\boldsymbol{u}_\alpha\left(\alpha,\tau\right)=\int\limits_0^\infty\boldsymbol{A}\left(\xi,\boldsymbol{q}\right)\mathrm{J}_1\left(\xi\alpha\right)\sin\xi\tau\boldsymbol{d}\xi+\int\limits_0^\infty\boldsymbol{B}\left(\xi,\boldsymbol{q}\right)\mathrm{J}_1\left(\xi\alpha\right)\cos\xi\tau\boldsymbol{d}\xi\,.\tag{3}$$

За відомим радіальним переміщенням $\boldsymbol{u}_\alpha\left(\alpha,\tau\right)$ (3) та об'ємною деформацією $\theta\left(\alpha,\tau\right)$ (2) і законом Гука знайдемо радіальне напруження через функції $\boldsymbol{A}\left(\xi,\boldsymbol{q}\right)$ і $\boldsymbol{B}\left(\xi,\boldsymbol{q}\right)$

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(\alpha,\tau\right)=\mu\left\{\int\limits_0^\infty\xi\boldsymbol{A}\left(\xi,\boldsymbol{q}\right)\left[\boldsymbol{k}^2\,\mathrm{J}_0\left(\xi\alpha\right)-\mathrm{J}_2\left(\xi\alpha\right)\right]\sin\xi\tau\boldsymbol{d}\xi+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^\infty\xi\boldsymbol{B}\left(\xi,\boldsymbol{q}\right)\left[\boldsymbol{k}^2\,\mathrm{J}_0\left(\xi\alpha\right)-\mathrm{J}_2\left(\xi\alpha\right)\right]\cos\xi\tau\boldsymbol{d}\xi\right\}.\tag{4}$$

2. Розглянемо рух циліндра за заданого початкового розподілу переміщення

$$\boldsymbol{u}_\alpha\left(\alpha,0\right)=\boldsymbol{u}_\alpha^0\alpha\boldsymbol{f}\left(\alpha^2\right),\ 0\le\alpha\le 1\,,$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

у площині його перерізу і відсутності початкової швидкості $\partial_\tau \boldsymbol{u}_\alpha(\alpha, 0) = 0$. Тоді у поданні (3) $\boldsymbol{A}(\xi, \boldsymbol{q}) = 0$, а для визначення функції $\boldsymbol{B}(\xi, \boldsymbol{q})$ одержимо інтегральне рівняння першого роду

$$\int_0^\infty \boldsymbol{B}(\xi, \boldsymbol{q}) \mathrm{J}_1(\xi\alpha) \boldsymbol{d}\xi = \boldsymbol{u}_\alpha^0 \alpha \boldsymbol{f}(\alpha^2), \ 0 \le \alpha \le 1, \tag{5}$$

розв'язок якого подамо узагальненим рядом [3] Неймана

$$\boldsymbol{B}(\xi, \boldsymbol{q}) = \sum_{\boldsymbol{n}=0}^\infty \boldsymbol{a_n} \frac{\mathrm{J}_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^{\boldsymbol{q}}}, \ \boldsymbol{q} > 0, \tag{6}$$

з невідомими коефіцієнтами $\boldsymbol{a_n}$.

Якщо ряд (6) підставити в інтегральне рівняння (5) і обчислити інтеграл Вебера-Шафгейтліна [4], то одержимо ряд

$$\sum_{\boldsymbol{n}=0}^\infty \boldsymbol{a_n} \frac{\Gamma(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{q} + 2)\alpha \,\mathrm{F}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{q} + 2; -\boldsymbol{n}; 2; \alpha^2)}{2^{\boldsymbol{q}} \Gamma(\boldsymbol{n} + 1)} = \boldsymbol{u}_\alpha^0 \alpha \boldsymbol{f}(\alpha^2), \ 0 \le \alpha \le 1. \tag{7}$$

Гіпергеометрична функція Гаусса $\mathrm{F}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{q} + 2; -\boldsymbol{n}; 2; \alpha^2)$ в поданні (7) є поліномом степеня $2\boldsymbol{n}$, тому відповідно до апроксимаційної теореми Вейєрштрасса про наближення неперервної функції поліномом існує єдиний набір коефіцієнтів $\boldsymbol{a_n}$, які забезпечують виконання рівняння (7).

