ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 132–144
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 132–144

УДК 517.95

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ В ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Андрій ЛОПУШАНСЬКИЙ

Інститут математики, Ряшівський університет,
ал. Рейтана, 16 А, Ряшів, 35-959, Польща
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

Доведено теорему існування та єдиності, одержано зображення за допомогою вектор-функції Гріна розв'язку задачі Коші

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \quad a = const,$$
$$u^{(j)}(x,0) = F_j(x), \quad x \in R^n, \quad j = 1,2,$$

з похідною Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta \in (1,2)$ та F, F_1, F_2 із просторів узагальнених функцій D'. Тут $(-\Delta)^{\alpha/2}$ визначено за допомогою перетворення Фур'є $\mathfrak{F}((-\Delta))^{\alpha/2}\psi(x) = |\lambda|^\alpha \mathfrak{F}[\psi(x)]$.

Ключові слова: похідна дробового порядку, узагальнена функція, задача Коші, вектор-функція Гріна.

1. Вступ. В [1]-[4] було доведено теореми існування та єдиності, а також одержано зображення за допомогою функції Гріна класичних розв'язків задач Коші для рівняння

$$D_t^\beta u(x,t) = A(x,D)u(x,t), \quad (x,t) \in R^n \times [0,T],$$

з регуляризованою похідною ([4], [5]) функції u порядку $\beta \in (m-1;m)$, $m = 1,2,\dots$

$$D_t^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int\limits_0^t \frac{u_\tau^{(m)}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\beta-m+1}} d\tau, \quad (x,t) \in R^n \times [0,T], \quad m = 1,2,\dots,$$

де $A(x,D) = \Delta$ у [4], $A(x,D)$ – еліптичний диференціальний оператор другого порядку з гладкими коефіцієнтами, залежними від просторової змінної $x \in \mathbb{R}^n$ та $\beta \in (0,1)$ у [1], [2], $A(x,D) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$, $\beta \in (0,1)$ у [3]. Крайові задачі для рівнянь із декількома дробовими похідними вивчали у [6]-[8] та інших працях.

У праці [9] було показано однозначну розв'язність задачі Коші для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \mathbb{R} \times (0,T],$$

з дробовою похідною Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta \in (0,1)$ у випадку даних – узагальнених функцій повільного зростання.

Наша мета – довести однозначну розв'язність задачі Коші з даними – узагальненими функціями з просторів типу D' для рівняння

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T], \tag{1}$$

з дробовою похідною Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta \in (1,2)$, де оператор $\mathfrak{J}_{-\alpha} = (-\Delta)^{\alpha/2}$ є оберненим до згорткового оператора $\mathfrak{J}_\alpha = (-\Delta)^{-\alpha/2}$:

$$(\mathfrak{J}_\alpha g)(x) = J_\alpha(x) * g(x) \quad \forall g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n),$$

$J_\alpha(x) = 2^{-\alpha}\pi^{n/2}\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}|x|^{\alpha-n}$, $\Gamma(\lambda)$ – гамма-функція, $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно диференційовних швидкоспадаючих на безмежності функцій.

Оскільки $\mathfrak{J}_{-\alpha}\psi = g <=> \psi = \mathfrak{J}_\alpha g$, то за властивістю перетворення Фур'є $\mathfrak{F}$ згортки $\mathfrak{F}[\psi] = \mathfrak{F}[\mathfrak{J}_\alpha]\mathfrak{F}[g]$, а за формулою

$$\mathfrak{F}[|x|^p] = 2^{p+n}\pi^{-\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{p+n}{2})}{\Gamma(-\frac{p}{2})}|\lambda|^{-p-n} \qquad ([10, \text{с. } 156])$$

одержуємо $\mathfrak{F}[\mathfrak{J}_\alpha] = |\lambda|^{-\alpha}$. Тоді

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{J}_{-\alpha}\psi] = \mathfrak{F}[g] = |\lambda|^\alpha \mathfrak{F}[\psi], \qquad \text{а отже,} \qquad \mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}g(x)] = |\lambda|^\alpha \mathfrak{F}[g(x)].$$

2. Основні позначення. Надалі використовуємо такі позначення:

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – мультиіндекс, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, $D_x^\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial_{x_1}^{\gamma_1} \dots \partial_{x_n}^{\gamma_n}}$,

$D^{\bar\gamma} = D_{x,t}^{\bar\gamma} = D_x^\gamma D_t^{\gamma_0}$, $|\bar\gamma| = |\gamma| + [\frac{\alpha}{\beta}]\gamma_0$, де p – ціла частина числа p,

$Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T]$, $n = 1, 2, \dots$,

$\mathfrak{E}(R^n) = C^\infty(R^n)$,

$C^{\infty,(0)}(\bar Q_T) = \{\varphi \in C^\infty(\bar Q_T) : D_t^l \varphi|_{t=T} = 0,\ l = 0, 1, 2, \dots\}$,

$D(R^n) = C_0^\infty(R^n)$ та $D(Q_T)$ – простори нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями відповідно в R^n та Q_T ([10, с. 13]),

$D(\bar Q_T) = C_0^{\infty,(0)}(\bar Q_T)$ – простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в $\bar Q_\tau$, $\tau < T$;

$\mathfrak{E}'(R^n)$, $D'(\mathbb{R}^n)$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій), відповідно, на $\mathfrak{E}(R^n)$, $D(\mathbb{R}^n)$, (f,φ) – значення $f \in \mathfrak{E}'(R^n)$ $\quad (f \in D'(\mathbb{R}^n))$ на основній функції $\varphi \in \mathfrak{E}(R^n)$ $\quad$ (відповідно $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$);

$D'(\bar Q_T)$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $D(\bar Q_T)$, $(f,\varphi)_{Q_T}$ – значення $f \in D'(\bar Q_T)$ на $\varphi \in D(\bar Q_T)$.

