ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 84–88
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 84–88

УДК 515.1, 512.46

АЛЬТЕРНАТИВА ПОНТРЯГІНА ДЛЯ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНИХ МОНОЇДІВ ЗІ СКОРОЧЕННЯМИ

Ігор ГУРАН, Марія КІСІЛЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: topology@franko.lviv.ua

Доведено, що локально компактний монотетичний моноїд зі скороченнями і відкритими зсувами або компактний або дискретний.

Ключові слова: монотетична півгрупа, локально компактна півгрупа, відкриті зсуви.

1. Вступ. Під *топологічною півгрупою* ми розумітимемо гаусдорфовий топологічний простір, на якому задана асоціативна сукупно неперервна операція. Якщо топологічна півгрупа містить двосторонню одиницю, то вона називається *топологічним моноїдом.* Кажуть, що топологічна півгрупа S монотетична, якщо вона містить всюди щільну циклічну підпівгрупу, тобто $S = \overline{\{a^n | n \in \omega\}}$ для деякого $a \in S$, який називається генератором півгрупи S. Відомо, що компактні монотетичні топологічні групи – це компактні абелеві групи, групи характерів яких є підгрупами кола в дискретній топології. Для локально компактних монотетичних груп виконується альтернатива Понтрягіна [1]: локально компактна монотетична група або дискретна або компактна. Компактні монотетичні півгрупи описав Е. Хьюіт в [2]. Стосовно локально компактних монотетичних моноїдів залишається відкритим питання Р. Коха [3]: чи виконується альтернатива Понтрягіна для локально компактних монотетичних моноїдів? Є. Зеленюк в [4] побудував приклад зліченної локально компактної монотетичної півгрупи зі скороченням, яка не дискретна і не компактна. Легко бачити, що монотетичний локально компактний зліченний моноїд – дискретний, тому приєднати одиницю до півгрупи Зеленюка неможливо.

2. Надалі моноїд S задовольняє умову: для довільних $a, x, y \in S$ з того, що $ax = ay$ випливає $x = y$ і з $xa = ya$ випливає $x = y$. Такі моноїди називаються *моноїдами зі скороченням.* Відомо, що комутативна півгрупа зі скороченнями S може бути вкладеною в групу дробів півгрупи S [5]. Нехай S така півгрупа, то множина $S \times S$ є знову такою півгрупою з покоординатним множенням, прийнятим як півгрупова операція. В $S \times S$ означимо відношення $\mathcal{R}$, прийнявши $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$, де $(a, b) \in S \times S$ і $(c, d) \in S \times S$ тоді і тільки тоді, коли $ad = bc$. Легко перевірити, що $\mathcal{R}$ є конгруенцією на $S \times S$. Нехай G – множина класів еквівалентності за відношенням $\mathcal{R}$. Тоді G є групою, яка називається групою дробів, породженою S. Нехай $\pi : S \times S \to G$ – природне відображення, яке кожному елементу $(a, b) \in S \times S$ ставить у відповідність клас еквівалентності в G, що містить елемент (a, b). Очевидно, що π є гомоморфізмом півгрупи $S \times S$ в групу G. Для довільного елемента $b \in S$ визначимо відображення $P : S \to G$, $P(x) = \pi(xb, b)$. Легко бачити, що P коректно визначений гомоморфізм S в G і не залежить від вибору елемента b. Відображення P є вкладенням S в групу, породжену півгрупою S.

Якщо S – топологічна півгрупа, то на $S \times S$ визначена топологія декартового добутку, стосовно якої $S \times S$ є топологічною півгрупою. На групі G можна задати фактор-топологію за відображенням π: множина $\mathfrak{O}$ є відкритою в G тоді і тільки тоді, коли $\pi^{-1}(\mathfrak{O})$ є відкритою множиною в $S \times S$.