За відомими коефіцієнтами $\boldsymbol{a_n}$ і функцією $\boldsymbol{B}(\xi, \boldsymbol{q})$ (6) визначимо переміщення у часі точок площини перерізу циліндра

$$\boldsymbol{u}_\alpha(\alpha, \tau) = \sum_{\boldsymbol{n}=0}^\infty \boldsymbol{a_n} \int_0^\infty \frac{\mathrm{J}_1(\xi\alpha) \mathrm{J}_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^{\boldsymbol{q}}} \cos \xi\tau \boldsymbol{d}\xi, \tag{8}$$

а також нормальні напруження

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \tau) = \mu \sum_{\boldsymbol{n}=0}^\infty \boldsymbol{a_n} \int_0^\infty \frac{\mathrm{J}_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^{\boldsymbol{q}-1}} \left[\boldsymbol{k}^2 \mathrm{J}_0(\xi\alpha) - \mathrm{J}_2(\xi\alpha)\right] \cos\xi\tau \boldsymbol{d}\xi, \tag{9}$$

які виникають внаслідок руху за законом (8) і створюють стежаче нормальне довантаження поверхні циліндра. Внаслідок цього динамічний процес у циліндрі завжди заникаючий в часі (дисипативний), хоча у рівнянні руху (1) дисипативних членів немає.

Інтеграли у поданнях (8) і (9) обчислюються числовими методами, проте на осі циліндра $\alpha = 0$ нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \tau)$ обчислюється

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

точно. За формулою (9) при $\alpha = 0$ для напруження $\sigma_{\alpha\alpha}\left(\alpha,\tau\right)$ одержимо розривний інтеграл Фур'є

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right) = \mu\boldsymbol{k}^2\sum_{\boldsymbol{n}=0}^{\infty}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{J}_{2n-q+2}\left(\xi\right)}{\xi^{\boldsymbol{q}-1}}\cos\xi\tau\boldsymbol{d}\xi\,, \tag{10}$$

тому в інтервалі $0 \le \tau \le 1$

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right) = \mu\boldsymbol{k}^2\sum_{\boldsymbol{n}=0}^{\infty}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}\frac{\Gamma\left(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{q}+2\right)\mathrm{F}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{q}+2;-\boldsymbol{n};\frac{1}{2};\tau^2)}{2^{\boldsymbol{q}-1}\Gamma\left(\boldsymbol{n}+1\right)}\,, \tag{11}$$

а в інтервалі $1 \le \tau \le \infty$

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right) = \mu\boldsymbol{k}^2\sum_{\boldsymbol{n}=0}^{\infty}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{q}+2\right)\mathrm{F}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{q}+2;\boldsymbol{n}-\boldsymbol{q}+\frac{5}{2};2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{q}+3;\tau^{-2})}{2^{\boldsymbol{q}-1}\Gamma\left(2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{q}+3\right)\Gamma\left(-\boldsymbol{n}+\boldsymbol{q}-\frac{3}{2}\right)\tau^{2\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{q}+4}}\,. \tag{12}$$

З умови існування розривного інтеграла Фур'є [4] та враховуючи умови існування інтеграла Вебера-Шафгейтліна [4] в виразі (8), отримаємо обмеження

$$\frac{1}{2} < \boldsymbol{q} < 2\,. \tag{13}$$

Нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right)$ на осі циліндра має різні аналітичні вирази (11), (12) в інтервалі $0 \le \tau \le 1$ і $1 \le \tau \le \infty$. Оскільки процес руху циліндра в часі повинен бути неперервним і обмеженим, то будемо вимагати виконання таких граничних умов:

$$\lim_{\tau\to 1-0}\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right) = \lim_{\tau\to 1+0}\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right),\ \lim_{\tau\to\infty}\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right) = 0\,. \tag{14}$$

Позаяк гіпергеометрична функція Гаусса $\mathrm{F}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c};\boldsymbol{x}^2)$ існує і обмежена при $\boldsymbol{x} < 1$ та в точці $\boldsymbol{x} = 1$ за умови $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} > 0$, то рівності (14) будуть виконуватися $\forall\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}_0$, якщо

$$\frac{3}{2} \le \boldsymbol{q} < 2\,. \tag{15}$$

За виконання нерівності (15) усі характеристики напружено-деформованого стану є неперервними й обмеженими.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