Позначаємо через $\hat *$ операцію згортки узагальненої функції g та основної функції φ ([10], с. 111): $(g \hat * \varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi))$, через $*$ позначаємо операцію згортки узагальнених функцій f і g, тобто узагальнену функцію $f * g$

$$(f * g, \varphi) = (f, g \hat * \varphi) \text{ для кожної основної функції } \varphi.$$

Використовуємо функцію $f_\lambda \in D'_+(R) = \{f \in D'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \quad \text{і} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \leqslant 0,$$

де $\theta(t)$– одинична функція Хевісайда. Правильні такі співвідношення:

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \quad f_\lambda \hat * f_\mu = f_{\lambda+\mu},$$

$$f_{-\beta}(t) \hat * v(x,t) = f'_{1-\beta}(t) \hat * v(x,t) = -f_{1-\beta}(t) \hat * v_t(x,t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial}{\partial t}\int_t^T \frac{v(x,\eta)}{(\eta-t)^\beta}d\eta,$$

$$(x,t)\in Q_T, \quad \beta\in(0;1), \quad v\in D(\bar{Q}_T).$$

Нагадаємо, що похідна Рімана-Ліувілля функції $v(x,t)$ порядку $\beta>0$ визначається формулою

$$v_t^{(\beta)}(x,t)=f_{-\beta}(t)*v(x,t),$$

похідна Капуто (регуляризована дробова похідна) порядку $\beta\in(1,2)$ визначена так:

$$D_t^\beta v(x,t)=f_{2-\beta}(t)*v_{tt}(x,t).$$

Позначаємо через $C^{\alpha,\beta}(Q_T)=C^{\alpha,\beta}_{x,t}(Q_T)$ клас неперервних обмежених функцій $v(x,t)$, $(x,t)\in\bar{Q}_T$, які дорівнюють нулю при $t\geq T$ та з неперервними функціями $(-\Delta)^{\alpha/2}v$, $D_t^\beta v$ в Q_T.

Введемо оператори

$\hat{L}$: $\quad (\hat{L}v)(x,t)\equiv f_{-\beta}(t)\hat{*}v(x,t)+(-\Delta)^{\alpha/2}v(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \quad v\in D(\bar{Q}_T),$

L: $\quad (Lv)(x,t)\equiv f_{-\beta}(t)*v(x,t)+(-\Delta)^{\alpha/2}v(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \quad v\in D'(\bar{Q}_T),$

L^{reg}: $\quad (L^{reg}v)(x,t)\equiv D_t^\beta v(x,t)+(-\Delta)^{\alpha/2}v(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \quad v\in C^{\alpha,\beta}x,t(Q_T)$

та функційний простір

$$X(\bar{Q}_T)=\{\varphi\in C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)\ :\ \hat{L}\varphi\in D(\bar{Q}_T)\}.$$

За аналогією з результатами праці [9] можна довести, що $X(\bar{Q}_T)$ непорожний.

3. Формула Гріна.

Лема 1. *Для $v\in C^{\alpha,\beta}(Q_T)$, $\psi\in D(\bar{Q}_T)$ правильна формула Гріна*

$$\int\limits_{Q_T} v(x,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt=\int\limits_{Q_T}(L^{reg}v)(x,t)\psi(x,t)dxdt+ \tag{2}$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x,0)dx\int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt+\int\limits_{\mathbb{R}^n} v_t(x,0)dx\int\limits_0^T f_{2-\beta}(t)\psi(x,t)dt.$$

Доведення. Перетворимо $\int\limits_{Q_T}(L^{reg}v)(x,t)\psi(x,t)dxdt$, інтегруючи частинами. Отримаємо

$$\int\limits_{Q_T} D_t^\beta v(x,t)\psi(x,t)dxdt=\int\limits_{Q_T}\big(f_{2-\beta}(t)*v_{tt}(x,t)\big)\psi(x,t)dxdt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\int\limits_{Q_T}\Big(\int\limits_0^t(t-\tau)^{1-\beta}v_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau\Big)\psi(x,t)dxdt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}dx\int\limits_0^T\Big(\int\limits_\tau^T(t-\tau)^{1-\beta}\psi(x,t)dt\Big)v_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}dx\int\limits_0^T\Big(\int\limits_0^{T-\tau}\eta^{1-\beta}\psi(x,\eta+\tau)d\eta\Big)v_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}dx\int\limits_0^T\big(f_{2-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(x,\tau)\big)v_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau=$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(v_\tau(x,\tau)(f_{2-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(x,\tau))\Big)\Big|_{\tau=0}^{\tau=T} dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_0^T \Big(v_\tau(x,\tau)(f_{2-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(x,\tau))_\tau d\tau\Big) dt =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} v_\tau(x,0)(f_{2-\beta}\hat{*}\psi)(x,0)dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x,0)(f_{2-\beta}\hat{*}\psi)_\tau(x,0)dx +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_0^T \Big(v(x,\tau)(f_{2-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(x,\tau))_{\tau\tau} d\tau\Big) dt =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} v_\tau(x,0)(f_{2-\beta}\hat{*}\psi)(x,0)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x,0)(f_{1-\beta}\hat{*}\psi)(x,0)dx +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_0^T \Big(v(x,\tau)(f_{-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(x,\tau)) d\tau\Big) dt,$$

$$\int\limits_{Q_T} (-\Delta)^{\alpha/2} v(x,t)\psi(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} v(x,t)(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x,t)dxdt,$$

звідки й випливає потрібна формула. □

4. Формулювання задачі. Вважатимемо надалі, що справджується припущення.

