*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 109–123*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 109–123*

УДК 519.21+517.37

# ПРО ЗРОСТАННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЙМОВІРНІСНИХ ЗАКОНІВ

**Орест КІНАШ, Марта ПАРОЛЯ**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
*вул. Університетська, 1, Львів, 79000*
*e-mail: okinasch@yahoo.com*

Для аналітичних в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, характеристичних функцій $\varphi$ ймовірнісних законів $F$ у термінах узагальнених порядків знайдено зв'язок між зростанням $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r < R\}$ і спаданням $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$.

*Ключові слова:* аналітична функція, характеристична функція, ймовірнісний закон, узагальнений порядок.

**1. Вступ.** Неспадна неперервна зліва на $(-\infty, \infty)$ функція $F$ називається [1, с. 10] ймовірнісним законом, якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} F(-x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, а характеристичною функцією закону $F$ називається [1, с. 12] функція

$$\varphi(z) = \varphi(z; F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x), \quad z \in (-\infty, \infty). \tag{1}$$

Якщо функція $\varphi$ допускає аналітичне продовження на круг $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, то вона називається аналітичною в $\mathbb{D}_R$. Надалі вважатимемо, що $\mathbb{D}_R$ є найбільшим кругом аналітичності функції $\varphi$. Відомо [1, с. 37-38] таке: для того, щоб характеристична функція $\varphi$ була аналітичною в $\mathbb{D}_R$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $r \in [\,0, R\,)$

$$W_F(x) =: 1 - F(x) + F(-x) = O(e^{-rx}), \quad x \to +\infty. \tag{2}$$

Якщо $R = +\infty$, (тобто $\varphi$ – ціла характеристична функція), і $\varphi(z) \not\equiv const$, то [1, с. 45] існує скінченна чи нескінченна границя $\lim\limits_{r\to+\infty} r^{-1} \ln M(r, \varphi) > 0$, де $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}$. Якщо $\rho[\varphi] = \varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,\varphi)}{\ln r}$ – порядок функції $\varphi$ і $\sigma[\varphi] = \varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,\varphi)}{r^{\rho[\varphi]}}$ – її тип, визначений за умови $0 < \rho[\varphi] < +\infty$, то або $\rho[\varphi] > 1$, або $\rho[\varphi] = 1$ і $\sigma[\varphi] > 0$. Б.Рамачандран [2] (див. також [1, с. 54]) довів, що за умови $1 \leqslant \rho[\varphi] < +\infty$ правильна формула

$$\frac{1}{\rho[\varphi]}+\frac{1}{\gamma[F]}=1,\quad \gamma[F]=\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln(1/W_F(x))}{\ln x},\tag{3}$$

а за умови $1<\rho[\varphi]<+\infty$,

$$(\gamma[F]\delta[F])^{\rho[\varphi]-1}\sigma[\varphi]\rho[\varphi]=1,\quad \delta[F]=\varliminf_{x\to\infty}x^{-\gamma[F]}\ln\frac{1}{W_F(x)}.\tag{4}$$

Н.І.Яковлєва [3-4] узагальнила формулу (3), використовуючи узагальнені порядки М.М. Шеремети [5]. Як і в [5], через $L$ позначимо клас неперервних додатних на $(-\infty,+\infty)$ функцій $\alpha$ таких, що $\alpha(x)\equiv\alpha(x_0)>0$ для $x\leqslant x_0$ і $\alpha(x)\uparrow+\infty$ при $x_0\leqslant x\to+\infty$. Будемо говорити, що $\alpha\in L^0$, якщо $\alpha\in L$ і $\alpha((1+o(1))x)=(1+o(1))\,\alpha(x)$ при $x\to+\infty$. Нарешті, $\alpha\in L_{\text{ПЗ}}$, якщо $\alpha\in L$ і $\alpha(cx)=(1+o(1))\alpha(x)$ $x\to+\infty$ для кожного $c\in(0,+\infty)$, тобто $\alpha$ – повільно зростаюча функція. В [4] доведено таке: якщо $\alpha\in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta\in L^0$, то для того, щоб $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(r)}\alpha\left(\frac{1}{r}\ln M(r,\varphi)\right)=\gamma>0$, необхідно і достатньо, щоб $\varliminf\limits_{r\to+\infty}\frac{1}{\alpha(x)}\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)=\frac{1}{\gamma}$.

Оскільки універсальної шкали зростання побудувати не можна, Б.В. Винницький [6] знайшов зв'язок між зростанням $M(r,\varphi)$ і спаданням $W_F(x)$ для цілих функцій у термінах функції $\Phi^{-1}$, оберненої до функції $\Phi(x)=\ln M(e^x,\varphi)$. Він довів таке: якщо $\varphi$ має нескінченний порядок, то $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{\Phi^{-1}(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{W_F(x)}\right)\right)}=1$. М. Девес [7] замість функцій з класів $L^0$ і $L_{\text{ПЗ}}$ розглядала функції $\alpha$ і $\beta$ такі, що $\varlimsup\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha(kx)}{\alpha(x)}\leqslant A_0k^a$ і $\varlimsup\limits_{x\to\infty}\frac{\beta(kx)}{\beta(x)}\leqslant B_0k^b$ для $k>1$ і, зрозуміло, замість рівностей отримала оцінки $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(r)}\alpha\left(\frac{\ln M(r,\varphi)}{r}\right)$, зверху і знизу через $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)}$.

Для аналітичної в одиничному крузі $\mathbb{D}_1$ функції $\varphi$ порядок і тип вводяться за формулами $\rho^*[\varphi]=\varlimsup\limits_{r\uparrow 1}\frac{\ln^+\ln^+M(r,\varphi)}{-\ln(1-r)}$ і $\sigma^*[\varphi]=\varlimsup\limits_{r\uparrow 1}(1-r)^{\rho^*[\varphi]}\ln^+M(r,\varphi)$ за умови $0<\rho^*[\varphi]<+\infty$. В.М. Сороківський [8] довів: якщо $\varphi$ – аналітична в $\mathbb{D}_1$ характеристична функція ймовірнісного закону $F$, то

$$\frac{1}{\gamma^*[F]}-\frac{1}{\rho^*[F]}=1,\qquad \gamma^*[F]=\varliminf_{x\to\infty}\frac{\ln^+\left(1-\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)}{\ln x},\tag{5}$$

і

$$(\gamma^*[F]\delta^*[F])^{\rho^*[\varphi]+1}=\sigma^*[\varphi]\rho^*[\varphi],\qquad \delta^*[F]=\varlimsup_{x\to\infty}x^{-\gamma^*[F]}\left(x-\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)^+.\tag{6}$$

В [9] він довів: якщо $\alpha\in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta\in L_{\text{ПЗ}}$ такі, що $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{d\ln\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x}<1$, $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x\alpha^{-1}(c\beta(x)))}{\beta(x)}=c$ і $\beta^{-1}\left(c\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right)\right)=(1+o(1))\beta^{-1}(c\alpha(x))$ при $x\to+\infty$ для кожного $c\in(0;+\infty)$, то

$$\varlimsup_{r\uparrow 1}\frac{\alpha(\ln M(r,\varphi))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)}=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)})^+}\right)}.\tag{7}$$

Тут ми доповнимо та узагальнимо наведені результати. Для цілих характеристичних функцій правильна така теорема.