3. Як приклад розглянемо випадок, коли початковий розподіл радіального переміщення $u_\alpha\left(\alpha,0\right)$ є лінійним за змінною α. Тоді в інтегральному рівнянні (5) $f\left(\alpha^2\right)=1$ і з рівняння (7) одержимо, що

$$a_0=\frac{2^q u_\alpha^0}{\Gamma\left(2-q\right)},\ a_n=0\quad \forall n\in N .$$

Тому за поданнями (8) та (9) у цьому випадку знайдемо

$$u_\alpha\left(\alpha,\tau\right)=\frac{2^q u_\alpha^0}{\Gamma\left(2-q\right)}\int_0^\infty \frac{J_1\left(\xi\alpha\right)J_{2-q}\left(\xi\right)}{\xi^q}\cos\xi\tau d\xi\,, \tag{16}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(\alpha,\tau\right)=\frac{2^q u_\alpha^0\mu}{\Gamma\left(2-q\right)}\int_0^\infty\left[k^2 J_0\left(\xi\alpha\right)-J_2\left(\xi\alpha\right)\right]\frac{J_{2-q}\left(\xi\right)}{\xi^{q-1}}\cos\left(\xi\tau\right)d\xi\,. \tag{17}$$

Отже, радіальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}\left(\alpha,\tau\right)$ формулою (17) визначене у всіх точках поперечного перерізу циліндра, враховуючи його межу $\alpha=1$, яка рухається за законом (16), тому не може бути задана довільно.

За поданням (17) обчислимо поведінку в часі напруження $\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right)$ на осі циліндра. Відповідно до виразів (11) та (12) отримаємо в інтервалі часу $0\le\tau\le 1$

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right)=2\mu k^2 u_\alpha^0 \tag{18}$$

і є сталим, а в інтервалі часу $1\le\tau\le\infty$

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right)=2\mu k^2 u_\alpha^0\sqrt{\pi}\,\frac{F\left(2-q;\frac{5}{2}-q;3-q;\tau^{-2}\right)}{\tau^{4-2q}\Gamma\left(3-q\right)\Gamma(q-\frac{3}{2})}=$$

$$=2\mu k^2 u_\alpha^0\sqrt{\pi}\,\frac{F\left(1;\frac{1}{2};3-q;\tau^{-2}\right)}{\tau\left(\tau^2-1\right)^{1.5-q}\Gamma\left(3-q\right)\Gamma(q-\frac{3}{2})}\,. \tag{19}$$

Зазначимо, що згідно з виразом (19) при $\frac{1}{2}<q<\frac{3}{2}$ напруження $\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right)$ при $\tau=1$ необмежено зростає, зокрема при $q=1$ має кореневу особливість.

На рисунках зображено графіки переміщень $\boldsymbol{u}_{\alpha}^{*}\left(1,\tau\right)=\boldsymbol{u}_{\alpha}\left(1,\tau\right)/\boldsymbol{u}_{\alpha}^{0}$ та напружень $\sigma_{\alpha\alpha}^{*}\left(0,\tau\right)=\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right)/2\mu\boldsymbol{k}^{2}\boldsymbol{u}_{\alpha}^{0}$ залежно від різних значень параметра $\boldsymbol{q}$.

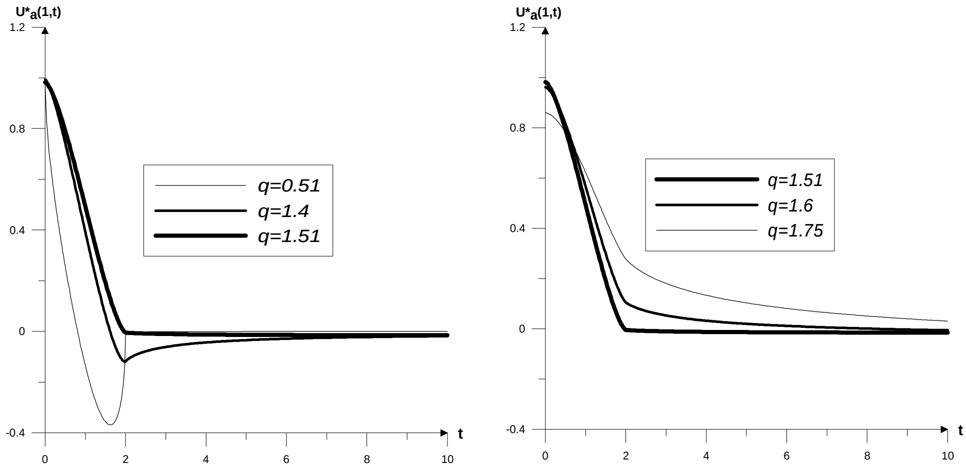

Рис. 1. Переміщення на поверхні циліндра за різних значень параметра $\boldsymbol{q}$