Припущення (L): $\beta \in (1,2)$, $\alpha \neq \beta$, $F_1, F_2 \in \mathfrak{E}'(R^n)$, $F \in X'(\bar{Q}_T)$.

За припущення (L) вивчаємо задачу Коші

$$(Lu)(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad u(x,0) = F_1(x), \quad u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Означення 1. *Функція $u \in D'(\bar{Q}_T)$, що задовольняє тотожність*

$$(u(x,t), (\hat{L}\psi)(x,t))_{Q_T} = (F,\psi)_{Q_T} + \sum_{j=1}^{2} (F_j(x), \int\limits_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(x,t)dt), \ \ \forall \psi \in X(\bar{Q}_T), \quad (4)$$

називається розв'язком задачі (3).

Враховуючи формулу Гріна, задачу (3) можна вважати узагальненням задачі Коші

$$L^{reg} u = g_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (5)$$

$$u(x,0) = g_1(x), \ u_t(x,0) = g_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

з регулярними даними g_0, g_1, g_2. З одержаної нижче теореми 1 можна вивести, що при достатньо гладких і фінітних $F = g_0$, $F_1 = g_1$, $F_2 = g_2$ розв'язки задач (3) та (5), (6) збігаються.

5. Вектор-функція Гріна.

Означення 2. *Вектор-функцією Гріна задачі Коші (3) називається така трійка функцій $(G_0(x,t), G_1(x,t), G_2(x,t))$, що при достатньо гладких і фінітних g_0, g_1, g_2 функція*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)g_0(y,\tau)dy + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)g_j(y)dy, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (7)$$

є класичним (класу $C^{\alpha,\beta}(Q_T)$) розв'язком задачі (5), (6).

З означення вектор-функції Гріна випливає, що

$$LG_0(x,t)=\delta(x,t),\quad (x,t)\in Q_T,\quad L^{reg}G_j(x,t)=0,\quad (x,t)\in Q_T,\quad j=1,2,$$

$$G_1(x,0)=\delta(x),\quad (G_2)_t(x,0)=\delta(x),\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Тут δ – дельта-функція Дірака.

Лема 2. *Для кожної функції* $\psi\in X(\bar{Q}_T)$

$$\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dx=\psi(y,t),\quad (y,t)\in\bar{Q}_T,\tag{8}$$

$$\int\limits_{Q_T} G_j(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt=\int\limits_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(y,t)dt,\quad (y,t)\in\bar{Q}_T,\quad j=1,2,\tag{9}$$

$$G_j(x,t)=f_{j-\beta}(t)*G_0(x,t)\quad \textit{майже всюди в}\quad Q_T,\quad j=1,2.\tag{10}$$

Доведення. Якщо підставимо розв'язок (7) класичної задачі Коші (5), (6) в формулу (2) (замість функції v), то при довільній $\psi\in X(\bar{Q}_T)$ одержимо

$$\int\limits_{Q_T}\Big(\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)g_0(y,\tau)dy\Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{Q_T}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)g_j(y)dy\Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt=$$
$$=\int\limits_{Q_T} g_0(x,t)\psi(x,t)dxdt+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{Q_T} g_j(x)f_{j-\beta}(t)\psi(x,t)dxdt,$$

тобто
$$\int\limits_{Q_T}\Big(\int\limits_{\tau}^{T} dt\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dx\Big)g_0(y,\tau)dyd\tau+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{Q_T} G_j(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt\Big)g_j(y)dy=$$
$$=\int\limits_{Q_T}\psi(y,\tau)g_0(y,\tau)dyd\tau+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{Q_T}\Big(\int\limits_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(y,t)dt\Big)g_j(y)dy.$$

За довільністю g_0,g_1,g_2 отримуємо правильність формул (8), (9).

Для виведення формули (10) домножимо обидві частини (8) на $f_{j-\beta}$ та проінтегруємо за Q_T. Одержимо

$$\int\limits_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(y,t)dt=\int\limits_0^T f_{j-\beta}(\tau)\Big(\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt\Big)d\tau=$$
$$=\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_0^t f_{j-\beta}(\tau)G_0(x-y,t-\tau)d\tau\Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt=$$
$$=\int\limits_{Q_T}\big(f_{j-\beta}(t)*G_0(x-y,t)\big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt.$$

Замінивши $\int\limits_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(y,t)dt$ за формулою (9), отримаємо

$$\int\limits_{Q_T} G_j(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} \big(f_{j-\beta}(t) * G_0(x-y,t)\big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt.$$

За лемою 3 з [9] для кожної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ існує така $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, що $\hat{L}\psi = \varphi$ в $\bar{Q}_T$. Тоді з попередньої рівності

$$\int\limits_{Q_T} \big(G_j(x-y,t) - f_{j-\beta}(t) * G_0(x-y,t)\big)\varphi(x,t)dxdt = 0 \quad \forall \varphi \in D(\bar{Q}_T), \quad j = 1,2,$$

а звідси за лемою Дюбуа-Реймона ([11], с. 95) одержуємо формулу (10).

