ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76. С. 46-55
Visnyk of the Lviv University. Series Mech.-Mat. Issue 76. P. 46-55

УДК 517.95

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Галина ЛОПУШАНСЬКА[1], Андрій ЛОПУШАНСЬКИЙ[2]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*
[2]*Інститут математики Ряшівського університету, Алея Тадеуша Рейтана, 16 35-959 Ряшів, Польща*

Одержано оцінки фундаментального розв'язку рівняння

$$u_t^{(\beta)} - \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j}^{(\alpha)} = \delta(x,t), \quad (x,t) \in R^{n+1}$$

з частинними дробовими похідними Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$, $u_{x_j}^{(\alpha)}$ та сталими коефіцієнтами b_j, $j = \overline{1,n}$ за умови $\sum_{j=1}^{n} b_j p_j^{\alpha} \geq C_0$ для всіх $p \in R^n, |p| = 1$.

Ключові слова: похідна дробового порядку, узагальнена функція, фундаментальний розв'язок, Н-функція Фокса.

Побудові фундаментальних функцій операторів з частинними дробовими похідними присвячено праці [1–7] та ін. Ми узагальнюємо результат [7] на випадок однорідного еліптичного оператора з дробовими похідними та сталими коефіцієнтами (замість оператора $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ у [7]). Одержані результати мають застосування для розв'язності задачі Коші для таких рівнянь (зокрема і у просторі узагальнених функцій, наприклад, у [8]) та при дослідженні дифузійних процесів [5].

Нехай $D(R^n) = C_0^{\infty}(R^n)$ – простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в R^n, $D'(R^n)$ – простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на $D(R^n)$, (f,φ) – значення $f \in D'(R^n)$ на основній функції $\varphi \in D(R^n)$.

Розглянемо оператор з дробовими похідними

$$Au(x) = A(x,\partial)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} a(x,\xi)(Fu)(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi = F^{-1}_{\xi \to x}[a(x,\xi)(F_{x\to\xi}u)(\xi)],$$

$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}})$, де $\boldsymbol{Fu}$ – перетворення Фур'є функції $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \xi) = \sum\limits_{\boldsymbol{j}=0}^{\boldsymbol{N}} \sum\limits_{|\gamma|=\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{j}} \le \boldsymbol{S}} \boldsymbol{a}_{\gamma}(\boldsymbol{x})(-\boldsymbol{i}\xi)^{\gamma}$ (скорочений запис $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \xi) = \sum\limits_{|\gamma| \le \boldsymbol{s}} \boldsymbol{a}_{\gamma}(\boldsymbol{x})(-\boldsymbol{i}\xi)^{\gamma}$), $\gamma = (\gamma_1, \mathbf{K}, \gamma_{\boldsymbol{n}})$, $\gamma_{\boldsymbol{j}}$, $\boldsymbol{j} = 1, \mathbf{K}, \boldsymbol{n}$ – невід'ємні числа, які можуть бути дробовими, $|\gamma| = \gamma_1 + \mathbf{K} + \gamma_{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{i}^2 = -1$, $(-\boldsymbol{i}\xi)^{\gamma} = (-\boldsymbol{i}\xi_1)^{\gamma_1} \cdot (-\boldsymbol{i}\xi_{\boldsymbol{n}})^{\gamma_{\boldsymbol{n}}}$, $\boldsymbol{a}_{\gamma} \in \boldsymbol{C}^{\infty}(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}})$.

Позначаємо через $\hat{*}$ операцію згортки узагальненої функції $\boldsymbol{g}$ та основної функції φ ([9], с. 111): $(\boldsymbol{g} \,\hat{*}\, \varphi)(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{g}(\xi), \varphi(\boldsymbol{x} + \xi))$, через $*$ позначаємо операцію згортки узагальнених функцій $\boldsymbol{f}$ і $\boldsymbol{g}$ ([9], с. 111) – узагальнену функцію $\boldsymbol{f} * \boldsymbol{g}$: $(\boldsymbol{f} * \boldsymbol{g}, \varphi) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \,\hat{*}\, \varphi)$ для кожної основної функції φ.