**Теорема 1.** *Якщо або $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, а $\varphi$ – ціла характеристична функція ймовірнісного закону $F$, то*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln M(r,\varphi)\right)}{\beta(r)} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)}. \tag{8}$$

За умов $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$ теорема 1 збігається з наведеним вище результатом Н.І. Яковлєвої [4], який свідчить про зв'язок між зростанням $M(r,\varphi)$ і спаданням $W_F(x)$ у випадку, коли $\frac{1}{r}\ln M(r,\varphi)$ прямує до $+\infty$ досить швидко. За умов $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ теорема 1 є новим результатом і засвідчує такий зв'язок, коли $\frac{1}{r}\ln M(r,\varphi)$ прямує до $+\infty$ повільно. Якщо виберемо $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$, для $x \geqslant x_0$, то з (8) отримаємо формулу (3) для знаходження порядку.

Формула (4) випливає з доведеної нижче рівності

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,\varphi)}{r^\rho} = \frac{\rho-1}{\rho^\rho} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)^{\rho-1}}, \quad \rho = \rho[\varphi]. \tag{9}$$

У випадку, коли характеристична функція $\varphi$ ймовірнісного закону $F$ аналітична у крузі $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, ситуація дещо інша, бо $\varphi$ може бути обмеженою в $\mathbb{D}_R$, а для того, щоб $M(r,\varphi) \uparrow +\infty$ при $r \uparrow R$, потрібна додаткова умова на $W_F(x)$. Такою є умова

$$\varlimsup_{r\uparrow R} W_F(x)e^{Rx} = +\infty, \tag{10}$$

що буде доведено пізніше. Швидкість зростання функції $M(r,\varphi)$ залежить від асимптотичного поводження функції $W_F(x)e^{Rx}$, про що свідчить наступна теорема.

**Теорема 2.** *Нехай $\varphi$ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону $F$, який задовольняє умову (10), а $\rho^*[\varphi]$ – її порядок. Тоді*

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln^+\ln^+\left(W_F(x)e^{Rx}\right)}{\ln x} = \frac{\rho^*[\varphi]}{\rho^*[\varphi]+1} \qquad i \qquad \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln\frac{x}{\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}} = \rho^*[\varphi],$$

*якщо $0 < \rho^*[\varphi] < +\infty$, то для типу $\sigma^*[\varphi]$ правильні формули*

$$\sigma^*[\varphi] = \frac{\rho^\rho}{(\rho+1)^{\rho+1}} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln^+\left(W_F(x)e^{Rx}\right)\right)^{\rho+1}}{x^\rho} = \frac{\rho^\rho}{(\rho+1)^\rho} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(\frac{x}{\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}\right)^{\rho+1}},$$

*де $\rho = \rho^*[\varphi]$.*

Для $R = 1$ формули з теореми 2 збігаються з формулами (5) і (6). Доцільність наведення формули для знаходження $\rho^*[\varphi]$ і $\sigma^*[\varphi]$ в теоремі 2 у двох варіантах видно з наступних трьох теорем.

**Теорема 3.** *Нехай функції $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ такі, що $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{x} \to 0$ і $\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right) = (1+o(1))\,\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0,+\infty)$, а $\varphi$ –*

*аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* $F$, *який задовольняє умову (10). Тоді*

$$\varlimsup_{r\uparrow R} \frac{\alpha\left(\ln M(r,\varphi)\right)}{\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{x}{\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}\right)}. \tag{11}$$

Зауважимо, що для $R = 1$ формула (10) збігається з формулою (7), але умови на $\alpha$ і $\beta$ слабші, ніж в [9].

**Теорема 4.** *Нехай функції* $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ *і* $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ *такі, що* $\frac{\alpha(\ln x)}{\beta(x)} \to 0$, $\frac{\alpha^{-1}(c\beta(x))}{x} \to 0$ *і* $\beta\left(\frac{x}{\alpha^{-1}(c\beta(x))}\right) = (1+o(1))\,\beta(x)$ *при* $x \to +\infty$ *для кожного* $c \in (0,+\infty)$, *а* $\varphi$ – *аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* $F$, *який задовольняє умову (10). Тоді*

$$\varlimsup_{r\uparrow R} \frac{\alpha\left(\ln M(r,\varphi)\right)}{\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha\left(\ln^+\left(W_F(x)e^{Rx}\right)\right)}{\beta(x)}.$$

Зауважимо, що умови на $\alpha$ і $\beta$ в теоремі 3 засвідчують те, що функція $\alpha$ зростає повільніше, ніж функція $\beta$, а з умов теореми 4 випливає, що функція $\beta$ зростає повільніше, ніж функція $\alpha$. Цікавим є випадок, коли функції $\alpha$ і $\beta$ мають однакове зростання, наприклад, коли $\alpha(x) \equiv \beta(x)$. Правильна така теорема.

**Теорема 5.** *Нехай функція* $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ *така, що* $\frac{\alpha(\ln x)}{\alpha(x)} \to 0$ *і* $\alpha\left(\frac{x}{\alpha^{-1}(c\alpha(x))}\right) = (1+o(1))\,\alpha(x)$ *при* $x \to +\infty$ *для будь-якого* $c \in (0,1)$, *а* $\varphi$ – *аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* $F$, *який задовольняє умову (10). Нехай* $\rho^*_\alpha[\varphi] = \varlimsup_{r\uparrow R} \frac{\alpha(\ln M(r,\varphi))}{\alpha\left(\frac{1}{R-r}\right)}$. *Якщо* $\rho^*_\alpha[\varphi] \geqslant 1$, *то* $\rho^*_\alpha[\varphi] = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{\alpha\left(\frac{x}{\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}\right)}$, *якщо* $\rho^*_\alpha[\varphi] < 1$, *то* $\rho^*_\alpha[\varphi] = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha\left(\ln(W_F(x)e^{Rx})\right)}{\alpha(x)}$.

У теоремах 3 - 4 функції $\alpha$ і $\beta$ повільно зростаючі. Проте можна отримати аналоги цих теорем, коли одна з цих функцій є степеневою. Про це свідчать такі дві теореми.