Нехай $\quad (\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_\tau^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dx,$

$$(\hat{\mathfrak{G}}_j\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{Q_T} G_j(x-y,t)\varphi(x,t)dxdt, \quad \varphi \in D(\bar{Q}_T), \quad j = 1,2. \qquad \square$$

Лема 3. *При* $\beta \in (1,2), \quad \alpha \neq \beta$

$$\hat{\mathfrak{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T), \quad \hat{\mathfrak{G}}_j : D(\bar{Q}_T) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad j = 1,2.$$

Доведення. У [12] побудовано фундаментальний розв'язок $G_0(x,t)$ рівняння (1). Він набув вигляду

$$G_0(x,t) = \frac{\pi^{n/2} t^{\beta-1}}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (\beta,\beta) & \\ (1,1) & (n/2,\alpha/2) & (1,\alpha/2) \end{matrix} \right), \tag{11}$$

де $\quad H^{m,n}_{p,q}\left(z \middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) \end{matrix} \right)$–H-функція Фокса ([13]).

Використовуємо позначення з [13] для $H^{m,n}_{p,q}$:

$$a^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^m \beta_i - \sum_{i=m+1}^q \beta_i, \quad \Delta^* = \sum_{i=1}^q \beta_i - \sum_{i=1}^p \alpha_i.$$

Для функції G_0 одержимо $a^* = 2-\beta$, $\Delta^* = \alpha - \beta$. Тому за теоремою 1.1 [13] при $\beta \neq \alpha$ ($\Delta^* \neq 0$) функція G_0 існує для всіх $x \neq 0$, $t > 0$.

Функції $G_j(x,t)$, $j = 1,2$ знаходимо, враховуючи лему 2 (формули (10)) та властивості H-функцій Фокса з [13].

Властивість 2.1. H-функція симетрична на кожній із множин пар: (a_1,α_1), $\dots,(a_n,\alpha_n)$; $(a_{n+1},\alpha_{n+1}),\dots,(a_p,\alpha_p)$; $(b_1,\beta_1),\dots,(b_m,\beta_m)$; $(b_{m+1},\beta_{m+1}),\dots,(b_q,\beta_q)$.

Властивість 2.2. При $n \geq 1$, $q \geq m$

$$H^{m,n}_{p,q}\left(z \middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) & \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_{q-1},\beta_{q-1}) & (a_1,\alpha_1) \end{matrix} \right) =.$$

$$= H^{m,n-1}_{p-1,q-1}\left(z \middle| \begin{matrix} (a_2,\alpha_2) & \dots & (a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_{q-1},\beta_{q-1}) \end{matrix} \right).$$

Властивість 2.3.

$$H^{m,n}_{p,q}\left(\tfrac{1}{z} \middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) \end{matrix} \right) = H^{n,m}_{q,p}\left(z \middle| \begin{matrix} (1-b_1,\beta_1) & \dots & (1-b_q,\beta_q) \\ (1-a_1,\alpha_1) & \dots & (1-a_p,\alpha_p) \end{matrix} \right).$$

Властивість 2.8. Для $\omega, c \in C$, $\sigma > 0$, $k = 0,1,\dots$

$$(\tfrac{d}{dz})^k \left[z^\omega H^{m,n}_{p,q}\left(cz^\sigma \middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) \end{matrix} \right) \right] =$$

$$= z^{\omega-k}H^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(cz^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(-\omega,\sigma) & (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) & (k-\omega,\sigma)\end{matrix}\right)=$$

$$= (-1)^k z^{\omega-k}H^{m+1,n}_{p+1,q+1}\left(cz^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) & (-\omega,\sigma)\\ (k-\omega,\sigma) & (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right).$$

За теоремою 2.1 із [13] для довільних $\lambda \in C$, $m > 0$ та у разі виконання умови (1.1.6)

$$H^{m,n}_{p,q}\left(\lambda z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)=$$

$$= \lambda^{\frac{b_1}{\beta_1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(1-\lambda^{\frac{1}{\beta_1}})^k H^{m,n}_{p,q}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1+k\beta_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right).$$

Перетворимо функцію G_0 за властивістю 2.3 та теоремою 2.1 із [13]

$$G_0(x,t) = \frac{\pi^{n/2}t^{\beta-1}}{|x|^n}H^{1,2}_{3,2}\left(\frac{2^{\alpha}a^2t^{\beta}}{|x|^{\alpha}}\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\alpha/2) & (0,\alpha/2)\\ (0,1) & (1-\beta,\beta) & \end{matrix}\right)=$$

$$= \frac{\pi^{n/2}t^{\beta-1}}{|x|^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(1-\frac{2^{\alpha}a^2}{|x|^{\alpha}})^k H^{1,2}_{3,2}\left(t^{\beta}\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\alpha/2) & (0,\alpha/2)\\ (k,1) & (1-\beta,\beta) & \end{matrix}\right).$$