Нехай $\boldsymbol{f}_{\lambda}(\boldsymbol{t}) = \dfrac{\theta(\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ при $\lambda > 0$ і $\boldsymbol{f}_{\lambda}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}'_{1+\lambda}(\boldsymbol{t})$ при $\lambda \le 0$, де $\theta(\boldsymbol{t})$ – одинична функція Хевісайда, $\boldsymbol{f}_{\gamma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}_{\gamma_1}(\boldsymbol{x}_1) \times \mathbf{K} \times \boldsymbol{f}_{\gamma_{\boldsymbol{n}}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}})$ – прямий добуток ([10], с. 126) узагальнених функцій $\boldsymbol{f}_{\gamma_{\boldsymbol{j}}}$, $\boldsymbol{j} = 1, \mathbf{K}, \boldsymbol{n}$. Правильні співвідношення

$$\boldsymbol{f}_{\lambda} * \boldsymbol{f}_{\mu} = \boldsymbol{f}_{\lambda+\mu}, \quad \boldsymbol{f}_{\lambda} \,\hat{*}\, \boldsymbol{f}_{\mu} = \boldsymbol{f}_{\lambda+\mu}.$$

Визначаємо ([10], с. 143) похідну Рімана-Ліувілля дробового порядку β функції $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{D}'(\boldsymbol{R})$

$$\boldsymbol{v}^{(\beta)}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}_{-\beta}(\boldsymbol{t}) * \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}'_{1-\beta}(\boldsymbol{t}) * \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}_{1-\beta}(\boldsymbol{t}) * \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{t}).$$

Зауважимо, що

$$\boldsymbol{f}_{-\beta}(\boldsymbol{t}) \,\hat{*}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}'_{1-\beta}(\boldsymbol{t}) \,\hat{*}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{f}_{1-\beta}(\boldsymbol{t}) \,\hat{*}\, \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{t}), \ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}).$$

Отримаємо

$$\frac{1}{(2\pi)^{\boldsymbol{n}}} \int\limits_{\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}} (-\boldsymbol{i}\xi)^{\gamma} (\boldsymbol{Fu})(\xi) \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},\xi)} \boldsymbol{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\boldsymbol{n}}} \int\limits_{\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}} \int\limits_{\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}} (-\boldsymbol{i}\xi)^{\gamma} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\xi)} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{dy} \boldsymbol{d}\xi = \frac{1}{(-2\pi)^{\boldsymbol{n}}} \int\limits_{\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}} \int\limits_{\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}} (-\boldsymbol{i}\xi)^{\gamma} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t},\xi)} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) \boldsymbol{dt} \boldsymbol{d}\xi =$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$= \frac{1}{(-2\pi)^n}\int_{R^n}(-i\xi)^\gamma(e^{i(x,\xi)} * u(x))d\xi = \frac{1}{(-2\pi)^n}\int_{R^n}(-i\xi)^\alpha e^{i(x,\xi)}d\xi * u(x) =$$

$$= (-1)^n F^{-1}[(-i\xi)^\gamma] * u(x) = f_{-\gamma}(x) * u(x).$$

Отже, $Au(x) = \sum_{|\gamma|\le s} a_\gamma(x)(f_{-\gamma}(x) * u(x)), \quad u \in D(R^n)$.

Зауважимо, що для довільних $u, v \in D(R^n)$

$$\int Au\bar{v}dx = \int \sum_{|\gamma|\le s} a_\gamma(x)(f_{-\gamma}(x) * u(x))\overline{v(x)}dx = \int \sum_{|\gamma|\le s} u(x)(f_{-\gamma}(x) \hat{*} a_\gamma(x)\overline{v(x)})dx,$$

тому формально спряжений оператор до оператора A набуває вигляду

$$A^* v(x) = \sum_{|\gamma|\le s} \overline{f_{-\gamma} \hat{*} (a_\gamma \bar{v})}, \; A^* v(x) = \sum_{|\gamma|\le s} f_{-\gamma} \hat{*} (a_\gamma \bar{v}),$$

якщо a_γ – дійснозначні.

Псевдодиференціальний оператор A називається *еліптичним* в області $\Omega \in R^n$, якщо існують такі додатні сталі C_1, C_2, що

$$|a(x,\xi)| \ge C_1(1+|\xi|)^s \quad \forall x \in \Omega, |\xi| \ge C_2.$$

В [4] методом Радона ([9], с. 206) побудована фундаментальна функція $\omega_0(x) = \omega(x,0)$ однорідного еліптичного оператора з дробовими похідними $A = A(x,\partial) = \sum_{|\gamma|=s} a_\gamma f_{-\gamma}(x)$ зі сталими коефіцієнтами a_γ, $|\gamma| = s$.