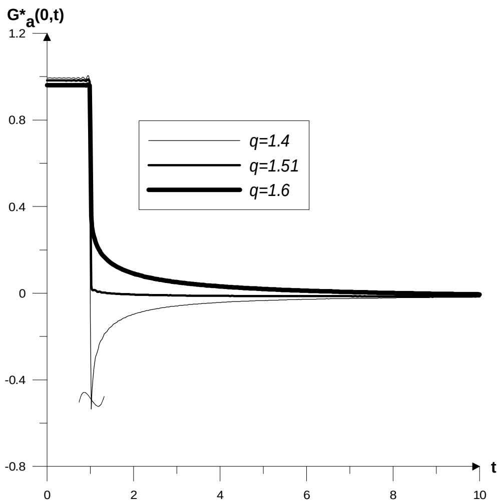

Рис. 2. Напруження в центрі циліндра за різних значень параметра $\boldsymbol{q}$

4. Висновки. Запропоновано формулювання і метод розв'язування динамічної задачі теорії пружності для циліндра за ненульових початкових умов і припущення про існування на його поверхні межового шару (наноплівки). Доведено, що характер руху суттєво залежить від параметра $\boldsymbol{q}$, для якого виявлені межі зміни, який можна трактувати як певну

механічну характеристику межового шару. З'ясовано, що за лінійного розподілу переміщень у початковий момент часу нормальні напруження на осі циліндра є сталими в інтервалі часу $0 \le \tau \le 1$, неперервними при $\tau = 1$ і заникають при $\tau \to \infty$, якщо $\frac{3}{2} \le \boldsymbol{q} < 2$. Якщо $\frac{1}{2} < \boldsymbol{q} < \frac{3}{2}$, що рівнозначне можливості переміщення межі циліндра в область $\alpha < 1$, то нормальні напруження на осі циліндра при $\tau = 1$ необмежено зростають, що підтверджує існування ефекту фокусування напружень.

Список використаної літератури

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964.
2. *Наумовец А.Г.* Использование поверхностных фазовых переходов для управления свойствами поверхностей / А.Г. Наумовец // Прогресивні матеріали і технології: У 2-х т. – К.: Академперіодика, 2003. – Т. 2. – С. 319–351.
3. *Галазюк В.А.* Ограниченное решение краевой задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого тела с абсолютно жестким дискообразным включением нулевой толщины / В.А. Галазюк // ДАН УССР. – Сер. А. – №12. – 1987.
4. *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / Абрамовиц М., Стиган И. – М. : Наука, 1979.

ЭФФЕКТ ГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРА ПРИ НЕНУЛЕВЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Виталий ГАЛАЗЮК, **Георгий СУЛИМ**, **Андрей ПРОКОПИВ**

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

Решена плоская динамическая задача теории упругости для цилиндра при ненулевых начальных условиях и существовании граничного слоя (нанопленки) на его поверхности. Установлено, что при некоторых механических свойствах граничного слоя наблюдается эффект фокусирования нормальных напряжений на оси цилиндра.

Ключевые слова: динамическая задача теории упругости, начальные условия, эффект фокусирования напряжений.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

BOUNDARY LAYER EFFECT IN TIME-DEPENDENT PLANE DEFORMATION OF A CYLINDER IN THE CASE OF NONZERO INITIAL CONDITIONS

Vitaliy GALAZYUK, Heorhiy SULYM, Andriy PROKOPIV

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

Flat time-dependent problem of the elasticity theory for a deformation of a cylinder in the case of nonzero initial conditions and existence of the boundary layer (nanolayer) on the cylinder surface has been solved. Normal stress-focusing on the axis of a cylinder effect in the case of certain mechanical qualities of the boundary layer has been revealed.

Key words: time-dependent problem of the elasticity theory, initial conditions, stress-focusing effect.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.2011
Прийнята до друку 31.05.2012