Означення 1. *Півгрупа S вкладена в G, якщо G є гаусдорфовою топологічною групою і P є гомеоморфізмом на $P(S)$ у топології індукованій з S.*

Теорема 1. *Якщо S – комутативна півгрупа зі скороченням і I – ідеал в S, то група H, породжена півгрупою I і група G, породжена півгрупою S топологічно ізоморфні.*

Доведення. Розглянемо діаграму

$$G \xleftarrow[\pi_1]{} S \times S \xrightarrow[f]{} I \times I \xrightarrow[\pi_2]{} H,$$

де π_1 і π_2 – природні відображення і $f(x, y) = (xt, yt)$, де t – фіксований елемент в I. Нехай $f^* : G \to H$ – відображення, означене так: $f^*(g) = \pi_2(f(\pi_1^{-1}(g)))$. Легко бачити, що f^* є алгебричним ізоморфізмом G на H.

Доведемо, що f^* – неперервний ізоморфізм. Нехай $g \in G$ і нехай U – відкрита множина в H, що містить $f^*(g)$. Оскільки π_2 – неперервне відображення за означенням, $\pi_2^{-1}(U)$ – відкрита множина в $I \times I$. Відображення f є неперервним, оскільки множення неперервне, тому $f^{-1}(\pi_2^{-1}(U))$ є відкрита в $S \times S$. Нехай $(x, y) \in S \times S$ така точка, що для деякої точки $(a, b) \in f^{-1}(\pi_2^{-1}(U))$, $(x, y)\mathcal{R}(a, b)$, тобто $xb = ya$, тому $xtbt = ytat$ і $(x, y) \in f^{-1}(\pi_2^{-1}(U))$, для $f(x, y)\mathcal{R}(a, b)$. Тоді $\pi_1^{-1}(\pi_1 f^{-1}(\pi_2^{-1}(U))) \subset$ $\subset f^{-1}(\pi_2^{-1}(U))$ – відкрита множина в $S \times S$, $f^*(\pi_1(f^{-1}(\pi_2^{-1}(U)))) \subset U$ і $g \in \pi_1(f^{-1}(\pi_2^{-1}(U)))$ – відкрита множина.

Для доведення неперервності $(f^*)^{-1}$ розглянемо $g = (f^*)^{-1}(h)$, де $g \in G$ і $h \in H$. Нехай V – відкрита множина, що містить g. Множина $\pi_1^{-1}(V)$ є відкритою в $S \times S$. Нехай $W =${множина всіх точок в $I \times I$, для яких існує точка $\mathcal{R}$-еквівалентна в $f(\pi_1^{-1}(V))$}. Оскільки $W = (I \times I) \cap \pi_1^{-1}(V)$), то W – відкрита множина в $I \times I$. Отож, відображення $(f^*)^{-1}$ є неперервним: $\pi_2^{-1}(\pi_2(W)) = W$, $(f^*)^{-1}(\pi_2(W)) \subset V$ і $h \in (\pi_2(W))$. $\square$

Приклад 1. Нехай $S = (0, 1]$ – інтервал числової прямої у звичайній топології. S є півгрупою зі скороченням стосовно операції множення дійсних чисел. Очевидно $G = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ – топологічна група породжена S. Для довільного $t \in (0, 1)$ позначимо ідеал в S через $I_t = (0, t)$. Тоді кожен ідеал I_t породжує групу G.

Означення 2 ([6])**.** *Півгрупа S має властивість $\mathcal{F}$, якщо для довільних $x, y \in S$ і довільного V – околу точки x, то існує окіл W точки y такий, що $xy \in \cap\{Vy'| y' \in W\}$ і $yx \in \cap\{y'V|y' \in W\}$*

Приклад 2. Нехай S – відкрита підпівгрупа топологічної групи G. Якщо $x, y \in S$ і $x \in V$, де V – відкрита в S, то V – також відкрита множина в G і $x = y^{-1}yx$. Існують відкриті підмножини U і W в S такі, що $yx \in W$ і $y \in U$, $U^{-1}W \subset V$. Тому $yx \in y'V$ для всіх $y' \in U$, тому S має властивість $\mathcal{F}$. Отож, будь-яка відкрита підпівгрупа топологічної групи має властивість $\mathcal{F}$.