Використаємо перетворення Радона за просторовими змінними x_1, K, x_n для знаходження розв'язку $\omega(x,t) = \omega_n(x,t)$ рівняння

$$f_{-\beta}(t) * \omega(x,t) - \sum_{j=1}^{n} b_j f_{-\alpha}(x_j) * \omega(x,t) = \delta(x,t), \quad (x,t) \in R^{n+1} \tag{1}$$

зі сталими коефіцієнтами $b_j, \quad j = 1, \mathrm{K}, n$ за умови

$$\sum_{j=1}^{n} b_j p_j^\alpha \ge C_0 \quad \forall p \in R^n, |p| = 1. \tag{2}$$

Тут $\delta(x,t)$ – дельта-функція Дірака.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Теорема. При $\alpha > \beta$ або $\alpha < \beta < 2$ та за умови (2) існує фундаментальний розв'язок $\omega_n(x,t)$ рівняння (1), для якого правильні оцінки

$$|\omega_n(x,t)| \leq \frac{C_n^*}{t\,|x|^{n-\alpha}} ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha}, \qquad |x|^\alpha < t^\beta, \tag{3}$$

$$|\omega_n(x,t)| \leq \frac{C_n}{t^{1-\beta}\,|x|^n}, \qquad |x|^\alpha > t^\beta, \quad x \in R^n, t > 0. \tag{4}$$

При $\alpha \neq \dfrac{n+2m}{\sigma}$, $m = 0,1,\mathbf{K},\sigma = 1,2,\mathbf{K}$ в оцінці (3) логарифм можна опустити.

Доведення. Нехай Σ_n – одинична сфера в R^n, $p \in \Sigma_n, \xi = (p,x) = p_1x_1 + \mathbf{K} + p_nx_n$, $b^2 = b^2(p) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j p_j^\alpha$. Зауважимо, що за умови (2) $b^2(p) \geq C_0 > 0$ для всіх $p \in \Sigma_n$.

Шукаємо функцію $\omega_n(x,t)$ у вигляді

$$\omega_n(x,t) = \int\limits_{\Sigma_n} \omega_{p,n}(\xi,t) dS_p. \tag{5}$$

За властивістю згортки

$$\sum_{j=1}^{n} b_j f_{-\alpha}(x_j) * \omega_{p,n}((p,x),t) = \sum_{j=1}^{n} b_j p_j^\alpha (f_{-\alpha}(\xi) * \omega_{p,n}(\xi,t)).$$

Враховуючи, що $\delta(x,t) = \delta(x) \times \delta(t)$, для $\delta(x)$ правильні зображення ([9], с. 103)

$$\delta(x) = a_n^0 \int\limits_{\Sigma_n} \delta^{(n-1)}(p_1x_1 + \mathbf{K} + p_nx_n) dS_p, \quad a_n^0 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}, \tag{6}$$

при непарному n, а при парному n

$$\delta(x) = b_n^0 \int\limits_{\Sigma_n} (p_1x_1 + \mathbf{K} + p_nx_n)^{-n} dS_p, \quad b_n^0 = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n}, \tag{7}$$

для знаходження $\omega_{p,n}$ одержуємо рівняння

$$f_{-\beta}(t) * \omega_{p,2k+1}(\xi,t) - b^2(p) f_{-\alpha}(\xi) * \omega_{p,2k+1}(\xi,t) = a^0_{2k+1}\delta^{(2k)}(\xi)\times\delta(t), \quad (8)$$

$$f_{-\beta}(t) * \omega_{p,2k}(\xi,t) - b^2(p) f_{-\alpha}(\xi) * \omega_{p,2k}(\xi,t) = b^0_{2k}\xi^{-2k}\times\delta(t). \quad (9)$$

Використовуючи результати [7], знаходимо фундаментальний розв'язок $G_p(\xi,t)$ рівняння

$$f_{-\beta}(t) * G_p(\xi,t) - b^2(p) f_{-\alpha}(\xi) * G_p(\xi,t) = \delta(\xi,t). \quad (10)$$

За теоремою з ([10], с. 142) розв'язки рівнянь (8) та (9) набувають вигляду

$$\omega_{p,2k+1}(\xi,t) = a^0_{2k+1} G_p(\xi,t) * \delta^{(2k)}(\xi) = a^0_{2k+1}\frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}} G_p(\xi,t) = a^0_{2k+1}\frac{d^{2k}}{d\,|\,\xi\,|^{2k}} G_p(|\,\xi\,|,t), \quad (11)$$

$$.\,\omega_{p,2k}(\xi,t) = b^0_{2k} G_p(\xi,t) * \xi^{-2k}. \quad (12)$$

Згідно з [7]

$$G_p(\xi,t) = \frac{\pi^{1/2} t^{\beta-1}}{|\,\xi\,|} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|\,\xi\,|^{\alpha}}{2^{\alpha} b^2(p) t^{\beta}}\;\middle|\; \begin{matrix} (1,1) & (\beta,\beta) & \\ (1,1) & (1/2,\alpha/2) & (1,\alpha/2) \end{matrix}\right),$$

де $H^{m,n}_{p,q}\left(z\;\middle|\;\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \mathrm{K} & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \mathrm{K} & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)$ – H-функція Фокса [11].