За теоремою 2.7 із [13] про дробове диференціювання H-функцій при $a^* > 0$, $\sigma \min\limits_{1\le j\le m}[\frac{Reb_j}{\beta_j}] + Re\omega > -1$, $\varrho > 0$

$$f_{\varrho}(z) * \left[z^{\omega}H^{m,n}_{p,q}\left(z^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)\right]=$$

$$= z^{\omega+\varrho}H^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(z^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(-\omega,\sigma) & (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) & (-\omega-\varrho,\sigma)\end{matrix}\right).$$

Оскільки $2-\beta > 0$, то, використовуючи цей факт та формулу (10), отримаємо

$$G_2(x,t) = f_{2-\beta}(t) * G_0(x,t) =$$

$$= \frac{\pi^{n/2}}{|x|^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(1-\frac{2^{\alpha}a^2}{|x|^{\alpha}})^k f_{2-\beta}(t) * \left[t^{\beta-1}H^{1,2}_{3,2}\left(t^{\beta}\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\alpha/2) & (0,\alpha/2)\\ (k,1) & (1-\beta,\beta) & \end{matrix}\right)\right]=$$

$$= \frac{\pi^{n/2}t}{|x|^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(1-\frac{2^{\alpha}a^2}{|x|^{\alpha}})^k H^{1,3}_{4,3}\left(t^{\beta}\middle|\begin{matrix}(1-\beta,\beta) & (0,1) & (1-n/2,\alpha/2) & (0,\alpha/2)\\ (k,1) & (1-\beta,\beta) & (-1,\beta) & \end{matrix}\right).$$

Використовуючи властивість 2.2 і знову теорему 2.1 [13], одержуємо

$$G_2(x,t) = \frac{\pi^{n/2}t}{|x|^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(1-\frac{2^{\alpha}a^2}{|x|^{\alpha}})^k H^{1,2}_{3,2}\left(t^{\beta}\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\alpha/2) & (0,\alpha/2)\\ (k,1) & (-1,\beta) & \end{matrix}\right)=$$

$$= \frac{\pi^{n/2}t}{|x|^n}H^{1,2}_{3,2}\left(\frac{2^{\alpha}a^2t^{\beta}}{|x|^{\alpha}}\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\alpha/2) & (0,\alpha/2)\\ (0,1) & (-1,\beta) & \end{matrix}\right).$$

За властивістю 2.3 остаточно отримаємо

$$G_2(x,t) = \frac{\pi^{n/2}t}{|x|^n}H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^{\alpha}}{2^{\alpha}a^2t^{\beta}}\middle|\begin{matrix}(1,1) & (2,\beta) & \\ (1,1) & (n/2,\alpha/2) & (1,\alpha/2)\end{matrix}\right).$$

Оскільки

$$G_1(x,t) = f_{1-\beta}(t) * G_0(x,t) = f'_{2-\beta}(t) * G_0(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(f_{2-\beta}(t) * G_0(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t} G_2(x,t),$$

то подібно до попередніх перетворень, але використовуючи властивість 2.8 із [13] про диференціювання H-функцій замість теореми 2.7 із [13], одержуємо

$$G_1(x,t) = \tfrac{\pi^{n/2}}{|x|^n} \tfrac{\partial}{\partial t} \left[t H^{2,1}_{2,3} \left(\tfrac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (2,\beta) & \\ (1,1) & (n/2, \alpha/2) & (1,\alpha/2) \end{matrix} \right) \right] =$$

$$= \tfrac{\pi^{n/2}}{|x|^n} \tfrac{\partial}{\partial t} \left[t H^{1,2}_{3,2} \left(\tfrac{2^\alpha a^2 t^\beta}{|x|^\alpha} \middle| \begin{matrix} (0,1) & (1-n/2, \alpha/2) & (0,\alpha/2) \\ (0,1) & (-1,\beta) & \end{matrix} \right) \right] =$$

$$= \tfrac{\pi^{n/2}}{|x|^n} H^{1,3}_{4,3} \left(\tfrac{2^\alpha a^2 t^\beta}{|x|^\alpha} \middle| \begin{matrix} (-1,\beta) & (0,1) & (1-n/2, \alpha/2) & (0,\alpha/2) \\ (0,1) & (-1,\beta) & (0,\beta) & \end{matrix} \right) =$$

$$= \tfrac{\pi^{n/2}}{|x|^n} H^{1,2}_{3,2} \left(\tfrac{2^\alpha a^2 t^\beta}{|x|^\alpha} \middle| \begin{matrix} (0,1) & (1-n/2, \alpha/2) & (0,\alpha/2) \\ (0,1) & (0,\beta) & \end{matrix} \right) =$$

$$= \tfrac{\pi^{n/2}}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3} \left(\tfrac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (1,\beta) & \\ (1,1) & (n/2, \alpha/2) & (1,\alpha/2) \end{matrix} \right).$$

Отже,

$$G_j(x,t) = \frac{\pi^{n/2} t^{j-1}}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3} \left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (j,\beta) & \\ (1,1) & (n/2, \alpha/2) & (1,\alpha/2) \end{matrix} \right), \quad j = 1, 2. \tag{12}$$

Зауважимо, що вигляд функції $G_1(x,t)$ збігається з одержаним у [3] для випадку $\beta \in (0,1)$.