Теорема 2. *Нехай S – комутативна півгрупа зі скороченням. Якщо S має властивість $\mathcal{F}$, тоді для довільної відкритої множини V в S і довільного елемента $y \in S$, множини Vy та yV є відкритими. Півгрупу S, що має цю властивість, називатимемо півгрупою з відкритими зсувами.*

Доведення. Нехай V – відкрита підмножина в S і $y \in S$. Для $x \in Vy$, $x = ay$ для деякого $a \in V$; тому існує відкрита множина U, що містить y така, що $ay \in Vy'$ для всіх $y' \in U$. Оскільки U – відкрита множина, що містить y, то існує відкрита множина W, що містить x така, що $xy \in x'U$ для всіх $x' \in W$. Якщо $\{x_d\}$ – напрямленість в S така, що $x_d \to x$, то існує d_0 таке, що з $d > d_0$ випливає $x_d \in W$. Тоді для $d > d_0$ існує $y_d \in U$, таке, що $xy = x_d y_d$. Отже, $x \in Vy_d$, для $d > d_0$, тому існує елемент $a_d \in V$ такий, що $x = a_d y_d$. Отож, $x_d y_d = xy = a_d y_d y$ і за законом скорочення $x_d = a_d y \in Vy$ для всіх $d > d_0$. Звідси випливає, що кожна напрямленість, що збігається до точки з Vy починаючи з d_0 міститься в Vy. Отже, Vy – відкрита множина. □

Теорема 3. *Нехай S – топологічний комутативний моноїд зі скороченням, що має властивість $\mathcal{F}$, тоді максимальна група $H(e)$, що містить ідемпотент e, відкрито-замкнена топологічна група в S.*

Доведення. Оскільки $e^2 = e$, то для довільної відкритої підмножини V, що містить e за властивістю $\mathcal{F}$ існує відкрита множина W, що містить e така, що $e \in Vw$ для всіх $w \in W$. Далі з $w \in W$ випливає існування $x \in V$ такого, що $xw = e$. Тому кожен елемент з W має обернений стосовно e і $W \subset H(e)$. Інверсія неперервна в e, позаяк W є відкритою множиною, що містить e й існує окіл U ідемпотента e такий, що $U^{-1} \subset W$ за властивістю $\mathcal{F}$. Тому максимальна група $H(e)$ є топологічною групою і містить відкриту підмножину W з S, тому $H(e)$ – відкрита в S.

Нехай тепер $x \in \overline{H(e)}$. Тоді існує напрямленість $\{x_\alpha\} \subset H(e)$ така, що $\{x_\alpha\} \to x$. Оскільки $x_\alpha e = x_\alpha$ для всіх α і $x_\alpha e \to xe$, то $x = xe$. Оскільки $H(e)$ – відкритий окіл точки e, то за властивістю $\mathcal{F}$ існує окіл $V(x)$ такий, що $x \in vH(e)$, для всіх $v \in V(x)$. Однак $V(x) \cap H(e) \neq \emptyset$. Нехай $y \in V(x) \cap H(e)$, тоді $x \in yH(e) = H(e)$ і $H(e) = \overline{H(e)}$. Отже, $H(e)$ – замкнена множина. □

Наслідок 1. *Нехай комутативний топологічний моноїд S зі скороченням і з одиницею 1 задовольняє умову $\mathcal{F}$. Тоді максимальна група $H(1)$, що містить 1 – відкрито-замкнена.*

Нехай S – комутативний моноїд зі скороченнями й одиницею 1. Легко бачити, що кожен такий моноїд є прямою сумою максимальної групи $H(1)$ і, можливо, максимального не порожнього ідеалу $T = S \setminus H(1)$.

Надалі нам потрібний факт з теорії комутативних топологічних напівгруп.

Теорема 4 (Росман Н. [6])**.** *Нехай S – комутативна топологічна півгрупа зі скороченнями. Необхідною і достатньою умовою того, що S вкладається як відкрита підмножина в топологічну групу G є те, що S має властивість $\mathcal{F}$.*

А також такі теореми.