Використовуємо позначення з [11] для $H^{m,n}_{p,q}$

$$a^* = \sum\nolimits_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum\nolimits_{i=n+1}^{p}\alpha_i + \sum\nolimits_{i=1}^{m}\beta_i - \sum\nolimits_{i=m+1}^{q}\beta_i\,,\ \Delta^* = \sum\nolimits_{i=1}^{q}\beta_i - \sum\nolimits_{i=1}^{p}\alpha_i\,.$$

Для функції G_p отримаємо $a^* = 2-\beta$, $\Delta^* = \alpha-\beta$. Тому за умов теореми функція G_p існує для всіх $\xi \neq 0$, $t > 0$.

Використовуючи формулу диференціювання для H-функцій Фокса ([11], с. 33), одержимо

$$\omega_{p,2k+1}(\xi,t) = \frac{a^0_{2k+1}\pi^{1/2} t^{\beta-1}}{|\,\xi\,|^{2k+1}} H^{3,1}_{3,4}\left(\frac{|\,\xi\,|^{\alpha}}{2^{\alpha} b^2 t^{\beta}}\;\middle|\; \begin{matrix} & (1,1) & (\beta,\beta) & (1,\alpha) \\ (2k+1,\alpha) & (1,1) & (1/2,\alpha/2) & (1,\alpha/2) \end{matrix}\right).$$

У [11] побудовано асимптотику для H-функцій Фокса. Враховуючи, що виконуються умови (1.6) та (1.3.2) із [11], за теоремою 1.7 із [11] одержуємо оцінки

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$|\omega_{p,2k+1}(\xi,t)| \le \frac{q_{2k+1}}{t^{1-\beta}|\xi|^{2k+1}} \text{ при } |\xi|^{\alpha} > t^{\beta},$$

а за наслідком 1.12.1 із теореми 1.12 [11]

$$|\omega_{p,2k+1}(\xi,t)| \le \frac{q_{2k+1}^{*} t^{\beta-1}}{|\xi|^{2k+1}} \left(\frac{|\xi|^{\alpha}}{t^{\beta}}\right)^{\min\{1,\frac{1}{\alpha}\}} \ln\frac{t^{\beta}}{|\xi|^{\alpha}} \text{ при } |\xi|^{\alpha} < t^{\beta},$$

звідки

$$|\omega_{p,2k+1}(\xi,t)| \le \frac{q_{2k+1}^{*}}{t|\xi|^{2k+1-\alpha}} \ln\frac{t^{\beta}}{|\xi|^{\alpha}}, \text{ якщо } \alpha < 1,$$

$$|\omega_{p,2k+1}(\xi,t)| \le \frac{q_{2k+1}^{*}}{t^{1-\beta(1-\frac{1}{\alpha})}|\xi|^{2k}} \ln\frac{t^{\beta}}{|\xi|^{\alpha}} \text{ у випадку } \alpha \ge 1.$$

Тут і далі $q_i, q_i^{*}, q_{i,j}, q_{i,j}^{*}$ – певні додатні сталі. У випадку $\alpha \ne \frac{n+2m}{\sigma}$, $m = 0,1,\ldots, \sigma = 1,2,\ldots$ правильні такі ж оцінки без логарифмів.

Тепер за формулою (11) та з одержаних вище оцінок функції $\omega_{p,2k+1}(\xi,t)$ отримуємо оцінки шуканого фундаментального розв'язку. У випадку $\alpha < 1$ матимемо

$$|\omega_{2k+1}(x,t)| \le \frac{q_{2k+1}^{*}}{t} \int\limits_{\Sigma_{2k+1}\cap\{p:|\xi|^{\alpha}<t^{\beta}\}} |\xi|^{-(2k+1-\alpha)} \ln\frac{t^{\beta}}{|\xi|^{\alpha}} d_p S +$$

$$+\frac{q_{2k+1}}{t^{1-\beta}} \int\limits_{\Sigma_{2k+1}\cap\{p:|\xi|^{\alpha}>t^{\beta}\}} |\xi|^{-2k-1} d_p S = I_1(x,t) + I_2(x,t).$$