**Теорема 6.** *Нехай* $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ *і* $\alpha\left(\frac{x}{\alpha(x)}\right) = (1+o(1))\,\alpha(x)$ *при* $x \to +\infty$, *а* $\varphi$ – *аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* $F$, *який задовольняє умову (10). Тоді*

$$\varlimsup_{r\uparrow R}(R-r)\alpha\left(\ln M(r,\varphi)\right) = \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{x} \ln^+\left(W_F(x)e^{Rx}\right).$$

**Теорема 7.** *Нехай* $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, $\frac{\ln x}{\beta(x)} \to 0$ *і* $\beta\left(\frac{x}{\beta(x)}\right) = (1+o(1))\,\beta(x)$ *при* $x \to +\infty$, *а* $\varphi$ – *аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* $F$, *який задовольняє умову (10). Тоді*

$$\varlimsup_{r\uparrow R} \frac{\ln M(r,\varphi)}{\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)} = \varlimsup_{x\to\infty} \frac{ln^+\left(W_F(x)e^{Rx}\right)}{\beta(x)}.$$

Зауважимо, що в теоремах 4 і 7 усунути умову $\frac{\alpha(\ln x)}{\beta(x)} \to 0$ при $x \to +\infty$ не можна. Продемонструємо це на прикладі теореми 7 з $\beta(x) = \ln x$. Нехай $F(x) = 0$ для $x \leqslant 0$, $F(x) = 1 - e^{-R}$ для $0 < x \leqslant 1$, і $F(x) = 1 - xe^{-Rx}$ для $x \geqslant 1$. Тоді $\varphi(t) = 1 - e^{-R} + \int\limits_1^\infty e^{itx} dF(x)$ і

$$M(r,\varphi) = |\varphi(-ir)| = 1 - e^{-R} - \int\limits_1^\infty e^{rx} d(1 - F(x)) = 1 - e^{-R} + e^{-(R-r)} + r\int\limits_1^\infty xe^{-(R-r)}dx =$$

$$= 1 - e^{-R} + e^{-(R-r)} + \frac{re^{-(R-r)}}{(R-r)^2}(1 + R - r) = \frac{(1+o(1))R}{(R-r)^2},$$

при $r \uparrow R$, тобто $\varlimsup\limits_{r\uparrow R} \frac{\ln M(r,\varphi)}{\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)} = 2$. З іншого боку, $W_F(x) = xe^{-Rx}$ для $x \geqslant 1$, і отже, $\varlimsup\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(W_F(x)e^{Rx}\right)}{\beta(x)} = 1$.

Доведення теорем 1-7 ґрунтується на такій лемі.

**Лема 1.** *Якщо $\varphi$ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R \leqslant +\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону $F$, то для кожного $r \in [0\ , R)$ і всіх $x \geqslant 0$ правильні нерівності* $\frac{1}{2}e^{rx}W_F(x) \leqslant M(r,\varphi) \leqslant r\int\limits_0^\infty e^{rx}W_F(x)dx + 1 + W_F(+0)$.

Для $R = +\infty$ ця лема доведена в [1, с. 54-55]. У випадку, коли $0 < R < +\infty$, її доведення таке саме. Приймемо $\mu(r,\varphi) = sup\{W_F(x)e^{rx} : x \geqslant 0\}$, $I(r,\varphi) = \int_0^\infty W_F(x)e^{rx}dx$ і припустимо, що $M(r,\varphi) \uparrow +\infty$ при $r \uparrow R$. Тоді за лемою 1

$$(1 + o(1))\ln\mu(r,\varphi) \leqslant \ln M(r,\varphi) \leqslant (1 + o(1))\ln I(r,\varphi), \qquad r \uparrow R, \tag{12}$$

і отже, задача зводиться до знаходження асимптотики функції $\ln\mu(r,\varphi)$ і асимптотичних оцінок $\ln I(r,\varphi)$ через $\ln\mu(r,\varphi)$.

**2. Асимптотичне поводження функції $\ln\mu(r,\varphi)$.** Припустимо спочатку, що $R = +\infty$, тобто $\varphi$ – ціла характеристична функція, а $x_0 = \sup\{x : W_F(x) > 0\} < +\infty$. Тоді $\mu(r,\varphi) \leqslant e^{rx_0}\sup\{W_F(x) : x \leqslant x_0\}$, тобто, $\varlimsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\ln\mu(r,\varphi)}{r} \leqslant x_0$. Оскільки $\mu(r,\varphi) \geqslant W_F(x_0)e^{rx_0}$, то $\varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{\ln\mu(r,\varphi)}{r} \geqslant x_0$, тому $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\ln\mu(r,\varphi)}{r} = x_0$. З іншого боку, у цьому випадку $I(r,\varphi) = \int_0^{x_0} W_F(x)e^{rx}dx \leqslant x_0\mu(r,\varphi)$ і з огляду на лему 1 $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,\varphi)}{r} = x_0$. Отже, доведено таке твердження.

**Теорема 8.** *Для цілої характеристичної функції $\varphi \neq const$ першого порядку і нормального типу величина типу $\sigma[\varphi]$ обчислюється за формулою* $\sigma[\varphi] = \sup\{x : W_F(x) > 0\}$.

Зауважимо, що теорема 1 уточнює твердження з [1, с. 57] про те, що існують характеристичні функції порядку $\rho[\varphi] = 1$ з величиною типу $\sigma[\varphi] \in [0\ , +\infty)$. Припустимо тепер, що $W_F(x) \neq 0$ для всіх $x \geqslant 0$. Оскільки $W_F(x) \searrow 0 (x \to +\infty)$, то $\ln\mu(r,\varphi) \geqslant \ln W_F(x_0) + x_0 r$ для всіх $r > 0$ і кожного $x_0 > 0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\ln\mu(r,\varphi)}{r} = +\infty$.

Для аналітичних у в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характеристичних функцій з (2) для кожного $r \in [\,0, R\,)$ одержуємо $W_F(x)e^{rx} \to 0$, $x \to +\infty$, а для кожного $r^* > R$ з того, що $\mathbb{D}_{\mathbb{R}}$ є найбільшим кругом аналітичності, отримаємо $W_F(x_k)e^{r^* x_k} \to \infty$ $(k \to \infty)$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності $(x_k)$ додатних чисел, звідки з огляду на довільність $r$ і $r^*$ випливає, що $R = \varliminf\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}$. Ця рівність правильна і у випадку, коли $R = +\infty$.

На відміну від цілих для аналітичних в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характереистичних функцій функція $\ln \mu(r, \varphi)$ може бути обмеженою. Неважко довести, що для того, щоб $\mu(r, \varphi) \leqslant K$ для кожного $r \in [\,0, R\,)$, необхідно і достатньо, щоб $W_F(x)e^{Rx} \leqslant K$ для всіх $x \geqslant 0$. Тому правильне таке твердження.

**Твердження 1.** *Якщо $\varphi$ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характеристична функція ймовірнісного закону $F$, то для того, щоб $\mu(r, \varphi) \uparrow +\infty$ при $r \uparrow R$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (10).*

З огляду на це твердження умова (10) наявна в теоремах 2-7. Зауважимо, що виконання умови (10) у випадку $R = +\infty$ є очевидним.

Надалі будемо вважати, що ця умова виконується, а для дослідження зростання функції $\ln \mu(r, \varphi)$ використовуватимемо зв'язок між зростанням функцій, спряжених за Юнгом.

Через $\Omega(0, R)$, $0 < R \leqslant +\infty$ позначимо клас додатних необмежених на $[0, R)$ функцій $\Phi$ таких, що похідна $\Phi'$ є додатною, неперервною і зростає до $+\infty$ на $[r_0, R)$ для деякого $r_0 \in [0, R)$. Для функцій $\Phi \in \Omega(0, R)$ нехай $\Psi(r) = r - \frac{\bar{\Phi}(r)}{\Phi'(r)}$ – функція, асоційована з $\Phi$ за Ньютоном, а функція $\phi$ обернена до $\Phi'$. Правильна така лема.