Для функцій G_1, G_2 отримаємо $a^* = 2-\beta$, $\Delta^* = \alpha - \beta$. Тому за теоремою 1.1 [13] при $\beta \neq \alpha$ ($\Delta^* \neq 0$) функції G_1, G_2 існують для всіх $x \neq 0$, $t > 0$.

У [13] побудована асимптотика для H-функцій Фокса. Враховуючи, що виконуються умови (1.1.6) та (1.3.2) із [13], за теоремою 1.7 із [13] одержуємо оцінки

$$|G_0(x,t)| \leq \frac{C_0 t^{\beta-1}}{|x|^n}, \quad |G_j(x,t)| \leq \frac{C_j t^{j-1}}{|x|^n}, \quad j = 1,2 \qquad \text{при} \quad |x|^\alpha > t^\beta. \tag{13}$$

За наслідком з теореми 1.12 [13] отримуємо оцінки при $|x|^\alpha < t^\beta$:

$$|G_0(x,t)| \leq \frac{C_0^*}{t|x|^{n-\alpha}} \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha}, \quad \text{якщо} \quad \alpha < n, \tag{14}$$

$$|G_0(x,t)| \leq \frac{C_0^*}{t^{1-\beta+n\beta/\alpha}} \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \quad \text{для} \quad \alpha \geq n, \tag{15}$$

$$|G_j(x,t)| \leq \frac{C_j^* t^{j-1-\beta}}{|x|^{n-\alpha}} \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha}, \quad \text{якщо} \quad \alpha < n, \quad j = 1,2 \tag{16}$$

$$|G_j(x,t)| \leq \frac{C_j^*}{t^{1-j+n\beta/\alpha}} \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \quad \text{для} \quad \alpha \geq n, \quad j = 1,2. \tag{17}$$

Тут C_j, C_j^*, $j = 0,1,2$ – певні додатні сталі. У випадку

$$\alpha \neq \frac{n+2l}{\sigma}, \quad l = 0,1,\ldots, \quad \sigma = 1,2,\ldots \tag{18}$$

правильні такі самі оцінки без логарифмів.

З одержаних вище оцінок випливає інтегровність функцій G_j в Q_T, $j=0,1,2$, а звідси – неперервність функцій $(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,\tau)$ в Q_T та $(\hat{\mathfrak{G}}_j\varphi)(y)$ в $\mathbb{R}^n$, $j=1,2$.

Оскільки $\frac{\partial}{\partial y_i}G_j(x-y,t)=-\frac{\partial}{\partial x_i}G_j(x-y,t)$, $i=1,\ldots,n$, $j=0,1,2$ і подібно для похідних вищих порядків, функція $\varphi\in D(\bar{Q}_T)$, то для всіх γ

$$D^\gamma(\hat{\mathfrak{G}}_j\varphi)(y)=\int\limits_{Q_T}G_j(x-y,t)D^\gamma\varphi(x,t)dxdt$$

за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$w_{j,\gamma}(y)=\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_j(x-y,t)D^\gamma\varphi(x,t)dxdt,\quad j=0,1,2,\quad \varphi\in D(\bar{Q}_T).$$

За цих умов з попередньої рівності одержимо, що $D^\gamma(\hat{\mathfrak{G}}_j\varphi)\in C(\mathbb{R}^n)$ для довільного мультиіндексу γ, а отже, $\hat{\mathfrak{G}}_j\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $\varphi\in D(\bar{Q}_T)$.

Доведемо рівномірну збіжність інтегралів $w_{j\gamma}(y)$ для кожного γ. Розглядатимемо для простоти випадок (18).

Враховуючи оцінки (13), (16) функцій $G_j(x-y,t)$, $j=1,2$, фінітність та обмеженість функцій $D^\gamma\varphi(x,t)$ в Q_T, у випадку $\alpha<n$ отримаємо

$$|w_{j,\gamma}(y)|\le\Big|\int\limits_0^T dt\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<t^\beta}G_j(x-y,t)D^\gamma\varphi(x,t)dx+$$
$$+\int\limits_0^T dt\int\limits_{x:|x-y|^\alpha>t^\beta}G_j(x-y,t)D^\gamma\varphi(x,t)dx\Big|\le$$
$$\le d_{j,\gamma,0}\int\limits_0^T\Bigg[t^{j-1-\beta}\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<t^\beta}\frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^{n-\alpha}}dx+t^{j-1}\int\limits_{x:|x-y|^\alpha>t^\beta}\frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Bigg]dt\le$$
$$\le d_{j,\gamma,1}\Bigg[\int\limits_0^T t^{j-1-\beta}dt\int\limits_0^{t^{\beta/\alpha}}r^{\alpha-1}dr+\int\limits_0^T t^{j-1}dt\int\limits_{t^{\beta/\alpha}}^{+\infty}|D^\gamma\varphi(x,t)|r^{-1}dr\Bigg]\le$$
$$\le d_{j,\gamma,2}\int\limits_0^T t^{j-1}[1+|\ln t^{\beta/\alpha}|]dt<+\infty.$$

Тут і далі $d_{j,\gamma,k}$, $j=1,2$, $k=0,1,\ldots$ – додатні сталі.