Зауважимо, що другого доданка немає у випадку $|x|^{\alpha} < t^{\beta}$, оскільки $|\xi| = |x||cos(x,p)| \le |x|$ при $p \in \Sigma_{2k+1}$. При $|x|^{\alpha} > t^{\beta}$ одержуємо

$$0 \le I_2(x,t) = \frac{q_{2k+1}}{t^{1-\beta}} \int\limits_{\Sigma_{2k+1}\cap\{p:|\xi|^{\alpha}>t^{\beta}\}} |\xi|^{-2k-1} d_p S \le \frac{q_{2k+1}}{t^{1-\beta+\frac{\beta}{\alpha}}} \int\limits_{\Sigma_{2k+1}} |\xi|^{-2k} d_p S = 0.$$

Останню рівність одержали на підставі формули вправи 10 із ([9], с. 105–106), за якою $\int\limits_{\Sigma_{2k+1}} \xi^{-2k} d_p S = 0$. Отже, $I_2(x,t) = 0$.

Використовуючи формули цієї ж вправи, обчислюємо $I_1(x,t)$. Виконуючи заміну $\eta = \frac{\xi}{t^{\frac{\beta}{\alpha}}} = p_1 \frac{x_1}{t^{\frac{\beta}{\alpha}}} + \mathrm{K} + p_n \frac{x_n}{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}$, знаходимо

$$I_1(x,t) = q^*_{2k+1} \alpha t^{-1-(2k+1-\alpha)\frac{\beta}{\alpha}} \Big(\int\limits_{\Sigma_{2k+1} \cap \{p: |\eta| < 1\}} |\eta|^{-(2k+1-\alpha)} \ln \frac{1}{|\eta|} d_p S \Big)\Big(\frac{x}{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}\Big) \le$$

$$\le q^*_{2k+1} \alpha t^{-1-(2k+1-\alpha)\frac{\beta}{\alpha}} \Big(\int\limits_{\Sigma_{2k+1}} |\eta|^{-(2k+1-\alpha)} \ln \frac{1}{|\eta|} d_p S \Big)\Big(\frac{x}{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}\Big) \le \frac{q^*_{2k+1,1}}{t\, |x|^{2k+1-\alpha}} \Big| \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \Big|.$$

При $|x|^\alpha < t^\beta$ одержуємо оцінку (3). Враховуючи, що при $|x|^\alpha > t^\beta$ отримаємо $\Big| \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \Big| = \ln \frac{|x|^\alpha}{t^\beta} \le C \frac{t^\beta}{|x|^\alpha}$, з попередньої оцінки одержуємо $|\omega_{2k+1}(x,t)| \le \frac{q^*_{2k+1,1}}{t\, |x|^{2k+1-\alpha}} \ln \frac{|x|^\alpha}{t^\beta} \le \frac{C_{2k+1}}{t^{1-\beta}\, |x|^{2k+1}}$, а отже, оцінку (4).

При $\alpha \ge 1$ згідно з формулою (11) та оцінками функції $\omega_{p,2k+1}(\xi,t)$ знаходимо

$$|\omega_{2k+1}(x,t)| \le q^*_{2k+1} \int\limits_{\Sigma_{2k+1} \cap \{p: |\xi|^\alpha < t^\beta\}} \frac{|\xi|^{-2k}}{t^{1-\beta(1-\frac{1}{\alpha})}} \ln \frac{t^\beta}{|\xi|^\alpha} d_p S +$$

$$+ \frac{q_{2k+1}}{t^{1-\beta}} \int\limits_{\Sigma_{2k+1} \cap \{p: |\xi|^\alpha > t^\beta\}} |\xi|^{-2k-1} d_p S \le$$

$$\le \frac{q^*_{2k+1,1}}{t^{1-\beta(\frac{\alpha-1}{\alpha})} |x|^{2k}} \Big| \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \Big| + \frac{q_{2k+1,1}}{t^{1-\beta+\frac{\beta}{\alpha}}} \int\limits_{\Sigma_{2k+1}} \xi^{-2k} d_p S = \frac{q^*_{2k+1,1}}{t^{1-\beta(\frac{\alpha-1}{\alpha})} |x|^{2k}} \Big| \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \Big|.$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Звідси, враховуючи, що $t^{-\frac{\beta}{\alpha}} <|x|^{-1}$ при $|x|^{\alpha} > t^{\beta}$, одержуємо оцінку (3), тому що $|\ln \frac{t^{\beta}}{|x|^{\alpha}}| = \ln \frac{|x|^{\alpha}}{t^{\beta}} \le C \frac{t^{\beta}}{|x|^{\alpha}}$ при $|x|^{\alpha} > t^{\beta}$, а при $\alpha \ge 1$ ще й $t^{\beta(1-\frac{1}{\alpha})} <|x|^{\alpha-1}$, одержуємо оцінку (4).