**Лема 2.** *Нехай $0 < R \leqslant +\infty$, $\Phi \in \Omega(0, R)$, $\varphi$ – аналітична в $\mathbb{D}_R$ характеристична функція ймовірнісного закону $F$, який задовольняє умову (10). Для того, щоб $\ln \mu(r, \varphi) \leqslant \Phi(r)$ для всіх $r \in [\,r_0, R\,)$, необхідно і достатньо, щоб $\ln W_F(x) \leqslant$ $\leqslant -x\Psi(\phi(x))$ для всіх $x \geqslant x_0$.*

*Доведення.* Нехай $\Omega(-\infty, R)$ – клас додатних необмежених на $(-\infty, R)$ функцій $\Phi$, для яких похідна $\Phi'$ є додатною непрервною і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, R)$, а $\Psi$ і $\phi$ визначені, як вище. Тоді [9] функція $\Psi$ є неперервною і зростає до $R$ на $(-\infty, R)$, а функція $\phi$ є неперервною і зростає до $R$ на $(0, +\infty)$.

Припустимо, що функція $P$ задана на $(0, +\infty)$ і відмінна від $+\infty$ (вона може набувати значення $-\infty$, але $P \not\equiv -\infty$ ), і нехай $Q(r) = \sup\{P(x) + rx : x > 0\}$ – функція спряжена за Юнгом. В [10] доведено таке: для того, щоб $Q(r) \leqslant \bar{\Phi}(r) \in \Omega$ $(-\infty, R)$, необхідно і достатньо, щоб $P(x) \leqslant -x\Psi(\phi(x))$ для всіх $x > 0$.

Функції $\ln \mu(r, \varphi) = \sup\{\ln W_F(x) + rx : x \geqslant 0\}$ і $\ln W_F(x)$ спряжені за Юнгом, оскільки $\Phi \in \Omega(0, R)$, то існує таке $r_0 \in (0, R)$, що $\Phi(r_0) > 0$ і $\Phi'(r_0) > 0$. Тому можна побудувати функцію $\Phi_1 \in \Omega(-\infty, R)$, яка б дорівнювала $\Phi$ на $[r_0, R]$. Зрозуміло, що тоді $\Psi_1(r) = \Psi(r)$ на $[r_0, R]$ і $\Phi_1(x) = \Phi(x)$ для $x \geqslant x_0 = x_0(r_0)$. Тому з наведеного результату з [10] випливає висновок леми 2. $\square$

Використовуючи лему 2, неважко довести таке твердження.

**Твердження 2.** *Нехай $\rho > 1$, а $\varphi$ – ціла характеристична функція ймовірнісного закону $F$. Тоді*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln \mu(r,\varphi)}{r^\rho} = \frac{(\rho-1)^{\rho-1}}{\rho^\rho} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{x}{\left(\dfrac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)^{\rho-1}}.$$

Справді, нехай $\Phi \in \Omega(0,R)$ така, що $\Phi(r) = Tr^\rho$ при $r \geqslant r_0$, де $T > 0$. Тоді для $x \geqslant x_0$ одержуємо $x\Psi(\phi(x)) = \frac{\rho-1}{\rho}\left(\frac{1}{T\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} x^{\frac{\rho}{\rho-1}}$. Тому за лемою 2 для того, щоб $\ln \mu(r,\varphi) \leqslant Tr^\rho$ для всіх $r \geqslant r_0$ необхідно і достатньо, щоб $\ln W_F(x) \leqslant -(\rho-1)\times \times\rho^{\frac{\rho}{\rho-1}} T^{\frac{-1}{\rho-1}} x^{\rho(\rho-1)}$ для всіх $x \geqslant x_0$, тобто $\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)^{\rho-1} \geqslant \frac{1}{T}(\rho-1)^{\rho-1}\rho^{-\rho}x$ при $x \geqslant x_0$, звідки неважко отримати потрібну рівність.

Припустимо тепер, що $\Phi \in \Omega(0,R)$ така, що $\Phi(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \omega(t)dt + const$, де $\omega$ – неперервна, додатна і зростаюча до $+\infty$ на $[\,r_0, R\,)$ функція. Тоді $\Phi'(r) = \omega(r)$ для $r \geqslant r_0$ і $\phi(x) = \omega^{-1}(x)$ для $x \geqslant x_0$, а отже,

$$\int_{x_0}^{x} \phi(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} \omega^{-1}(t)dt = \int\limits_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} td\omega(t) =$$

$$= x\phi(x) - x_0\phi(x_0) - \Phi(\phi(x)) + \Phi(\phi(x_0)) = x\Psi(\phi(x)) - x_0\Psi(\phi(x_0)).$$

Тому з леми 2 випливає така лема.

**Лема 3.** *Нехай $0 < r_0 < R \leqslant +\infty$ і виконується умова (10), а $\omega$ – неперервна, додатна і зростаюча до $+\infty$ на $[\,r_0, R\,)$ функція. Для того, щоб $\ln \mu(r,\varphi) \leqslant \leqslant \int\limits_{r_0}^{r} \omega(t)dt + const$, необхідно і достатньо, щоб $\ln W_F(x) \leqslant -\int\limits_{x_0}^{x} \omega^{-1}(t)dt + const$.*

Використовуючи цю лему, доведемо таке твердження.

**Твердження 3.** *Нехай або $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, а $\varphi$ – ціла характеристична функція. Для того, щоб*

$$\alpha\left(\frac{\ln \mu(r,\varphi)}{r}\right) \leqslant (1+o(1))\beta(r), \qquad r \to \infty, \tag{13}$$

*необхідно і достатньо, щоб*

$$\alpha(x) \leqslant (1+o(1))\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right), \qquad x \to +\infty. \tag{14}$$

*Доведення.* З (13) випливає, що $\ln \mu(r,\varphi) \leqslant r\alpha^{-1}(\delta\beta(r))$ для будь-якого $\delta > 1$ і всіх $r \geqslant r_0(\delta)$, тобто $\ln W_F(x) \leqslant r\left(\alpha^{-1}(\delta\beta(r)) - x\right)$ для всіх $r \geqslant r_0(\delta)$ і $x > 0$. Виберемо $r = r(x) = \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\varepsilon x)}{\delta}\right)$, де $\varepsilon \in (0,1)$ – довільне число. Тоді $r(x) \geqslant r_0(\delta)$ для всіх $x \geqslant x_0(\delta,\varepsilon)$, і отже, $\ln W_F(x) \leqslant -(1-\varepsilon)x\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\varepsilon x)}{\delta}\right)$ для всіх $x \geqslant x_0(\delta,\varepsilon)$, звідки випливає, що $\frac{\alpha(\varepsilon x)}{\beta\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)} \leqslant \delta$ для всіх $x \geqslant x_0(\delta,\varepsilon)$. Якщо $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, то

$\alpha(\varepsilon x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$, а [11] $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \frac{\beta(x)}{\beta\left(\frac{x}{1-x}\right)} = A(\varepsilon) \searrow 1$ $(\varepsilon \downarrow 0)$. Тому з останньої нерівності отримуємо

$$\delta \geqslant \frac{\alpha(x)(1+o(1))}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)} \frac{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)}{\beta\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)} \geqslant \frac{1+o(1)}{A(\varepsilon)} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)}, \quad x\to+\infty,$$

звідки, спрямовуючи $\varepsilon \to 0$ і $\delta \to 1$, одержимо (14). Якщо ж $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\alpha \in L^0$, то $\beta\left(\frac{x}{1-\varepsilon}\right) = (1+o(1))\beta(x)$ при $x \to +\infty$, а $\overline{\lim\limits_{x\leftarrow\infty}} \frac{\alpha(\varepsilon x)}{\alpha(x)} = \overline{\lim\limits_{x\leftarrow\infty}} \frac{\alpha((1-(1-\varepsilon))x)}{\alpha(x)} = A_1(\varepsilon) \searrow 1$ $(\varepsilon \uparrow 1)$. Тому знову отримаємо (14).