У випадку $\alpha\ge n$ з врахуванням оцінок (13), (17) одержуємо

$$|w_{j,\gamma}(y)|\le d_{j,\gamma,3}\int\limits_0^T t^{j-1}\Bigg[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<t^\beta}\frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{t^{n\beta/\alpha}}dx+\int\limits_{x:|x-y|^\alpha>t^\beta}\frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Bigg]dt\le$$
$$\le d_{j,\gamma,4}\int\limits_0^T t^{j-1}[1+|\ln t^{\beta/\alpha}|]dt<+\infty,\quad j=1,2.$$

Ми довели, що $\hat{\mathfrak{G}}_j:D(\bar{Q}_T)\to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j=1,2$.

Оскільки $\frac{\partial}{\partial\tau}G_0(x-y,t-\tau)=-\frac{\partial}{\partial t}G_0(x-y,t-\tau)$ і подібно для похідних вищих порядків, функція $\varphi\in D(\bar{Q}_T)$, то для всіх $\bar{\gamma}$

$$D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,\tau)=\int\limits_{Q_T}G_0(x-y,t-\tau)D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)dxdt\quad\text{та}\quad D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,T)=0$$

за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$w_{0,\bar\gamma}(y,\tau)=\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)D^{\bar\gamma}\varphi(x,t)dxdt,\quad \varphi\in D(\bar Q_T).$$

За цієї умови з попередньої рівності одержимо, що $D^{\bar\gamma}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)\in C(Q_T)$ для довільного мультиіндексу $\bar\gamma$, а отже, $\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi\in C^{\infty,(0)}(\bar Q_T)$ при $\varphi\in D(\bar Q_T)$.

Доведемо рівномірну збіжність інтегралів $w_{0,\bar\gamma}(y,\tau)$ для кожного $\bar\gamma$. Розглядатимемо для простоти випадок (18).

Враховуючи оцінки (13), (14) функції $G_0(x-y,t-\tau)$, фінітність та обмеженість функцій $D^{\bar\gamma}\varphi(x,t)$ в Q_T, у випадку $\alpha<n$ отримаємо

$$|w_{0,\bar\gamma}(y,\tau)|\le\int\limits_{\tau}^{T}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<(t-\tau)^\beta}|G_0(x-y,t-\tau)|\cdot|D^{\bar\gamma}\varphi(x,t)|dx+$$

$$+\int\limits_{x:|x-y|^\alpha>(t-\tau)^\beta}|G_0(x-y,t-\tau)|\cdot|D^{\bar\gamma}\varphi(x,t)|dx\Big]dt\le$$

$$\le d_{0,\bar\gamma,0}\int\limits_{\tau}^{T}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<(t-\tau)^\beta}\frac{|D^{\bar\gamma}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)|x-y|^{n-\alpha}}dx+\int\limits_{x:|x-y|^\alpha>(t-\tau)^\beta}\frac{|D^{\bar\gamma}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{1-\beta}|x-y|^{n}}dx\Big]dt\le$$

$$\le d_{0,\bar\gamma,1}\Big[\int\limits_{\tau}^{T}\frac{dt}{t-\tau}\int\limits_{0}^{(t-\tau)^{\beta/\alpha}}r^{\alpha-1}dr+\int\limits_{\tau}^{T}\frac{1}{(t-\tau)^{1-\beta}}dt\int\limits_{(t-\tau)^{\beta/\alpha}}^{+\infty}|D^{\bar\gamma}\varphi(x,t)|r^{-1}dr\Big]\le$$

$$\le d_{0,\bar\gamma,2}\int\limits_{\tau}^{T}(t-\tau)^{\beta-1}[1+|\ln{(t-\tau)^{\beta/\alpha}}|]dt<+\infty.$$

Тут і далі $d_{0,\bar\gamma,i}$, $i=0,1,\ldots$ – додатні сталі.

У випадку $\alpha\ge n$, враховуючи оцінки (13), (15), подібно одержуємо

$$|w_{0,\bar\gamma}(y,\tau)|\le$$

$$\le d_{0,\bar\gamma,3}\int\limits_{\tau}^{T}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<(t-\tau)^\beta}\frac{|D^{\bar\gamma}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{1-\beta(1-\frac{n}{\alpha})}}dx+\int\limits_{x:|x-y|^\alpha>(t-\tau)^\beta}\frac{|D^{\bar\gamma}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{1-\beta}|x-y|^{n}}dx\Big]dt\le$$

$$\le d_{0,\bar\gamma,4}\int\limits_{\tau}^{T}(t-\tau)^{\beta-1}[1+|\ln{(t-\tau)^{\beta/\alpha}}|]dt<+\infty.$$

Ми довели, що $\hat{\mathfrak{G}}_0:D(\bar Q_T)\to C^{\infty,(0)}(\bar Q_T)$. Лема доведена.

$\square$

6. Теорема існування та єдиності.

Теорема 1. *За припущення (L) існує єдиний розв'язок $u\in D'(\bar Q_T)$ задачі (3). Він визначений формулою*

$$(u,\varphi)_{Q_T}=(F,\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)_{Q_T}+\sum_{j=1}^{2}(F_j,\hat{\mathfrak{G}}_j\varphi)\quad\forall\varphi\in D(\bar Q_T).\tag{19}$$

Доведення. За лемою 3 $\hat{\mathfrak{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$, $\hat{\mathfrak{G}}_j : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2$. За лемою 3 із [9] для кожної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ існує така $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, що $(\hat{L}\psi)(x,t) = \varphi(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$. Такою є функція

$$\psi(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau)\varphi(x,t)dx.$$

Отож, $\hat{\mathfrak{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to X(\bar{Q}_T)$, права частина в формулі (19) має сенс і формулою (19) визначено $u \in D'(\bar{Q}_T)$.