Теорема 5 (Церпес Н.А. і Мухерджеа А. [7])**.** *Реверсивна справа локально компактна топологічна півгрупа S зі скороченням вкладається у топологічну групу як відкрита піднапівгрупа тоді і тільки тоді, коли S є з відкритими зсувами.*

Теорема 6 (Елліс Р. [8])**.** *Нехай G – група, на якій задано локально компактну півгрупову топологію. Тоді G – топологічна група.*

Теорема 7. *Нехай S – зв'язний локально компактний комутативний моноїд з відкритими зсувами та скороченнями. Тоді S – топологічна група.*

Доведення. За теоремою 5, моноїд S вкладається як відкрита підпівгрупа в деяку топологічну групу G. З прикладу 2 випливає, що тоді S має властивість $\mathcal{F}$. Тоді за наслідком 1 отримуємо, що $H(1)$ – максимальна підгрупа в S є відкрито- замкненою підгрупою в G. Із зв'язності S випливає, що $H(1) = S$ і S є локально компактним за умовою теореми. Тому S – топологічна група за теоремою Еліса. □

Теорема 8. *Нехай S – монотетичний топологічний локально компактний моноїд з відкритими зсувами та скороченнями. Тоді S або дискретний моноїд, або S – компактна топологічна група.*

Доведення. Розглянемо розклад S на максимальну групу $H(1)$ і максимальний ідеал T. Припустимо, що $T \neq \emptyset$. За теоремою 5, моноїд S вкладається у топологічну групу. Тоді, з прикладу 2 випливає, що S має властивість $\mathcal{F}$. Тоді, за наслідком 1, $H(1)$ – відкрита підгрупа в S.

Нехай a – генератор моноїда S. Якщо $a \in T$, то $\overline{\{a^n | n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{T} = T = S \setminus H(1)$. Якщо ж $a \in H(1)$, то з замкненості $H(1)$ випливає, що $\overline{\{a^n | n \in \mathbb{N}\}} \subset H(1)$, тоді $T = \emptyset$. Кожен з цих випадків суперечить припущенню, що $T \neq \emptyset$. Отже, $S = H(1)$, а з локальної компактності випливає, що S – локально компактна топологічна група. Залишається застосувати альтернативу Понтрягіна. □

Список використаної літератури

1. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы / *Л.С. Понтрягин* – М.: Наука, 1973.
2. *Hewitt E.* Compact monothetic semigroups / *E. Hewitt* // Duke Math. J. – 1956. – Vol. 23. – P. 447-457.
3. *Koch R.J.* On monothetic semigroup / *R.J. Koch* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8. – P. 397-401.
4. *Зеленюк Е.Г.* К альтернативе Понтрягина для топологических полугрупп / *Е.Г. Зеленюк* // Мат. заметки. – 1988. – Vol. 44, №3. – С. 402-403.
5. *Клиффорд А.* Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. / *А. Клиффорд, Г. Престон* – М.: Мир, 1973.
6. *Rothman N.J.* Embedding of topological semigroups / *N.J. Rothman* // Math. Annalen. – 1960. – Vol. 139. – P. 197-203.

7. *Mukherjea A.* A note on the embedding of topological semigroups / *A. Mukherjea, N.A. Tserpes* // Semigroup Forum. – 1971. – Vol. 2, №1. – P. 71-75.
8. *Ellis R.* Continuty and homeomorfizm groups / *R. Ellis* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 4. – P. 969-973.

Стаття: надійшла до редакції 27.12.2011
доопрацьована 22.03.2012
прийнята до друку 12.12.2012

THE PONTRYAGINS ALTERNATIVE FOR LOCALLY COMPACT MONOIDS WITH CANCELLATION

Igor GURAN, Mariia KISIL

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: topology@franko.lviv.ua

We prove that a locally compact monothetic monoid with cancellation and with open shifts is compact or discrete.

Key words: monothetic semigroup, locally compact semigroup, cancellative open shift.

АЛЬТЕРНАТИВА ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ МОНОИДОВ С СОКРАЩЕНИЯМИ

Игорь ГУРАН, Мария КИСИЛЬ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: topology@franko.lviv.ua

Доказано, что локально компактный монотетический моноид, удовлетворяющий законы сокращения с открытыми сдвигами либо компактен либо дискретен.

Ключевые слова: монотетическая полугруппа, локально компактная полугруппа, открытые сдвиги.