Навпаки, з умови (14) для будь-якого $\delta > 1$ і всіх $x \geqslant x_0 = x_0(\delta) > 0$ одержуємо $\ln W_F(x) \leqslant -x\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right) \leqslant -\int\limits_{x_0}^{x} \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\delta}\right) dt$, тобто за лемою 3 з $\omega(t) = \alpha^{-1}(\delta\beta(t))$ отримуємо нерівність

$$\ln\mu(r,\varphi) \leqslant \int\limits_{r_0}^{r} \alpha^{-1}\left(\delta\beta(r)\right) dt + const \leqslant r\alpha^{-1}\left(\delta\beta(r)\right) + const,$$

звідки випливає (13). Твердження 2 доведено. □

**Наслідок 1.** *За умов твердження 3 для того, щоб* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln\mu(r,\varphi)\right)}{\beta(r)} = 1$, *необхідно і достатньо, щоб* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)} = 1$.

Перейдемо до характеристичних функцій, аналітичних в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, і спочатку зауважимо, що з рівності $R = \underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}$ випливає, що $\frac{x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})} \to +\infty$ при $x \to \infty$, звідки з огляду на (10)випливає, що зростання функції $\ln\mu(r,\varphi) \uparrow \infty$ при $r \uparrow R$ можна вивчати або в термінах зростання функції $\frac{x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})}$, або в термінах зростання функції $W_F(x)e^{Rx}$. Продемонструємо це на прикладі аналітичних характеристичних в $\mathbb{D}_R$ функцій скінченного порядку.

Нехай $\Phi(r) = a\left(\frac{1}{R-r}\right)^b$, де $a > 0$ і $b > 0$. Зрозуміло, що $\Phi \in \Omega\,(0,R)$, і неважко перевірити, що $x\Psi\left(\phi(x)\right) = Rx - \frac{b+1}{b}(ab)^{\frac{1}{b+1}} x^{\frac{b}{b+1}}$. Тому за лемою 2 для того, щоб $\ln\mu(r,\varphi) \leqslant a\left(\frac{1}{R-r}\right)^b$ для всіх $r \in [\, r_0, R\,)$, необхідно і достатньо, щоб $\ln W_F(x) \leqslant -Rx + \frac{b+1}{b}(ab)^{\frac{1}{b+1}} x^{\frac{b}{b+1}}$ для всіх $x \geqslant x_0$, звідки для належного вибору $a$ і $b$ отримуємо таке твердження.

**Твердження 4.** *Нехай $\varphi$ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, характерестична функція ймовірнісного закону $F$, який задовольняє умову (10), і* $\rho = \overline{\lim\limits_{r\uparrow R}} \frac{\ln\ln\mu(r,\varphi)}{\ln\frac{1}{R-r}}$. *Тоді* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\ln\ln(W_F(x)e^{Rx})}{\ln x} = \frac{\rho}{\rho+1}$ *і* $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\ln x}{\ln\frac{x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})}} = \rho+1$, *якщо* $0 < \rho < +\infty$, *то*

$$\overline{\lim_{r\uparrow R}} \frac{\ln\mu(r,\varphi)}{\left(\frac{1}{R-r}\right)^{\rho}} = \frac{\rho^{\rho}}{(\rho+1)^{\rho+1}} \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln^{\rho+1}\left(W_F(x)e^{Rx}\right)}{x^{\rho}} =$$

$$= \frac{\rho^\rho}{(\rho+1)^{\rho+1}} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(\frac{x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})}\right)^{\rho+1}}.$$

Аналогом твердження 3 є таке твердження.

**Твердження 5.** *Нехай* $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{x} \to 0$ *і* $\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right) = (1+o(1))\,\alpha(x)$ *при* $x \to +\infty$ *для деякого* $c \in (0,1)$, *а* $\varphi$ *– аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* $F$, *який задовольняє умову (10). Для того, щоб*

$$\alpha\left(\ln\mu(r,\varphi)\right) \leqslant (1+o(1))\beta\left(\frac{1}{R-r}\right), \quad r \uparrow R, \tag{15}$$

*необхідно і достатньо, щоб*

$$\alpha(x) \leqslant (1+o(1))\beta\left(\frac{x}{\ln\left(W_F(x)e^{Rx}\right)}\right), \quad x \to +\infty. \tag{16}$$

*Доведення.* З (15) для кожного $\delta \in \left(1, \frac{1}{c}\right)$ і всіх $r \in [\,r_0(\delta), R\,)$ отримаємо $\ln\mu(r,\varphi) \leqslant \alpha^{-1}\left(\delta\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)\right)$, тобто

$$\ln W_F(x) \leqslant \alpha^{-1}\left(\delta\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)\right) - rx \tag{17}$$

для всіх $x \geqslant 0$ і всіх $r \in [\,r_0(\delta), R\,)$. Виберемо

$$r = r(x) = R - \frac{1}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)}\right)\right)}.$$

Тоді $r_0(\delta) \leqslant r(x) < R$ для всіх $x \geqslant x_0(\delta)$, а з (17) отримуємо

$$\ln W_F(x) \leqslant \frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)} - Rx + \frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)}\right)\right)},$$

звідки $\ln\left(W_F(x)e^{Rx}\right) \leqslant \frac{2x}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)}\right)\right)}$, і отже, з огляду на умови твердження

$$(1+o(1))\delta\beta\left(\frac{x}{\ln\left(W_F(x)e^{Rx}\right)}\right) \geqslant \alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)}\right) = (1+o(1))\alpha(x), \quad x \to \infty,$$

звідки на підставі довільності $\delta$ отримуємо (16).