Підставляючи функцію (19) у тотожність (4), використовуючи лему 2, доводимо, що функція (19) є розв'язком задачі (3)

$$(u, \hat{L}\psi)_{Q_T} = (F, \hat{\mathfrak{G}}_0(\hat{L}\psi))_{Q_T} + \sum_{j=1}^{2} (F_j, \hat{\mathfrak{G}}_j(\hat{L}\psi)) =$$

$$= (F, \psi)_{Q_T} + \sum_{j=1}^{2} (F_j(x), \int\limits_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(x,t)dt) \quad \forall \psi \in X(\bar{Q}_T).$$

Якщо u_1, u_2 – розв'язки задачі (3), то функція $u = u_1 - u_2$ задовольняє умову

$$(u, \hat{L}\psi)_{Q_T} = 0 \quad \forall \psi \in X(\bar{Q}_T),$$

а тоді з використанням леми 3 із [9], $(u, \varphi)_{Q_T} = 0$ для кожної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, тобто $u = 0$ в $D'(\bar{Q}_T)$. Теорема доведена. □

Зауваження 1. Результат теореми 1 можна поліпшити: визначити залежність характеру особливостей розв'язку задачі при $t = 0$ від особливостей правої частини рівняння та порядків сингулярностей узагальнених функцій у початкових умовах.

Список використаної літератури

1. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка / *А.Н. Кочубей* // Дифф. уравн. – 1990. – Т. 26, №4. – С. 660-670.
2. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / *S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei* – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2004.
3. *Anh V.V.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas / *V.V. Anh, N.N. Leonenko* // J. of Statistical Physics. – 2001. – Vol. 104(5/6). – P. 1349-1387.
4. *Ворошилов А.А.* Условия существования классического решения задачи Коши для дифуззионно-волнового уравнения с частной производной Капуто /*А.А. Ворошилов, А.А. Килбас* // ДАН. – 2007. – Т. 414, №4. – С. 1-4.
5. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / *М.М. Джрбашян* – М.: Наука, 1999.
6. *Городецкий В.В.* Параболические псевдодифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций / *В.В. Городецкий, Я.М. Дринь* // Львов. – 1991. – №4-91. – С.57. (Препр./АН Украины. Ин-т прикл. пр. мех. и мат.; №4-91.).
7. *Лопушанська Г.П.* Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних / *Г.П. Лопушанська* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №1. – С. 48-59.
8. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка / *А.В. Псху* – М.: Наука, 2005.

9. *Лопушанская Г.П.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций / *Г.П. Лопушанская, А.О. Лопушанский, О.В. Пасичник* // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, №6. – С. 1288-1299.
10. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / *Г.Е. Шилов* – М.: Наука, 1965.
11. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / *В.С. Владимиров* – М.: Наука, 1981.
12. *Jun Sheng Duan.* Time- and space-fractional partial differential equations / *Jun Sheng Duan* // J. Math. Phis. – 2005. – Vol. 46 (013504).
13. *Kilbas A.A.* H-Transforms / *A.A. Kilbas, M. Sajgo* – Boca-Raton: Chapman and Hall / CRC, 2004.

Стаття: надійшла до редакції 30.03.2012
прийнята до друку 12.12.2012

THE SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR FRACTIONAL DERIVATIVE EQUATIONS IN SPACES OF DISTRIBUTIONS

Andrii LOPUSHANSKYJ

Institute of Mathematics, Rzeszów University,
Al. Rejtana, 16 A, Rzeszo'w, 35-959, Poland
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

We prove the existence and uniqueness theorem and get the representation by means of the Green's vector-function of the solution of the Cauchy problem

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \quad a = const,$$

$$u^{(j)}(x,0) = F_j(x), \quad x \in R^n, \quad j = 1,2,$$

with Riemann-Liouville fractional derivative $u_t^{(\beta)}$ of the order $\beta \in (1,2)$ and F, F_1, F_2 from some spaces of generalized functions D'. Here the fractional n-dimensional Laplace operator $(-\Delta)^{\alpha/2}$ is defined by its Fourier transform: $\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)] = |\lambda|^\alpha \mathfrak{F}[\psi(x)]$.

Key words: fractional derivative, generalized function, Cauchy problem, Green vector-function.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Андрей ЛОПУШАНСКИЙ

Институт математики, Жешовский университет,
ал. Рейтана, 16 А, Жешов, 35-959, Польша
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

Доказана теорема о существовании и единственности, получено представление с помощью вектор-функции Грина решение задачи Коши

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \quad a = const,$$
$$u(j)(x,0) = F_j(x), \quad x \in R^n, \quad j = 1,2,$$

с производной Римана-Лиувилля $u_t^{(\beta)}$ порядка $\beta \in (1,2)$ и F, F_1, F_2 из пространств обобщенных функций D'. Здесь $(-\Delta)^{\alpha/2}$ определено с помощью преобразования Фурье $\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)] = |\lambda|^\alpha \mathfrak{F}[\psi(x)]$.

Ключевые слова: производная дробного порядка, обобщенная функция, задача Коши, вектор-функция Грина.