Тепер розглянемо випадок $n = 2k$. Існування згортки у формулі (12) не очевидне. Тому простіше знайти функцію $\omega_{2k}(x,t)$ методом спуску ([10], с. 195–198) за змінною x_{2k+1}

$$\omega_{2k}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{2k+1}(x,z,t)dz = 2\int_{0}^{+\infty} \omega_{2k+1}(x,z,t)dz, \text{ де } x = (x_1, \mathbf{K}, x_{2k}).$$

Використовуючи оцінки (3), (4) при $n = 2k+1$, обчислюємо одержані інтеграли з використанням формул 2.2.3.5 та 2.6.5.4 із [12]. Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei. – Birkhauser Verlag. – Basel-Boston-Berlin, 2004.
2. *Engler H.* Similarity solutions for a class of hyperbolic integrodifferential equations / H. Engler // Differential Integral Eqns. – 10 (5). – 1997. – P. 815–840.
3. *Ворошилов А.А.* Условия существования классического решения задачи Коши для дифузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто / А.А. Ворошилов, А.А. Килбас // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 414, №4. – С. 451–454.
4. *Лопушанська Г.П.* Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних / Г.П. Лопушанська // Укр. мат. журн. – Т. 51, №1. – 1999. – С. 48–59.
5. *Anh V.V.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random data / V.V. Anh, N.N. Leonenko // J. of Statistical Physics. – 2001. –104 (5/6). – P. 1349–1387.
6. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху. – М.: Наука, 2005.
7. *Jun Sheng Duan.* Time- and space-fractional partial differential equations / Jun Sheng Duan // J. Math. Phys. – Vol. 46, No. 1. – 2005. – P. 13504–13511.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

8. *Лопушанская Г.П.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций / Г.П. Лопушанская, А.О. Лопушанский, О.В. Пасичник // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52, №6. – С. 1288–1299.
9. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965.
10. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981.
11. *Kilbas A.A.* H-Transforms / A.A. Kilbas, M. Sajgo. – Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC. – 2004.
12. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1981.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Галина ЛОПУШАНСКАЯ[1], **Андрей ЛОПУШАНСКИЙ**[2]

[1]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*
[2]*Институт математики Жешувского университета, Алея Тадеуша Рейтана, 16 35-959 Жешув, Польша*

Получено оценки фундаментального решения уравнения

$$u_t^{(\beta)} - \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j}^{(\alpha)} = \delta(x,t), \quad (x,t) \in R^{n+1}$$

с частными дробными производными Римана-Лиувилля $u_t^{(\beta)}$, $u_{x_j}^{(\alpha)}$ и постоянными коэффициентами b_j, $j = \overline{1,n}$ при условии $\sum_{j=1}^{n} b_j p_j^{\alpha} \geq C_0$ для всех $p \in R^n, |p| = 1$.

Ключевые слова: производная дробного порядка, обобщенная функция, фундаментальное решение, H-функция Фокса.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE EQUATIONS WITH PARTIAL FRACTIONAL DERIVATIVES

Halina LOPUSHANSKA[1], Andriy LOPUSHANSKYJ[2]

[1]Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine
[2]Institute of Mathematics Rzeszów University,
Aleja Tadeusza Rejtana, 16 35-959 Rzeszów, Poland

We obtain the estimates of the fundamental solution of the equation

$$u_t^{(\beta)} - \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j}^{(\alpha)} = \delta(x,t), \quad (x,t) \in R^{n+1}$$

with partial fractional derivatives of Riemann-Liouville $u_t^{(\beta)}$, $u_{x_j}^{(\alpha)}$ and constant coefficients b_j, $j = \overline{1,n}$ under the condition $\sum_{j=1}^{n} b_j p_j^{\alpha} \geq C_0$ for all $p \in R^n, |p| = 1$.

Key words: fractional derivative, generalized function, fundamental solution, H-function of Fox.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.2012
Прийнята до друку 31.05.2012