Навпаки, якщо виконується умова (16), то для будь-якого $\delta > 1$ і всіх $x \geqslant x_0(\delta)$ правильна нерівність

$$\ln W_F(x) \leqslant -Rx + \frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)} \leqslant -\int_{x_0}^{x}\left(R - \frac{1}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)}\right)dt + const.$$

Тому за лемою 3 з $\omega(t) = \alpha^{-1}\left(\delta\beta\left(\frac{1}{R-t}\right)\right)$ одержуємо

$$\ln\mu(r,\varphi) \leqslant \int\limits_{r_0}^{r} \alpha^{-1}\left(\delta\beta\left(\frac{1}{R-t}\right)\right)dt \leqslant (R-r_0)\alpha^{-1}\left(\delta\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)\right),$$

звідки з погляду на умову $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і довільність $\delta$ випливає оцінка (15). Твердження 5 повністю доведено. □

**Наслідок 2.** *За умов твердження 5 для того, щоб* $\overline{\lim\limits_{r\uparrow R}}\frac{\alpha(\ln\mu(r,\varphi))}{\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)} = 1$, *необхідно і достатньо, щоб* $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{x}{\ln\left(W_F(x)e^{Rx}\right)}\right)} = 1.$

Умови $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{x} \to 0$ і $\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ означають, що функція $\alpha$ зростає повільніше, ніж функція $\beta$. У випадку, коли $\alpha$ зростає швидше, ніж $\beta$, правильне таке твердження.

**Твердження 6.** *Нехай* $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, $\frac{\alpha^{-1}(c\beta(x))}{x} \to 0$ *і* $\beta\left(\frac{x}{\beta^{-1}(c\beta(x))}\right) = (1+o(1))\,\beta(x)$ *при* $x \to +\infty$ *для деякого* $c \in (1,+\infty)$, *а* $\varphi$ *– аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* $F$, *який задовольняє умову (10). Для того, щоб виконувалась асимптотична нерівність (15), необхідно і достатньо, щоб*

$$\alpha\left(\ln\left(W_F(x)e^{Rx}\right)\right) \leqslant (1+o(1))\beta(x), \qquad x \to \infty. \tag{18}$$

*Доведення.* З (15) як вище, для кожного $\delta \in (1,c)$ всіх $x \geqslant 0$ і всіх $r \in [\,r_0(\delta), R\,)$ одержимо (17). Виберемо тепер $r = R - \frac{1}{x}$. Зрозуміло, що тоді для всіх $x \geqslant x_0(\delta)$ з (17) одержимо нерівність $\ln W_F(x) \leqslant \alpha^{-1}(\delta\beta(x)) - Rx + 1$, звідки легко випливає (18).

Навпаки, з (18) отримаємо $\ln W_F(x) \leqslant \alpha^{-1}(\delta\beta(x)) - Rx$ для кожного $\delta > 1$ і всіх $x \geqslant x_0$. Тому, прийнявши максимум окремо на $[0,x_0]$ та $[x_0,+\infty]$, отримуємо

$$\ln\mu(r,\varphi) \leqslant \max\left\{\max\left\{\alpha^{-1}(\delta\beta(x) - (R-r)x : x \leqslant x_0)\right\},\right.$$
$$\left.\max\left\{\alpha^{-1}(\delta\beta(x) - (R-r)x : x \geqslant x_0)\right\}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\left\{\alpha^{-1}(\delta\beta(x) - (R-r)x : x \geqslant 0)\right\} + \alpha^{-1}\left(\rho\beta(x_0)\right).$$

Але

$$\max\left\{\alpha^{-1}(\delta\beta(x) - (R-r)x : x \geqslant 0)\right\} = \max\left\{x\left(\frac{\alpha^{-1}\left(\delta\beta(x)\right)}{x} - (R-r)\right) : x \geqslant 0)\right\}.$$

Тому точка цього максимуму $x = x(r)$ є такою, що $\frac{\alpha^{-1}(\delta\beta(x(r)))}{x(r)} \geqslant R - r$ (бо у протилежному випадку ми мали б співвідношення $\ln\mu(r,\varphi) = O(1)$, при $r \uparrow R$). Отже, $\dfrac{x(r)}{\alpha^{-1}(\delta\beta(x(r)))} \leqslant \dfrac{1}{R-r}$, а $\ln\mu(r,\varphi) \leqslant \alpha^{-1}(\delta\beta(x(r))) + \alpha^{-1}(\delta\beta(x_0))$, звідки з огляду на умови твердження

$$(1+o(1))\alpha(\ln\mu(r,\varphi)) \leqslant \delta\beta(x(r)) = (1+o(1))\delta\beta\left(\frac{x(r)}{\alpha^{-1}(\delta\beta(x(r)))}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1+o(1))\delta\beta\left(\frac{1}{R-r}\right), \qquad r\to\infty,$$

тобто на підставі довільності $\delta$ отримаємо асимптотичну нерівність (15). Твердження 6 доведено. □

**Наслідок 3.** *За умов твердження 6 для того, щоб* $\overline{\lim\limits_{r\uparrow R}}\frac{\alpha\ln\mu(r,\varphi)}{\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)}=1$, *необхідно і достатньо, щоб* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\frac{\alpha\left(\ln(W_F(x)e^{Rx})\right)}{\beta(x)}=1$.

Нехай $\alpha\in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta(x)=\rho_\alpha\alpha(x)$, де $\rho_\alpha=\overline{\lim\limits_{r\uparrow R}}\frac{\alpha(\ln\mu(r,\varphi))}{\alpha\left(\frac{1}{1-r}\right)}$. Якщо $\rho_\alpha\geqslant 1$, то $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{x}=\frac{1}{x}\alpha^{-1}\left(\frac{c}{\rho_\alpha}\alpha(x)\right)\to 0$ при $x\to+\infty$ для кожного $c\in(0,1)$, і ми можемо використовувати висновок наслідку 3. Якщо ж $\rho_\alpha<1$, то $\frac{\alpha^{-1}(c\beta(x))}{x}=\frac{\alpha^{-1}(c\rho_\alpha\alpha(x))}{x}\to 0$ при $x\to\infty$ для кожного $c\in(1,1/\rho_\alpha)$, і можна використовувати наслідок 4 звідки випливає таке твердження.

**Наслідок 4.** *Нехай* $\alpha\in L_{\text{ПЗ}}$ *і* $\alpha\left(\frac{x}{\alpha^{-1}(c\alpha(x))}\right)=(1+o(1))\alpha(x)$ *при* $x\to+\infty$ *для будь-якого* $c\in(0,1)$, *а* $\varphi$ *– аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0<R<\infty$, *характеричтична функція ймовірнісного закону* $F$, *який задовольняє умову (10). Якщо* $\rho_\alpha\geqslant 1$, *то* $\rho_\alpha=\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\frac{\alpha(x)}{\alpha\left(\frac{x}{\ln^+(W_f(x)e^{Rx})}\right)}$, *якщо* $\rho_\alpha<1$, *то* $\rho_\alpha=\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\frac{\alpha\left(\ln W_F(x)e^{Rx}\right)}{\alpha(x)}$.

Перейдемо до розгляду випадків, коли або $\beta(x)\equiv x$, або $\alpha(x)\equiv x$. Почнемо з такого твердження.

**Твердження 7.** *Нехай* $\alpha\in L_{\text{ПЗ}}$ *і* $\alpha\left(\frac{x}{\alpha(x)}\right)=(1+o(1))\alpha(x)$ *при* $x\to+\infty$, *а* $\varphi$ *– аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0<R<+\infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* $F$, *який задовольняє умову (10). Для того, щоб*

$$\alpha\left(\ln\mu(r,\varphi)\right)\leqslant\frac{1+o(1)}{R-r}, \qquad r\uparrow R, \tag{19}$$

*необхідно і достатньо, щоб*

$$\alpha(x)\leqslant\frac{(1+o(1))x}{\ln\left(W_F(x)e^{Rx}\right)}, \qquad x\to+\infty. \tag{20}$$

*Доведення.* Неважко довести, що з умов $\alpha\in L_{\text{ПЗ}}$ і $\alpha\left(\frac{x}{\alpha(x)}\right)=(1+o(1))\alpha(x)$ при $x\to\infty$ одержимо $\alpha(x)=(1+o(1))\alpha\left(\frac{x}{\alpha^2(x)}\right)$, при $x\to\infty$.

Припустимо, що виконується умова (19), тобто $\ln\mu(r,\varphi)\leqslant\alpha^{-1}\left(\frac{\delta}{R-r}\right)$ для кожного $\delta>1$ і всіх $r\in[\,r_0(\delta),R\,)$, звідки випливає, що $\ln W_F(x)\leqslant\alpha^{-1}\left(\frac{\delta}{R-r}\right)-xr$ для всіх $x\geqslant 0$ і $r\in[\,r_0(\delta),R\,)$. Якщо виберемо $r=R-\frac{\delta}{\alpha\left(\frac{x}{\alpha^2(x)}\right)}$, то $r\in[\,r_0(\delta),R\,)$ для всіх $x\geqslant x_0(\delta)$ і

$$\ln W_F(x)\leqslant\frac{x}{\alpha^2(x)}-Rx+\frac{\delta x}{\alpha\left(\frac{x}{\alpha^2(x)}\right)}=\frac{\delta(1+o(1))x}{\alpha(x)}-Rx, \qquad x\to+\infty,$$

звідки випливає (20). Навпаки з (20) для кожного $\delta > 1$ і всіх $x \geqslant x_0(\delta)$ випливає нерівність $\ln W_F(x) \leqslant \frac{\delta x}{\alpha(x)} - Rx$, тобто

$$\ln \mu(r,\varphi) \leqslant \max\left\{x\left(\frac{\delta}{\alpha(x)} - (R-r)\right) \ : \ x \geqslant 0\right\} + O(1),$$

при $r \uparrow R$. Цей максимум досягається в точці $x = x^*(R)$ такій, що $\frac{\delta}{\alpha(x)} > R-r$, тобто $\alpha(x^*(R)) \leqslant \frac{\delta}{R-r}$. Оскільки $\ln\mu(r,\varphi) \leqslant \frac{x^*(r)\delta}{\alpha(x^*(R))} \leqslant x^*(r) \leqslant \alpha^{-1}\left(\frac{\delta}{R-r}\right)$, то з огляду на довільність $\delta$ отримуємо (19). Твердження 7 доведено. □

**Наслідок 5.** *За умов твердження 7 для того, щоб* $\overline{\lim\limits_{r\uparrow R}}(R-r)\alpha\left(\ln\mu(r,\varphi)\right) = 1$, *необхідно і достатньо, щоб* $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \frac{\alpha(x)}{x} \ln\left(W_F(x)e^{Rx}\right) = 1$.

**Твердження 8.** *Нехай* $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ *і* $\beta\left(\frac{x}{\beta(x)}\right) = (1+o(1))\beta(x)$ *при* $x \to +\infty$, *а* $\varphi$ *– аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* $F$, *який задовольняє умову (10). Для того, щоб*

$$\ln\mu(r,\varphi) \leqslant (1+o(1))\beta\left(\frac{1}{R-r}\right), \qquad r \uparrow R, \tag{21}$$

*необхідно і достатньо, щоб*

$$\ln\left(W_F(x)e^{Rx}\right) \leqslant (1+o(1))\beta(x), \qquad x \to +\infty. \tag{22}$$

*Доведення.* З (21) для будь-якого $\delta > 1$ і всіх $r \in [\,r_0(\delta), R\,)$ одержуємо $\ln\mu(r,\varphi) \leqslant \leqslant \delta\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)$, і отже, $\ln W_F(x) \leqslant \delta\beta\left(\frac{1}{R-r}\right) - rx$ для всіх $r \in [\,r_0(\delta), R\,)$ і $x \geqslant 0$, звідки для $r = R - \frac{1}{x}$ отримуємо $\ln W_F(x) \leqslant \delta\beta(x) - Rx + 1$, тобто правильна асимптотична нерівність (22). Навпаки, з (22) випливає, що $\ln W_F(x) \leqslant \delta\beta(x) - Rx$ для всіх $x \geqslant x_0(\delta)$, тому

$$\ln\mu(r,\varphi) \leqslant \max\left\{x\left(\frac{\delta\beta(x)}{x} - (R-r)\right) : x \geqslant 0\right\} + const.$$

Оскільки $\frac{\beta(x)}{x} \to 0 \quad (x \to \infty)$, то останній максимум досягаємо в точці $x^*(r)$ такої, що $\frac{\delta\beta(x^*(r))}{x^*(r)} \geqslant R-r$, тобто $\frac{x^*(r)}{\beta(x^*(r))} \leqslant \frac{\delta}{R-r}$. Тому

$$\ln\mu(r,\varphi) \leqslant \beta(x^*(r)) = \delta(1+o(1))\beta\left(\frac{x^*(r)}{\beta(x^*(r))}\right) =$$

$$= (1+o(1))\delta\beta\left(\frac{\delta}{R-r}\right) = (1+o(1))\delta\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)$$

при $r \uparrow R$, тобто одержуємо нерівність (21).

Твердження 8 доведено. □

**Наслідок 6.** *За умов твердження 8 для того, щоб* $\overline{\lim\limits_{r\uparrow R}} \frac{\ln\mu(r,\varphi)}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} = 1$, *необхідно і достатньо, щоб* $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \frac{\ln\left(W_F(x)e^{Rx}\right)}{\beta(x)} = 1$.

**3. Оцінки інтеграла $I(r,\varphi)$ і доведення теорем.** Нехай $0<R\leqslant+\infty$, а $\eta(r)$ – додатна неперервна на $[\,0,R\,)$ функція така, що $r+\eta(r)\uparrow R$ при $r\uparrow R$. Тоді

$$I(r,\varphi)=\int_0^{\infty}W_F(x)\exp\{(r+\eta(r))x\}\exp\{-\eta(r)x\}\,dx\leqslant\frac{\mu(r+\eta(r),\varphi)}{\eta(r)},$$

тобто

$$\ln I(r,\varphi)\leqslant\ln\mu(r+\eta(r),\varphi)+\ln\frac{1}{\eta(r)}. \tag{23}$$

Якщо $R=+\infty$, то можемо вибрати $\eta(r)=1$ і (23) отримаємо нерівність $\ln I(r,\varphi)\leqslant$ $\leqslant\ln\mu(r+1,\varphi)$, звідки з огляду на (12) з твердження 2 отримуємо формулу (9), а з наслідку 1 – теорему 1. Якщо $0<R<+\infty$, а функції $\alpha\in L^0$ і $\beta\in L^0$ такі, що $\frac{\alpha(\ln x)}{\beta(x)}\to0$ при $x\to+\infty$, то виберемо $\eta(r)=\exp\left\{-\alpha^{-1}\left(2\alpha\left(\ln\frac{1}{R-r}\right)\right)\right\}$. Оскільки $\ln\frac{1}{R-r}<\alpha^{-1}\left(2\alpha\left(\ln\frac{1}{R-r}\right)\right)$, то $r+\eta(r)<R$ і з нерівності (23) одержуємо

$$\ln I(r,\varphi)\leqslant\ln\mu(r+\eta(r),\varphi)+\alpha^{-1}\left(2\alpha\left(\ln\frac{1}{R-r}\right)\right). \tag{24}$$

Якщо тепер $\alpha(x)=x$ і $\beta(x)=x^{\rho}$, то

$$(R-r)^{\rho}\ln I(r,\varphi)\leqslant(R-r)^{\rho}\ln\mu(r+\eta(r))+(R-r)^{\rho}2\ln\frac{1}{R-r}=$$

$$=\frac{(R-r)^{\rho}}{(R-r-(R-r)^2)^{\rho}}\,(R-r-\eta(r))^{\rho}\ln\mu(r+\eta(r),\varphi)+o(1)=$$

$$=(1+o(1))\,(R-(r+\eta(r)))^{\rho}\ln\mu(r+\eta(r),\varphi),\qquad r\uparrow R, \tag{25}$$

якщо $\alpha(x)=\beta(x)=\ln x$, то $\eta(r)=\exp\left\{-\ln^2\frac{1}{R-r}\right\}$ і з (24) випливає, що

$$\frac{\ln\ln I(r,\varphi)}{\ln\frac{1}{R-r}}\leqslant\frac{\ln\ln\mu(r+\eta(r),\varphi)}{\ln\frac{1}{R-r-\eta(r)}}\frac{\ln\frac{1}{R-r-\eta(r)}}{\ln\frac{1}{R-r}}.$$

Неважко довести, що $\frac{\ln(R-\ln r-\eta(r))}{\ln(R-r)}\to1\qquad(r\uparrow1)$, тому

$$\frac{\ln\ln I(r,\varphi)}{\ln\frac{1}{R-r}}\leqslant(1+o(1))\frac{\ln\ln\mu(r+\eta(r),\varphi)}{\ln\frac{1}{R-r-\eta(r)}},\qquad r\uparrow\infty. \tag{26}$$

З огляду на (12), (25) і (26) з твердження 4 отримуємо теорему 2. Припустимо тепер, що $\alpha\in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta\in L^0$. Тоді

$$\alpha(\ln I(r,\varphi))\leqslant\alpha\left(2\max\left\{\ln\mu(r+\eta(r),\varphi),\ln\frac{1}{\eta(r)}\right\}\right)\leqslant$$

$$\leqslant(1+o(1))\left(\alpha\left(\ln\mu(r+\eta(r),\varphi)\right)+2\alpha\left(\ln\frac{1}{R-r}\right)\right),\qquad r\uparrow R,$$

а

$$\beta\left(\frac{1}{R-r-\eta(r)}\right)=(1+o(1))\beta\left(\frac{1}{R-r}\right),\qquad r\uparrow R,$$

то з огляду на умову $\frac{\alpha(\ln x)}{\beta(x)} \to 0(x \to \infty)$ отримуємо асимптотичну нерівність

$$\alpha(\ln I(r,\varphi))/\beta\left(\frac{1}{R-r}\right) \leqslant \frac{\alpha\left(\ln\mu(r+\eta(r),\varphi)\right)}{\beta\left(\frac{1}{R-r-\eta(r)}\right)}, \qquad r\uparrow\infty,$$

звідки з огляду на наслідок 2 і співвідношення (12) отримуємо теорему 3.

Використовуючи (12) і наслідки 3, 4, 5 і 6, подібно доводимо теореми 5, 6, 7, 8.

Автори висловлюють подяку Шереметі М.М. за формулюванням задачі та слушні зауваження.

## Список використаної літератури

1. *Линник Ю.В.* Разложение случайных величин и векторов / *Ю.В. Линник, Н.В. Островський* – М.: Наука, 1972.
2. *Ramacxhandran B.* On the order and the type of entire characteristic functions / *B. Ramacxhandran* // Ann. Math. – 1962. – Vol. 33, №4. – P. 1238-1255.
3. *Яковлева Н.И.* О росте целых характеристических функций вероятностных законов / *Н.И. Яковлева* // Теория функций и их приложения. – 1971. – Вып. 15. – С. 43-49.
4. *Яковлева Н.И.* О росте целых характеристических функций вероятностных законов / *Н.И. Яковлева* // Вопросы мат. физики и функц. анализа. – К.: Наукова думка, 1976. – С. 43-54.
5. *Шеремета М.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов её степенного разложения / *М. Шеремета* // Изв. вузов. Матем. – 1967. – №2. – С. 100-108.
6. *Винницкий Б.В.* Об одном свойстве целых характеристических функций вероятностных законов / *Б.В. Винницкий* // Изв. вузов. Матем. – 1975. – №4. – С. 95-97.
7. *Dewess M.* The tail behaviour of a distribution function and its connection to the growth of its entire characteristic function / *M. Dewess* // Math. Nachr. – 1978. – Vol. 81. – P. 217-231.
8. *Сорокивский В.М.* О росте характеристических функций вероятностных законов / *В.М. Сорокивский* // Изв. вузов. Матем. – 1979. – №9. – С. 48-52.
9. *Шеремета М.Н.* О производной ряда Дирихле / *М.Н. Шеремета, С.И. Федыняк* // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, №1. – С. 206-233.
10. *Шеремета М.М.* Звя'зок між зростанням спряжених за Юнгом функцій / *М.М. Шеремета, О.М. Сумик* // Мат. Студії. – 1999. – Т. 11, №1. – С. 41-47.
11. *Sheremeta M.M.* On two classes of positive funcions and belonging to them of main characteristics of entire functions / *M.M. Sheremeta* // Mat. Studii. – 2003. – Vol. 19, №1 – P. 74-82.

*Стаття: надійшла до редакції 14.05.2012*
*прийнята до друку 12.12.2012*

# ABOUT THE GROWTH OF CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF PROBABILITY LAWS

**Orest KINASH, Marta PAROLYA**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universytetska Str., 1, Lviv, 79000*
*e-mail: okinasch@yahoo.com*

For analytic in $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, characteristic functions $\varphi$ of probability laws $F$ in terms of generalized orders a relations between the growth of $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r < R\}$ and decrease of $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$ are established.

*Key words:* anaclitic function, characteristic function, probability laws generalized order.

# О ВОЗРОСТАНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

**Орест КИНАШ, Марта ПАРОЛЯ**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
*ул. Университетская, 1, Львов, 79000*
*e-mail: okinasch@yahoo.com*

Для аналитических в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, характеристических функций $\varphi$ вероятностных законов $F$ в терминах обобщённых порядков установлена связь между ростом $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r < R\}$ и убыванием $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$.

*Ключевые слова:* аналитическая функция, характеристическая функция, вероятностный закон, обобщённый порядок.